数理解析研究所講究録
第 367 巻 1979 年 288-293

開放系の作用素代数による一考察

東京理科大学　大矢雅則

平衡状態にない有限系が、平衡状態にある無限系（熱浴）に結合している場合、その系が平衡へ近接ための条件を、系のHamiltonianのスペクトルとの関連の下で、C^*-代数の方法によって調べてみる。

有限な力学系Sは、三つ組 $(\mathcal{A}^S, \mathfrak{S}^S, \alpha_t^S)$ $(t \in \mathbb{R})$ で与えられ、無限な熱浴Rは、三つ組 $(\mathcal{A}^R, \mathfrak{S}^R, \alpha_t^R)$ で与えられているとする。ここで、$\mathcal{A}^S$は可分なHilbert Space $\mathcal{H}^S$上の有界線形作用素の全体であり（$\mathbb{B}(\mathcal{H}^S)$と表わしよう）、$\mathcal{A}^R$は無限自由度をもつ熱浴Rを記述する恒等元$I^R$をもつ$C^*$代数である。又、$\mathfrak{S}^S$, $\mathfrak{S}^R$をそれぞれC^*-代数$\mathcal{A}^S$, $\mathcal{A}^R$上の状態（states）の集合とする。α_t^S, α_t^Rは系S及びRの時間発展を記述する、$\mathcal{A}^S$, $\mathcal{A}^R$の$*$-自己同型群である。特に、α_t^Sは系SのHamiltonian H^Sによって生成される。

$$\alpha_t^S(A) = e^{itH^S} A \, e^{-itH^S} \qquad ({}^\forall A \in \mathcal{A}^S)$$

ここで、力学系をえがく三つ組 $(\mathfrak{A}, \mathfrak{S}, \alpha_t)$ に関して、簡単に復習しておこう。

$\mathfrak{A}$ が C^*-代数であるとは、

(i) $\mathfrak{A}$ は代数である。

(ii) $\mathfrak{A}$ から $\mathfrak{A}$ の上への写像 $A \in \mathfrak{A} \longmapsto A^* \in \mathfrak{A}$ が定義されていて、(a) $(A^*)^* = A$ (b) $(\lambda A + \mu B)^* = \bar{\lambda} A^* + \bar{\mu} B^*$ (c) $(AB)^* = B^* A^*$ が満されている。(ここで $\bar{\lambda}$ は複素数 λ の共役数を表わし、A, B は $\mathfrak{A}$ の任意の元である。)

(iii) $\mathfrak{A}$ 上に norm $\|\cdot\|$ が定義されていて、その norm に関して $\mathfrak{A}$ は完備である。

(iv) 任意の $\mathfrak{A}$ の元 A, B に対して、$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ 及び $\|A^*A\| = \|A\|^2$ が成立。

を満すものをいう。

$\varphi \in \mathfrak{S}$ が $\mathfrak{A}$ 上の状態であるとは、

(i) φ は $\mathfrak{A}$ から $\mathbb{C}$ 上への線形汎函数

(ii) $\varphi(A^*A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathfrak{A}$.

(iii) $\varphi(I) = 1$ （$\mathfrak{A}$ は単位元 I を含むとしてある）

を満すものをいう。

特に、$\varphi(A^*A) = 0 \Leftrightarrow A = 0$ であるとき、状態 φ は忠実 (faithful) であるという。

最後に、α_t $(t\in\mathbb{R})$ が $\mathcal{A}$ の $*$-自己同型群であるとは、

(i) $\alpha_t(AB) = \alpha_t(A)\alpha_t(B) \in \mathcal{A}$ $\quad \forall A, B\in\mathcal{A}, \forall t\in\mathbb{R}$

(ii) $\{\alpha_t \mid t\in\mathbb{R}\}$ は群をなす。

(iii) $\alpha_t(A)^* = \alpha_t(A^*)$

を満すものをいう。

更に、α_t が t に関して、強連続であるとは、

$$\lim_{t\to 0} \|\alpha_t(A) - A\| = 0$$

のことであり、我々はこの性質を以下仮定しよう。

さて、熱浴 R の平衡状態として、Kubo-Martin-Schwinger 条件を採用しよう。

忠実な状態 $\varphi^R\in\mathfrak{S}^R$ が、温度の逆数 β $(=1/kT)$ で、時間発展 α_t^R に関して K.M.S. 条件を満すとは、$\mathcal{A}$ の任意の要素 A, B に対して、開区間 $-\beta<\mathrm{Im}\, z<0$ で解析的、閉区間 $-\beta\leqq \mathrm{Im}\, z\leqq 0$ で連続な複素数 z の有界関数 $F_{A,B}(z)$ が存在して、次の境界条件を満すことをいう。

$$F_{A,B}(t) = \varphi(\alpha_t(A)B),$$

$$F_{A,B}(t-i\beta) = \varphi(B\alpha_t(A))。$$

K.M.S. 条件を満す状態を、K.M.S. 状態とよび、これは Gibbs 状態の一般化であり、現在、物理系の平衡状態を記述していく上で最も自然なものと考えられている。

