数理解析研究所講究録
第368巻 1979年 84-98

ある種の単純Lie群上の1次元のK-typeをもつ球関数とPaley-Wiener型定理

佐賀大 理工 牟田洋一

Gを有限の中心をもつ実半単純Lie群，Kをその極大コンパクト部分群とする．今Kの1次元unitary表現τを固定する．G上の関数fで条件

$$f(kxk') = \tau(k)f(x)\tau(k') \qquad x\in G,\ k,k'\in K$$

を満すものをτ-sphericalと呼ぶ．G上のcompact supportをもつC^∞関数の全体$\mathcal{D}_\tau(G)$はconvolutionに関して可換なalgebraをなす．τがtrivialのとき，R. Gangolli [2] は$\mathcal{D}_\tau(G)$の元のFourier変換の特徴づけを得た．本稿における我々の目的は，Gが単純線型群のとき，任意の1次元表現τに対し，$\mathcal{D}_\tau(G)$の元のFourier変換を特徴づけることである．

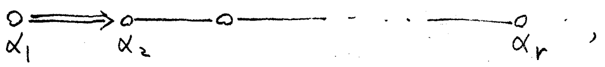
以下Gは単純線型群とする．もしKが半単純なら$\tau=$trivialとなって問題はGangolli [2] の場合に帰着する．従ってKは半単純でないとしてよいが，このようなGは

$$SO_0(n+2,2)\ (n\geq 1),\quad Sp(r,\mathbb{R}),\quad SO^*(2r),\quad SU(n+r,r)\quad (r\geq 1)$$

のいずれかである．このうち $SO_0(n+2,2)$，$Sp(r,\mathbb{R})$，$SO^*(4r)$ $(n\geq 1, r\geq 1)$ を第1種の群，$SO^*(4r+2)$ と $SU(1,1)$ 以外の $SU(n+r,r)$ $(n\geq 0, r\geq 1)$ を第2種の群と呼ぼう．r は各々の real rank である．

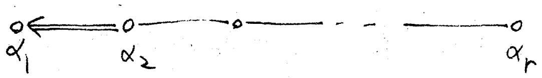
$G=KAN$ を一つの岩沢分解，$\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \mathfrak{a}, \mathfrak{n}$ をそれぞれの Lie 環とする．$\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{g}$ の Cartan subalgebra $\mathfrak{h}$ まで拡大し，$\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}+i(\mathfrak{h}\cap\mathfrak{k})$ の duals に compatible な order を一つとる．この order に関する $(\mathfrak{g}_c, \mathfrak{h}_c)$ の正ルート全体を P とし，$P_+ = \{\beta\in P : \tilde{\beta}\equiv\beta|\mathfrak{a}\neq 0\}$，$\Delta^+=\{\tilde{\beta} : \beta\in P_+\}$ とおく．$\mathfrak{a}$ の dual $\mathfrak{a}^*$ 上の Killing form から定義される内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ をその複素化 $\mathfrak{a}^*_c$ まで延長した bilinear form を同じ記号で表わす．

Δ^+ の単純ルート系 $\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\}$ を root diagram が第1種群に対しては



，

第2種群に対しては



となるように番号づけておく．このとき

$$e_1=\begin{cases}\alpha_1\\ \alpha_1\end{cases},\quad e_2=\begin{cases}\alpha_1+2\alpha_2\\ \alpha_1+\alpha_2\end{cases},\ \cdots,\ e_r=\begin{cases}\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+2\alpha_r & (\text{第1種群})\\ \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r & (\text{第2種群})\end{cases}$$

は $\mathfrak{a}^*_c$ の同じ長さの直交基底をなす．$\mathfrak{a}^*_c$ の座標づけを

$$\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^{*} \ni \nu = \sum_{j=1}^{r} \nu_j e_j \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \vdots \\ \nu_r \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^r$$

により与えておく．Weyl 群 W は

$$\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \vdots \\ \nu_r \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \nu_{j_1} \\ \varepsilon_2 \nu_{j_2} \\ \vdots \\ \varepsilon_r \nu_{j_r} \end{pmatrix} \qquad \varepsilon_j = \pm 1, \ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_r$$

