数理解析研究所講究録
第368巻 1979年 70-83

コンパクト・リーマン空間上の Schrödinger 方程式の基本解について

広大 理　脇本 実

symplectic 多様体上の polarizations を使って定義される pairing は Fourier 変換の一つの拡張とみなす事が出来る。ここでは、この pairing を応用して、compact 等質空間上の自由粒子の Schrödinger 方程式の基本解を構成する。

§1. Polarizations に associate した pairing

X : $2n$ 次元 C^∞-多様体

ω : X 上の非退化な closed 2-form

(= symplectic form)

とする。ω の定める de Rham cohomology class $[\omega]$ が $H^2(X, \mathbb{Z})$ に属する時には、X 上に複素 line bundle $\mathcal{L}$ が出来て、$\mathcal{L}$ は connection ∇ 及び Hermitian 内積を持つ。この § の内容はすべて $[\omega]$ = integral の下で成立する事であるが、ここでは見通しを良くする為に、ω が exact であると

して話を進める。すなわち，$\omega = d\theta$ と仮定する。この時 $\mathcal{L}$ は trivial line bundle であり，connection は次の様に与えられる：
$$(\nabla_X \varphi)(x) = (X\varphi)(x) - i\langle\theta, X\rangle\varphi(x)$$
$$\text{for } {}^\forall\varphi \in C^\infty(X, \mathbb{C}),\ {}^\forall X \in \mathfrak{X}(X),\ {}^\forall x \in X$$
但し $\mathfrak{X}(X) := \{X \text{ 上の } C^\infty\text{- vector fields}\}$

<u>定義</u>： symplectic 多様体 X 上の（Chevalley の意味での）distribution $\mathfrak{M}$:
$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \cup\!\!\!\shortmid & & \\ x & \longmapsto & \mathfrak{M}_x \underset{\text{linear subspace}}{\subset} T_x(X) \end{array}$$
が次の条件を満たす時，$\mathfrak{M}$ を X 上の <u>polarization</u> と呼ぶ。

i) $\mathfrak{M}_x$ ： Lagrangean subspace

i.e. $\omega_x|_{\mathfrak{M}_x \times \mathfrak{M}_x} = 0$ ， $\dim \mathfrak{M}_x = n$

ii) $\exists M$ ： n 次元 C^∞-多様体

$\exists \pi : X \longrightarrow M$ ： onto, submersion

s.t. $\begin{cases} \operatorname{Ker} \pi_{*x} = \mathfrak{M}_x & \text{for } {}^\forall x \in X \\ \theta = \text{exact on } \pi^{-1}(p) & \text{for } {}^\forall p \in M \end{cases}$

X 上に polarization $\mathfrak{M}$ が与えられた時，$x \in X$ をとり，$\pi(x) = p$ とおくと，
$$\begin{tikzcd} \pi_{*x} : T_x(X) \arrow[r] \arrow[d] & T_p(M) \\ T_x(X)/\mathfrak{M}_x \arrow[ur, "\cong"'] & \end{tikzcd}$$

そこで，
$$T_p^*(M) \cong [T_x(X)/\mathfrak{M}_x]^*$$

一方, $\omega_x : \mathfrak{M}_x \times T_x(X)/\mathfrak{M}_x \longrightarrow \mathbb{R}$ によって