この状態 φ^R に対して、Gelfand - Naimark - Segal (G. N. S.) 構成定理により、四つ組 ($\mathcal{H}^R$, π^R, Φ^R, U_t^R) がユニタリー同値性を除いて一意的に決定される。ここで $\mathcal{H}^R$ は φ^R により構成されたHilbert spaceであり、π^R は $\mathcal{A}^R$ から $\mathcal{B}(\mathcal{H}^R)$ への表現であり、Φ^R は $\mathcal{H}^R$ の元で、$\varphi^R(A) = \langle \Phi^R, \pi^R(A)\Phi^R \rangle$ $\pi^R(\mathcal{A}^R)^- = \mathcal{H}^R$ を満すものである。又、U_t^R はユニタリー一径数群で、$\pi^R(\alpha_t^R(A))\Phi^R = U_t^R \pi^R(A) U_{-t}^R \Phi^R = U_t^R \pi^R(A) \Phi^R$ となる。Stoneの定理によって、自己共用作用素 H^R が存在して、$U_t^R = \exp(itH^R)$ と表わせる。

今、系 S の任意の状態 $\varphi^S \in \mathfrak{S}^S$ を考えると、φ^S が α_t^S の下で不変でない (i.e., $\varphi^S(\alpha_t^S(A)) \neq \varphi^S(A)$ for $\exists A \in \mathcal{A}^S$) 場合は、Schrödinger方程式の時間反転に対する不変性と、系 S の有限性より、$\varphi^S(\alpha_t^S(A))$ $(\forall A \in \mathcal{A}^S)$ は t に関して、ほとんど周期的な函数である。従って、$\lim_{|t| \to \infty} \varphi^S(\alpha_t^S(A))$ $(\forall A \in \mathcal{A}^S)$ は存在しない。そこで、平衡への近接を議論するためには、熱浴からの影響を考慮しなければならなくなる。

S と R の初期 (non-interacting) の結合系は、次のように表わすことができる。

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^S \otimes \mathcal{A}^R$$

$$\phi = \phi^S \otimes \varphi^R \qquad (\forall \phi^S \in \mathfrak{S}^S)$$
$$\alpha_t^0 = \alpha_t^S \otimes \alpha_t^R \qquad (\forall t \in \mathbb{R}) .$$
$$\pi = i^S \otimes \pi^R \qquad (i^S \text{は} \mathfrak{A}^S \text{上への恒等写像})$$

SとRとの間の相互作用を $V=V^* \in \mathfrak{A}$ で与えると、いわゆる摂動された時間発展 α_t は一様収束するDyson seriesで与えられる。$t \geqq 0$ のとき、

$$\alpha_t(A) = \sum_{n \geqq 0} \int_{0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n \leq t} dt_1 \cdots \int dt_n \; [\alpha_{t_1}^0(V), [\cdots, [\alpha_{t_n}^0(V), \alpha_t^0(A)] \cdots\cdots]$$

$t<0$ の場合は、上の積分領域で、0 と t を交換すればよい。

そこで、問題は、(i) 任意の $A \in \mathfrak{A}$ に対して、$\lim_{|t| \to \infty} \phi(\alpha_t(A)) \equiv \psi(A)$ が存在し、ψ が平衡状態となる条件をもとめることと、(ii) ψ を $\mathfrak{A}^S$ 上に制限したとき、それがRと同じ温度をもつ、SのHamiltonian H^S より作られるGibbs stateになる条件をもとめることである。

主たる結果は、

(R-1): Hamiltonian $H = H^S + H^R + \pi(V)$ のスペクトルが、非縮退な固有値 $\{0\}$ と、絶対連続なスペクトルからなっているとき、極限 $\psi(A) = \lim_{|t| \to \infty} \phi(\alpha_t(A))$ が存在して、ψ は熱浴Rの β で、α_t に関してK.M.S.条件を満す。

(R-2)：(R-1)と同じ条件のFで

$$\lim_{\|V\|\to 0}\lim_{|t|\to\infty}\Phi(\alpha_t(A)) = \varphi^S(A) \qquad \forall A\in\mathcal{A}^S$$

ここで、$\varphi^S(A) = tr\, e^{-\beta H^S}A \,/\, tr\, e^{-\beta H^S}$ である。

以上の結果は、拙論 "On Open System Dynamics — An Operator Algebraic study —" (to be published) において得られたものである。