なる変換より成る．

岩沢分解 $G = KAN$ に伴う $x \in G$ の分解を $x = K(x) \exp H(x) \cdot n(x)$ $(K(x) \in K, \ H(x) \in \mathfrak{a}, \ n(x) \in N)$ と書く．$\mathfrak{a}$ の positive chamber を $\mathfrak{a}^+$，$A^+ = \exp \mathfrak{a}^+$ とおくと，$G = K \cdot Cl(A^+) K$ である．

§1. Elementary τ-spherical functions

$\nu \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^{*}$ に対し

$$\phi(\nu : x) = \int_K \tau(K(xk)) \overline{\tau(k)} \, e^{(i\nu - \rho)(H(xk))} dk$$

を G の elementary τ-spherical function と呼ぶ．これらは G 上の解析関数であるが更に次の基本的な性質をもつ．

(1−1)　$\phi(s\nu : \cdot) = \phi(\nu : \cdot)$　　$\forall s \in W, \ \nu \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^{*}$

(1−2)　$\phi = \phi(\nu : \cdot)$ は G の両側不変な微分作用素の同時固有関数である．特に Casimir 作用素 ω に対して

$$\omega \phi = (\tau(\omega_{\mathfrak{m}}) - \langle \rho, \rho \rangle - \langle \nu, \nu \rangle) \phi$$

を満す．ここに ω_{m} は $M=Z_K(A)$ の Casimir 作用素である．

$\phi=\phi(\nu:\cdot)$ は τ-spherical，$G=K\,Cl(A^+)K$ であるから，ϕ は A^+ への制限で決まる．A^+ 上の関数 Δ を

$$\Delta(h)=\prod_{\beta\in P_+}\left(e^{\beta(H)}-e^{-\beta(H)}\right)\qquad h=\exp H\in A^+$$

で定義し，ω の radial component を $\mathfrak{L}(\omega)$ と書くと (1−2) より

$$(1\text{-}2)'\qquad (\Delta^{1/2}\circ\mathfrak{L}(\omega)\circ\Delta^{-1/2})(\Delta^{1/2}\phi)=(\tau(\omega_{m})-\langle\rho,\rho\rangle-\langle\nu,\nu\rangle)(\Delta^{1/2}\phi)$$

が A^+ 上で成立つ．

$e_1,e_2,\cdots,e_r$ に dual な $\mathfrak{a}$ の基底を $H_1,H_2,\cdots,H_r$；各 $\beta\in P_+$ に対しルート基底 $X_{\pm\beta}\in\mathfrak{g}_{\pm\beta}$ を $\langle X_\beta,X_{-\beta}\rangle=1$ なるようにとる．$\mathfrak{g}$ の Cartan 分解を $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$，$\mathfrak{k}=\mathfrak{k}^0+[\mathfrak{k},\mathfrak{k}]$ として

$$X_{\pm\beta}=Y_{\pm\beta}+Z_{\pm\beta}\qquad Y_{\pm\beta}\in\mathfrak{k}^0_{\mathbb{C}},\quad Z_{\pm\beta}\in[\mathfrak{k},\mathfrak{k}]_{\mathbb{C}}+\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$$

とおくと

$$\begin{aligned}\Delta^{1/2}\circ\mathfrak{L}(\omega)\circ\Delta^{-1/2}&=\tau(\omega_{m})+\frac{1}{\|e_1\|^2}\sum_{j=1}^{r}H_j^2\\ (1\text{-}3)\qquad&+\frac{1}{2}\sum_{\beta\in P_+}\frac{\langle\tilde\beta,\tilde\beta\rangle}{(\mathrm{sh}\,\beta)^2}-\frac{1}{4}\sum_{\beta,\gamma}\langle\beta,\gamma\rangle(\coth\beta)(\coth\gamma)\\ &-4\sum_{\beta}\frac{1-\mathrm{ch}\,\beta}{(\mathrm{sh}\,\beta)^2}\tau(Y_\beta)\tau(Y_{-\beta})\end{aligned}$$

となる．$\sum_{j=1}^{r}m_j\alpha_j$ ($m_j\in\mathbb{Z}_+$) のなす semilattice を L，$\lambda=\sum m_j\alpha_j$ に対し，$m(\lambda)=\sum m_j$ とおく．$\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ を前述のように座標づけし

ておいて，$\mathfrak{a}^*_+ \equiv \{\nu \in \mathfrak{a}^* : 0 \leqq \nu_1 < \nu_2 < \cdots < \nu_r\}$，$(\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}})_+ \equiv \{\nu \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}} : \operatorname{Im}\nu \in Cl(\mathfrak{a}^*_+)\}$ とする．