$$[\,T_x(X)/\mathfrak{M}_x\,]^* \cong \mathfrak{M}_x$$

従って, $$T_p^*(M) \cong \mathfrak{M}_x$$

M上の C^∞-half-densities の space $C^\infty(|\wedge|^{\frac{1}{2}}M)$ を考える。$f^\# \in C^\infty(|\wedge|^{\frac{1}{2}}M)$ をとると, M の座標近傍 $(U\,;\,q_1,\cdots,q_n)$ の上で $f^\#$ は, $f^\#|U = f\cdot|dq_1\wedge\cdots\wedge dq_n|^{\frac{1}{2}}$ $(f\in C^\infty(U))$ と書ける。同型写像 $T_p^*(M)\cong\mathfrak{M}_x$ の下で, $(dq_i)_p$ に対応する ($\mathfrak{M}_x$ に属する) 接ベクトルを $(X_i)_{px}$ とおく。また, f を, $\mathfrak{M}$ 方向に covariant constant な函数 $\tilde{f}\in C^\infty(\pi^{-1}(U),\mathbb{C})$ に lift する。i.e., $\nabla_X\tilde{f}=0$ for $\forall X\in\mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}(\pi^{-1}(U))$

但し, $\mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}(\pi^{-1}(U)) = \{X\in\mathfrak{X}(\pi^{-1}(U))\,;\ X_x\in\mathfrak{M}_x \text{ for } \forall x\}$.

この様にして, $f^\#$ は X 上の $\mathfrak{M}$-valued half-density $\widetilde{f^\#}$ ($\widetilde{f^\#}|\pi^{-1}(U) = \tilde{f}\cdot|X_1\wedge\cdots\wedge X_n|^{\frac{1}{2}}$) に lift される。すなわち

$$C^\infty(|\wedge|^{\frac{1}{2}}M) \cong C^\infty_{\mathfrak{M}}(|\wedge|^{\frac{1}{2}}\mathfrak{M}) = \left\{\begin{array}{l}X\text{ 上の, }\mathfrak{M}\text{ 方向に constant な}\\ \mathfrak{M}\text{-valued half-densities}\end{array}\right\}$$

次に, polarizations に associate した pairing を定義しよう。

$\mathfrak{M}, \mathfrak{M}'$ は X 上の polarizations で, 各点 $x\in X$ に於いて $T_x(X)=\mathfrak{M}_x\oplus\mathfrak{M}'_x$ を満たすものと仮定する。

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\pi'"] & \\ M & & M' \end{tikzcd}$$

このとき, $\langle\ ,\ \rangle$ を次の様にして形式的に定義する:

$$
\begin{array}{ccccc}
C^\infty(|\wedge|^{\frac{1}{2}}M) & \times & C^\infty(|\wedge|^{\frac{1}{2}}M') & \longrightarrow & \mathbb{C} \\
\rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
f^\# = f|dq|^{\frac{1}{2}} & & g^\# = g|dq'|^{\frac{1}{2}} & \longmapsto & \langle f^\#, g^\# \rangle \\
\Big\downarrow & & \Big\downarrow & & \\
\tilde{f}\,|X_1\wedge\cdots\wedge X_n|^{\frac{1}{2}} & & \tilde{g}\,|Y_1\wedge\cdots\wedge Y_n|^{\frac{1}{2}} & &
\end{array}
$$

$$\langle f^\#, g^\# \rangle := \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \int_X \tilde{f}(x)\overline{\tilde{g}(x)} \cdot \left| \det\left(\omega(X_i, Y_j)\right)\right|^{\frac{1}{2}} \cdot \omega^n$$

ここで右辺の積分の収束性や，発散する場合の意味づけ(regularization)などが問題になるが，それらについての一般的な結果は，今の所まだほとんど何も得られていない。具体的な応用例について個別に check している段階である。

この pairing を Fourier 変換の拡張とみなす事にしよう。実際これを Fourier 変換と呼ぶ根拠は次の例による。

<u>例</u>. $\begin{cases} X = \mathbb{R}^{2n} = \{(x_1, \cdots, x_n, \xi_1, \cdots, \xi_n)\} \\ \theta := \sum_{j=1}^{n} \xi_j dx_j, \quad \omega := d\theta \end{cases}$ とする。

$$\mathfrak{m} := \left\{\frac{\partial}{\partial \xi_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial \xi_n}\right\}_{\mathbb{R}}$$

$$\mathfrak{m}' := \left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}_{\mathbb{R}}$$

とおくと，$\mathfrak{m}$，$\mathfrak{m}'$ は polarizations であり，M，M' を次の様にとる事が出来る。

$$
\begin{array}{ccc}
X = \mathbb{R}^{2n} & \longrightarrow & M' = \mathbb{R}^n \\
\Big\downarrow \quad \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
 (x,\xi) & \longmapsto & (\xi) \\
M = \mathbb{R}^n \quad \Big\downarrow & & \\
\rotatebox{90}{$\in$} \quad (x) & &
\end{array}
$$

$$M = \mathbb{R}^n = \{(x)\}, \quad M' = \mathbb{R}^n = \{(\xi)\}$$

そして，X 上の line bundle $\mathcal{L} = X \times \mathbb{C}$ の connection は，

$X = \sum_{i=1}^{n}\left(a_i \frac{\partial}{\partial x_i} + b_i \frac{\partial}{\partial \xi_i}\right)$ のとき

$$(\nabla_X \varphi)(x,\xi) = (X\varphi)(x,\xi) - i\sum_{j=1}^{n} a_j \xi_j \cdot \varphi(x,\xi)$$

であるから，

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(|\wedge|^{\frac12}M) & \cong & C^\infty_{\mathcal{M}}(|\wedge|^{\frac12}\mathcal{M}) \\ \Psi & & \Psi \\ f^\# = f\,|dx|^{\frac12} & \longmapsto & f(x)\left|\frac{\partial}{\partial\xi_1}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial}{\partial\xi_n}\right|^{\frac12} \\ C^\infty(|\wedge|^{\frac12}M') & \cong & C^\infty_{\mathcal{M}'}(|\wedge|^{\frac12}\mathcal{M}') \\ \Psi & & \Psi \\ g^\# = g\,|d\xi|^{\frac12} & \longmapsto & g(\xi)e^{ix\xi}\left|\frac{\partial}{\partial x_1}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial}{\partial x_n}\right|^{\frac12} \end{array}$$

従って，

$$\langle f^\#, g^\# \rangle = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^{2n}} f(x)\,\overline{g(\xi)e^{ix\cdot\xi}}\,dx\,d\xi$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n_\xi}\left[\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n_x} f(x)e^{-ix\xi}dx\right]\overline{g(\xi)}\,d\xi$$

そこで $\mathcal{F}: C_0^\infty(|\wedge|^{\frac12}M) \longrightarrow C^\infty(|\wedge|^{\frac12}M')$ を，

$$\langle \mathcal{F}f^\#, g^\# \rangle_{M'} = \langle f^\#, g^\# \rangle_{\mathcal{M},\mathcal{M}'} \quad \text{for } {}^\forall g^\# \in C^\infty(|\wedge|^{\frac12}M')$$

で定義すれば，

$$(\mathcal{F}f^\#)(\xi) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix\xi}dx \cdot |d\xi_1\wedge\cdots\wedge d\xi_n|^{\frac12}$$

となり，普通の Fourier 変換と一致する。

この pairing は次の問題に応用されつつある：

i) Lie 群の unitary 表現の intertwining 作用素の構成

ii) geometric quantization .

これらの問題に応用する場合には，pairing を transversal な polarizations の場合のみに限定していては不十分だし，また

表現論に応用する場合には real polarization だけでなく，complex polarizations の pairing も考える必要がある。それらの場合の pairing については，[1][4] を参照されたい。

§2. 自由粒子の Schrödinger 方程式

1) $\mathbb{R}^n$ 上の自由粒子の Schrödinger 方程式 $\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{1}{2}\Delta=0$ の基本解は，よく知られているように

$$K(t;x,y)=\frac{1}{(2\pi i t)^{\frac{n}{2}}}\,e^{\frac{i}{2t}(x-y)^2}$$

であるが，この基本解は Hamiltonian $H=\frac{1}{2}\|\xi\|^2$ を使って以下に述べる様に幾何学的な方法で導く事が出来る。

(この方法は Guillemin-Sternberg [3] による.)