各 $\lambda \in L$ に対して $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ 上の有理関数 $a_\lambda(\nu)$ を帰納的に

$a_0(\nu) \equiv 1$，$\lambda \neq 0$ に対し

$$\begin{aligned}(\langle\lambda,\lambda\rangle - 2i\langle\nu,\lambda\rangle)\, a_\lambda(\nu) &= 2\sum_{\beta\in P_+}\sum_{n\geq 1}(8\tau(\gamma_\beta)\tau(\gamma_{-\beta}) - \langle\tilde\beta,\tilde\beta\rangle)\, n\, a_{\lambda-2n\tilde\beta}(\nu) \\ &+ 2\sum_{\beta}\sum_{n\geq 1}\langle\rho,\tilde\beta\rangle a_{\lambda-2n\tilde\beta}(\nu) + \sum_{\beta,\gamma}\sum_{\substack{m,n\geq 0\\ m+n\geq 1}}\langle\tilde\beta,\tilde\gamma\rangle a_{\lambda-2m\tilde\beta-2n\tilde\gamma}(\nu) \\ &- 8\sum_{\beta}\sum_{n\geq 1}(2n-1)\tau(\gamma_\beta)\tau(\gamma_{-\beta})\, a_{\lambda-(2n-1)\tilde\beta}(\nu)\end{aligned} \tag{1-4}$$

によって定め，更に

$$\Phi(\nu : h) = e^{i\nu(H)}\sum_{\lambda\in L} a_\lambda(\nu)\, e^{-\lambda(H)} \quad (h = \exp H \in A^+) \tag{1-5}$$

とおく．${}'\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}} \equiv \{\nu \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}} : 2i\langle\nu,\lambda\rangle \neq \langle\lambda,\lambda\rangle \quad \forall\lambda \in L - \{0\}\}$．

(1-6) 各 $\nu \in {}'\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ に対し定数 $C(\nu)$，$d(\nu) > 0$ が存在し，

$$|a_\lambda(\nu)| \leqq C(\nu)\cdot m(\lambda)^{d(\nu)} \qquad \lambda \in L - \{0\}$$

が成立つ．更に $\nu \in (\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}})_+$ のとき，ν に無関係な定数 C，$d > 0$ が存在して

$$|a_\lambda(\nu)| \leqq C\cdot m(\lambda)^{d} \qquad \lambda \in L - \{0\}$$

が成立つ．

(1-6) $\Phi(\nu : h)$ は G 上の両側不変な微分作用素の同時固有関数で，ν に関し有理型である．更に $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ 上の有理型関数

として

$$\Delta(h)^{1/2}\phi(\nu : h) = \sum_{s\in W} C^{\tau}(s\nu)\Psi(s\nu : h) \qquad (h\in A^{+})$$

が成立つ．ここに $C^{\tau}(\nu)$ は

$$(1\text{-}7) \qquad C^{\tau}(\nu) = \int_{\bar{N}} \overline{\tau(K(\bar{n}))}\, e^{-(i\nu+\rho)(H(\bar{n}))}\, d\bar{n}$$

で与えられる有理型関数である．

§2. *Harish-Chandra's generalized C-function* $C^{\tau}(\nu)$.

R. Gangolli [2] において Harish-Chandra の C-関数 $\mathbf{c}(\nu)$ が重要な役を果したように我々にとって $C^{\tau}(\nu)$ の解析的性質を知ることは重要である．この § では我々の群について (1-7) の explicit form を計算してみよう．まず K は1次元の中心をもつから τ は整数 l で添数づけられる（$\tau = \tau_l$ と書く）．例えば $G = SO_0(n+2, 2)$ の場合

$$\tau_l\left(\begin{pmatrix} k' & & \\ & \cos\theta & \sin\theta \\ & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\right) = e^{il\theta} \qquad k' \in SO(n+2)$$

である．(1-7) を計算するため G. Schiffmann [6] の reduction theory を使う．$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r \in \Pi$ の定める Weyl reflections を $s_1, s_2, \cdots, s_r$ とする．W の元 s はこれらの有限個の積で表わされる．簡約表現における reflections の個数を s の長さと呼ん