H の定める geodesic flow $\{\varphi_t\}$ は，$\varphi_t(x,\xi)=(x+t\xi,\xi)$ であり，$F(t;x,\xi):=-\frac{t}{2}\|\xi\|^2$ は，φ_t の generating fn である： i.e.， $(\varphi_t^{-1})^*\theta-\theta=dF$.

$$\begin{array}{rccc} \pi: & X=\mathbb{R}^{2n} & \longrightarrow & M=\mathbb{R}^n \\ & \cup\!\!\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\!\!\shortmid \\ & (x,\xi) & \longmapsto & (x) \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} X=\mathbb{R}^{2n} \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\pi_t=\pi\circ\varphi_t^{-1}"] & \\ M=\mathbb{R}^n & M_t=\mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

として，

$$\begin{cases} \mathfrak{m}_0=\operatorname{Ker}\pi_*=\left\{\frac{\partial}{\partial\xi_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial\xi_n}\right\}_{\mathbb{R}} \\ \mathfrak{m}_t:=\varphi_{t*}\mathfrak{m}_0=\left\{\frac{\partial}{\partial\xi_1}+t\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial\xi_n}+t\frac{\partial}{\partial x_n}\right\}_{\mathbb{R}} \end{cases}$$

とおく。このとき，まず M 上の half-density $f^\#$ は，φ_t によって次の様に変換される：

$$
\begin{array}{ccc}
C^\infty(|\Lambda|^{\frac{1}{2}}M) & \cong & C^\infty_{\mathfrak{M}_0}(|\Lambda|^{\frac{1}{2}}\mathfrak{M}_0) \\
\rotatebox{90}{$\in$} & & \\
f^{\#} = f(x)|dx|^{\frac{1}{2}} & \longmapsto & \tilde{f}(x,\xi)\left|\frac{\partial}{\partial \xi_1}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial}{\partial \xi_n}\right|^{\frac{1}{2}} \quad (\tilde{f}(x,\xi) = f(x)) \\
 & & \Big\downarrow \\
 & & e^{\frac{i}{2}t\|\xi\|^2}\tilde{f}(x-t\xi,\xi)\left|\left(t\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial \xi_1}\right)\wedge\cdots\wedge\left(t\frac{\partial}{\partial x_n}+\frac{\partial}{\partial \xi_n}\right)\right|^{\frac{1}{2}} \in C^\infty_{\mathfrak{M}_t}(|\Lambda|^{\frac{1}{2}}\mathfrak{M}_t) \\
 & & \Big\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \wr\| \\
 & & \Phi_t f^{\#} \qquad\qquad \in C^\infty(|\Lambda|^{\frac{1}{2}}M_t)
\end{array}
$$

従って，$\forall g^{\#} \in C^\infty(|\Lambda|^{\frac{1}{2}}M)$ に対して

$$
\begin{aligned}
&\langle g^{\#}, \Phi_t f^{\#}\rangle_{\mathfrak{M}_0,\mathfrak{M}_t} \\
&= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^{2n}} g(x)\,\overline{e^{\frac{i}{2}t\xi^2}\tilde{f}(x-t\xi,\xi)}\sqrt{\left|\det\left(\omega\left(\frac{\partial}{\partial\xi_i}, t\frac{\partial}{\partial x_j}+\frac{\partial}{\partial\xi_j}\right)\right)\right|}\,dx\,d\xi \\
&= \left(\frac{1}{2\pi|t|}\right)^{\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n_x} g(x)\,\overline{\left(\int_{\mathbb{R}^n_y} e^{\frac{i(x-y)^2}{2t}} f(y)\,dy\right)}\,dx
\end{aligned}
$$

そこで，$U_t' : C_0^\infty(|\Lambda|^{\frac{1}{2}}M) \longrightarrow C^\infty(|\Lambda|^{\frac{1}{2}}M)$ を

$$
\langle g^{\#}, U_t' f^{\#}\rangle_M = \langle g^{\#}, \Phi_t f^{\#}\rangle_{\mathfrak{M}_0,\mathfrak{M}_t} \quad \text{for } \forall g^{\#} \in C_0^\infty(|\Lambda|^{\frac{1}{2}}M)
$$

で定義すれば，

$$
(U_t' f^{\#})(x) = \left(\frac{1}{2\pi|t|}\right)^{\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i(x-y)^2}{2t}} f(y)\,dy \cdot |dx_1\wedge\cdots\wedge dx^n|^{\frac{1}{2}}
$$

となる。この作用素の phase factor を補正して

$$
(U_t f^{\#})(x) := \left(\frac{1}{2\pi i t}\right)^{\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i(x-y)^2}{2t}} f(y)\,dy \cdot |dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n|^{\frac{1}{2}}
$$

とおくと，U_t は $\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2}\Delta = 0$ の基本解である。

geodesic spray とか geodesic flow というのは，古典力学的な objects であるが，それに polarization を付加すれば Schrödinger 方程式の基本解が得られるのである。そこで，

polarizations の pairing を使って，一般の Riemann 多様体における energy 函数の量子化を考えよう。

2)　　(M, g) ： Riemann 多様体

$$H(x,\xi) = \frac{1}{2} g_x(\xi,\xi) \quad : \quad \text{energy 函数}$$

として，geodesic flow を $\{\varphi_t\}$ とする。

$$\begin{cases} \mathcal{M}_0 := \operatorname{Ker} \pi_* \\ \mathcal{M}_t := \varphi_{t*}\mathcal{M}_0 \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd} & X = T^*M \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\pi_t = \pi\circ\varphi_t^{-1}"] & \\ M & & M_t = M \end{tikzcd}$$

とおいて，1) でやったのと同じ様に

$$\begin{array}{ccccccc} C^\infty(|\Lambda|^{\frac{1}{2}}M) & \cong & C^\infty_{\mathcal{M}_0}(|\Lambda|^{\frac{1}{2}}\mathcal{M}_0) & \longrightarrow & C^\infty_{\mathcal{M}_t}(|\Lambda|^{\frac{1}{2}}\mathcal{M}_t) & \cong & C^\infty(|\Lambda|^{\frac{1}{2}}M_t) \\ \Psi & & \Psi & & \Psi & & \Psi \\ f^\# & \longmapsto & \widetilde{f^\#} & \longmapsto & \Phi_t\widetilde{f^\#} & \longmapsto & \Phi_t f^\# \end{array}$$

を作り，$U_t' : C_0^\infty(|\Lambda|^{\frac{1}{2}}M) \longrightarrow C^\infty(|\Lambda|^{\frac{1}{2}}M)$ を

$$\langle g^\#, U_t' f^\# \rangle_M = \langle g^\#, \Phi_t f^\# \rangle_{\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_t} \quad \text{for } \forall g^\# \in C_0^\infty(|\Lambda|^{\frac{1}{2}}M)$$

で定める。そして U_t' を normalize して U_t を作り（i.e.,? $\lim_{t\to 0}(U_t f)(x) = f(x)$），$Pf := \frac{1}{i}\left[\frac{d}{dt} U_t f\right]_{t=0}$ とおく。上式で # を省いたのは，M 上の Riemann 体積要素を使って $C^\infty(|\Lambda|^{\frac{1}{2}}M)$ と $C^\infty(M)$ を同一視したからである。このとき，次の事が問題になる：

i)　P の具体的な形は？　また，P はどの位，$\triangle$ に近いか？

ii)　U_t は $\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t} - P = 0$ の基本解になるか？