で $l(s)$ と書く． $s\in W$ に対し $\overline{\mathfrak{n}}(s)=\sum_{\substack{\alpha>0\\ s\alpha<0}}\mathfrak{g}^{-\alpha}$ を Lie 環とする analytic subgroup を $\overline{N}(s)$，その Haar 測度 $d\bar{n}$ を

$$\int_{\overline{N}(s)} e^{-2\rho_s(H(\bar{n}))}d\bar{n}=1$$

なるように正規化しておく．

$$C^l(\nu:s)\equiv\int_{\overline{N}(s)}\overline{\tau(K(\bar{n}))}\,e^{-(i\nu+\rho_s)(H(\bar{n}))}d\bar{n}$$

とすれば次のことが知られている：

(2−1)　$s=s's''$，$l(s)=l(s')+l(s'')$ ならば

$$C^l(\nu:s)=C^l(s''\nu:s')C^l(\nu:s'') .$$

他方 Weyl 群 W の元 -1 について次のことがわかる：

(2−2)　$l(-1)=r^2$ であり

$$-1=\underbrace{\underbrace{s_r s_{r-1}\cdots s_1}\ \underbrace{s_r s_{r-1}\cdots s_1}\ \cdots\cdots\ \underbrace{s_r s_{r-1}\cdots s_1}}_{r}$$

が簡約表現の一つである．

$\overline{N}=\overline{N}(-1)$ であるから $C^l(\nu)$ を求めるためには各 s_j に対して $C^l(\nu:s_j)$ を計算し，(2−1)，(2−2) を適用すればよいことがわかる．本稿のはじめに与えた root diagram より $\overline{\mathfrak{n}}(s_j)=\mathfrak{g}^{-\alpha_j}+\mathfrak{g}^{-2\alpha_j}$ である．$\mathfrak{n}(s_j)=\mathfrak{g}^{\alpha_j}+\mathfrak{g}^{2\alpha_j}$ とおき，$\mathfrak{n}(s_j)$，$\overline{\mathfrak{n}}(s_j)$ で生成される半単純 Lie 環を $\mathfrak{g}(s_j)$ とおく．$N(s_j)$，$\overline{N}(s_j)$，$G(s_j)$ を対応する G の analytic subgroups とすれば，$G(s_j)$ は中心有限の rank 1

半単純Lie群，$G(s_j)=K(s_j)A(s_j)N(s_j)$ はその岩沢分解を与える，ただし，$K(s_j)=K\cap G(s_j)$，$A(s_j)=\exp(\mathbb{R}H_{\alpha_j})$ である．ところが $2\leq j\leq r$ のとき $K(s_j)$ は K の半単純部分群に含まれ，τ の $K(s_j)$ への制限は trivial．従って $j\geq 2$ のとき

$$C^{\ell}(\nu:s_j)=\frac{\Gamma(m_{\alpha_j})}{\Gamma\left(\frac{m_{\alpha_j}}{2}\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{\langle i\nu,\alpha_j\rangle}{\langle\alpha_j,\alpha_j\rangle}\right)}{\Gamma\left(\frac{\langle i\nu,\alpha_j\rangle}{\langle\alpha_j,\alpha_j\rangle}+\frac{m_{\alpha_j}}{2}\right)}.$$

（この計算は $m_{2\alpha_j}=0$ に注意して classical な $\mathbf{c}$-関数と同様に行えばよい）．残りの $C^{\ell}(\nu:s_1)$ の計算が本質的で，$X\in\mathfrak{g}^{-\alpha_1}$，$Y\in\mathfrak{g}^{-2\alpha_1}$ に対し $\bar{n}=\exp(X+Y)$ の分解 $G(s_1)=K(s_1)A(s_1)N(s_1)$ に関する $K(s_1)$ 成分 $K(\bar{n})$ および $A(s_1)$ 成分 $\exp H(\bar{n})$ を X,Y の関数として具体的に見つけるわけである．その結果才1種群に対しては

$$C^{\ell}(\nu:s_1)=\frac{\Gamma\left(\frac{\langle i\nu,\alpha_1\rangle}{\langle\alpha_1,\alpha_1\rangle}\right)\Gamma\left(\frac{\langle i\nu,\alpha_1\rangle}{\langle\alpha_1,\alpha_1\rangle}+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\langle i\nu,\alpha_1\rangle}{\langle\alpha_1,\alpha_1\rangle}+\frac{1}{2}+\frac{\ell}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\langle i\nu,\alpha_1\rangle}{\langle\alpha_1,\alpha_1\rangle}+\frac{1}{2}-\frac{\ell}{2}\right)}$$