この方法で作った $\{U_t\}$ が或る作用素の基本解になるかということ、すなわち propagation property $U_t \circ U_s = U_{t+s}$ を持つかどうかという事は，確かに Euclidean metric の場合にはうまく行ったが，一般の Riemann 多様体では望みが薄い。Elhadad [2] が，$M = S^n$ の場合に類似の方法（しかし，ここで formulate したのとは少し異なる方法）で基本解の構成を試みているが，彼の結果によると

i) $P = \frac{1}{2}(-\Delta + \frac{R}{6})$ $\qquad R = n(n-1)$

ii) U_t が $\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t} - P = 0$ の基本解になる $\Leftrightarrow$ $n = 1, 3$

である。

U_t が propagation property を持たない時に，U_t を modify して基本解を得るには，時間分割 & iteration を行なって

$$\tilde{U}_t := \lim_{k\to\infty} [\underbrace{U_{\frac{t}{k}} \circ \cdots \circ U_{\frac{t}{k}}}_{k \text{個}}]$$

を作れば良いが，これはまさに Feynmann の経路積分である。しかし，ここでは Feynmann 積分に立ち入る事を避けて，Riemann 計量 g が非常に強い対称性を持つ場合を考察しよう。

3) $\quad M = G$: 連結 compact Lie 群

$\mathfrak{g}$: G の Lie 環

Q : $\mathfrak{g}$ 上の $Ad(G)$-不変な正定値双一次形式

とおくと，Q は G 上に，両側 G－不変な Riemann 計量 g を定める。この Q から決まる energy 函数を使って，2) の方法で量子化を行なうと，U_t として次の作用素が得られる：

$$K(t,X) := (-1)^{|W|+m}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{l}{2}}\left(\frac{1}{it}\right)^{\frac{n}{2}}\prod_{\alpha\in\Delta_+}\frac{1}{\langle\rho,\alpha\rangle}\cdot j(X)^{\frac{1}{2}}e^{\frac{i}{2t}Q(X,X)}$$

$$(U_t f)(x) := \int_{\mathfrak{g}} K(t,X)f(x\exp X)\,dX \qquad \text{for } {}^{\forall}f\in C^\infty(G)$$

但し，ここで

$n = \dim G$ ， $l = \operatorname{rank} G$ ， $m = \frac{n-l}{2}$

$|W|$ ： Weyl 群の位数

$\Delta_+ = \{$正の roots$\}$ ， $\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta_+}\alpha$

$j(X) = \det J_X$ ， $J_X = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)!}(\operatorname{ad}X)^k \in \operatorname{End}\mathfrak{g}$.

上の $U_t f$ の定義式で右辺の積分は次の様にして意味づけを行なう。Q は $\mathfrak{g}$ 上の正定値 2 次形式だから，z が負の実数の時には

$$I(z) := \int_{\mathfrak{g}} e^{zQ(X,X)}j(X)^{\frac{1}{2}}f(x\exp X)\,dX$$

は収束する。すなわち（$x\in G$ をとめた時）I は $\mathbb{R}_-$ 上の C^ω-函数であり，この函数は $\mathbb{C}-\mathbb{R}_+\cup\{0\}$ 上の正則函数に解析接続出来る。この様にして，$I(\frac{i}{2t})$ が定義される。

さて，上の様に U_t を定義すると，U_t は次の関係式を満たす事が証明出来る：

$$\begin{cases} \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}U_t = \frac{1}{2}(-\Delta+\|\rho\|^2)U_t \\ \lim_{t\to 0}(U_t f)(x) = f(x) \end{cases}$$

すなわち，U_t は $\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2}(-\Delta + \|\rho\|^2) = 0$
の基本解である。

4） M が compact 群の等質空間の場合：

G ： 連結 compact Lie 群

H ： G の closed 部分群

として， $M = G/H$ を考える。

Q ： $\mathfrak{g}$ 上の $Ad(G)$-不変な正定値双一次形式

とすると，Q は G 上及び M 上の Riemann 計量を定める。
M 上の函数は，次の様にして，G 上の函数とみなす事が出来る。

$$C^\infty(M) = \{ f \in C^\infty(G) ; f(xh) = f(x) \quad \forall x \in G, \forall h \in H \}$$
$$\hookrightarrow C^\infty(G)$$

G について $\{U_t\}$ を作ると，U_t は G の元による左右の translations L_g, R_g （$g \in G$） と可換であるから

$$\mathring{U}_t : C^\infty(G/H) \longrightarrow C^\infty(G/H)$$

を induce する。そして，G/H 上の Laplacian Δ_M は

$$\Delta_M = R_*(\Omega_{(G,Q)} - \Omega_{(H,Q)})$$

（…… R_* は right-translation の微分，
Ω は Q に関する Casimir 作用素を表わす）

$$= R_*(\Omega_{(G,Q)}) \mid C^\infty(G/H)$$

$$= \Delta_G \mid C^\infty(G/H)$$

であるから，3）の結果を使って，$\forall f \in C^\infty(G/H)$ に対して

$$\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}\mathring{U}_t f = \frac{1}{2}(-\Delta_M + \|\rho\|^2)\mathring{U}_t f$$

が成り立つ。更に

$$\lim_{t\to 0}(\mathring{U}_t f)(\bar{x}) = f(\bar{x}) \quad \text{for } \forall \bar{x} = xH \in G/H$$

は，U_t と $\mathring{U}_t$ の関係から trivial であり，$\mathring{U}_t$ は

$$\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2}(-\Delta_M + \|\rho\|^2) = 0$$

の基本解である。尚ここで，$\frac{1}{2}\|\rho\|^2$ のズレを消去するには，$\mathring{U}_t$ の代りに，$\tilde{U}_t := e^{-\frac{i}{2}t\|\rho\|^2}\mathring{U}_t$ とおけば良い。

この様に，等質空間 $M = G/H$ の場合には，一旦，G に lift してから量子化し，それを M 上に落とせば，基本解が得られる。

5） 4）は等質空間の場合の議論であった。内容は 4）と全く同じことなのであるが，見る立場を変えて，先に Riemann 多様体 (M, g) が与えられたとする。このとき，4）の結果によって，次の主張が成立する。

≪ g がキレイな Riemann 計量ならば，Δ の基本解の構成がうまく行く。≫

$\Updownarrow$

対称性が強い $\Longleftrightarrow$ isometry が沢山ある

もっと正確に云うと，(M, g) が次の条件を満たすと仮定する：

（仮定1） M は compact

（仮定2） Mの等長変換群の単位元を含む連結成分 $G=I_0(M)$ には Lie 群の構造が入って，Gは Mと推移的。

（仮定3） Mの一点 p_0 における isotropy 部分群をHとおくと，Hの $T_{p_0}(M)$ 上の isotropy 表現がキヤク。

（仮定1，2）より，Mは compact Lie 群 G の等質空間 $M=G/H$ であり，（仮定3）より，Mの Riemann 計量 g は，$\mathfrak{g}$ 上の Ad(G)-不変な正定値双一次形式Qに lift 出来る。そこで，この場合は 4) と全く同じ case になり，$\mathring{U}_t$ は
$\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{1}{2}(-\Delta_M+\|\rho\|^2)=0$ の基本解である。

すなわち，我々の方法では

≪ M上で直接量子化の操作を行なうのではなく，一旦 $I_0(M)$ に上げてから量子化すれば，M上の Schrödinger 方程式の基本解を得ることが出来る ≫

という仕掛けになっている。

References

[1] Blattner : The meta-linear geometry of non-real polarizations (Lecture Notes in Math. 570 (1977) p.11−45)

[2] Elhadad : Quantification du flot géodésique de la

sphère S^n (C.R. 285 (1977) p. 961–964)

[3] Guillemin-Sternberg : Geometric Asymptotics (A.M.S. (1977))

[4] Wakimoto : Pairing of half-densities associated to complex polarizations (in preparation)