才2種群に対しては

$$C^{\ell}(\nu:s_1)=\frac{\Gamma(m_1+1)}{\Gamma\left(\frac{m_1+1}{2}\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{\langle i\nu,\alpha_1\rangle}{\langle\alpha_1,\alpha_1\rangle}\right)}{\Gamma\left(\frac{\langle i\nu,\alpha_1\rangle}{\langle\alpha_1,\alpha_1\rangle}+\frac{m_1}{2}\right)}$$
$$\times\frac{\Gamma\left(\frac{\langle i\nu,\alpha_1\rangle}{2\langle\alpha_1,\alpha_1\rangle}+\frac{m_1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{\langle i\nu,\alpha_1\rangle}{2\langle\alpha_1,\alpha_1\rangle}+\frac{m_1}{4}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\langle i\nu,\alpha_1\rangle}{2\langle\alpha_1,\alpha_1\rangle}+\frac{m_1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{\ell}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\langle i\nu,\alpha_1\rangle}{2\langle\alpha_1,\alpha_1\rangle}+\frac{m_1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{\ell}{2}\right)}$$

となる．これらを合せて次の定理が得られる．

<u>定理1</u>　$C^{l}(\nu)$ は次の式で与えられる：

$$C^{l}(\nu)=\frac{\Gamma(2m'+1)^{r}\,\Gamma(m)^{r(r-1)}}{\Gamma\left(m'+\frac{1}{2}\right)^{r}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)^{r(r-1)}}\prod_{j=1}^{r}\frac{\Gamma(2i\nu_j)}{\Gamma(2i\nu_j+m')}\,\frac{\Gamma\left(i\nu_j+\frac{m'}{2}\right)\Gamma\left(i\nu_j+\frac{m'+1}{2}\right)}{\Gamma\left(i\nu_j+\frac{m'+1}{2}+\frac{l}{2}\right)\Gamma\left(i\nu_j+\frac{m'+1}{2}-\frac{l}{2}\right)}$$

$$\times\prod_{j<k}\frac{\Gamma(i\nu_j+i\nu_k)\,\Gamma(i\nu_k-i\nu_j)}{\Gamma\left(i\nu_j+i\nu_k+\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(i\nu_k-i\nu_j+\frac{m}{2}\right)}$$

ここで $m,\ m'$ は次の通りである

G	$SO_0(n+2,2)$	$Sp(r,\mathbb{R})$	$SO^*(4r)$	$SO^*(4r+2)$	$SU(n+r,r)$
m	n	1	4	4	2
m'	0	0	0	2	n

§3. *Fourier transform on* $\mathcal{D}_\tau(G)$.

$f\in\mathcal{D}_\tau(G)$ の Fourier 変換 $\hat{f}$ を

$$\hat{f}(\nu)=\int_G f(x)\,\phi(\nu:x^{-1})\,dx\qquad(\nu\in\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^{*})$$

によって define する．各 $R>0$ に対し $\mathcal{D}_\tau(R)$ 及び $H_W(R)$ を次のように define する．$\mathcal{D}_\tau(R)$ は半径 R の球に support をもつ $f\in\mathcal{D}_\tau(G)$ の全体とし，$H_W(R)$ は $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^{*}$ 上の W-不変な entire function F で exponential type $\leq R$ なるもの，即ち

$$\forall M\geq 0\ \exists C_M>0:\quad |F(\nu)|\leq C_M(1+\|\nu\|)^{-M}e^{R\|\mathrm{Im}\,\nu\|}\quad(\nu\in\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^{*})$$

を満すもの全体の集合とする．$H_W(R)$（$R>0$）の union を $H_W(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^{*})$ で表わす．すぐわかるように

$(3-1)\quad f \in \mathcal{D}_\tau(R) \Longrightarrow \hat{f} \in \mathcal{H}_W(R)$

であるが,問題はこの逆を証明することである. 今

$$\mu^l(\nu) = (C^l(\nu)C^l(-\nu))^{-1}$$

とおくと, μ^l は $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ 上の有理型関数である. 実際定理1より

$$\mu^l(\nu) = \begin{cases} X_l(\nu)\,Y(\nu) & (2 \mid m) \\ X_l(\nu)\,Z(\nu) & (2 \nmid m) \end{cases}$$

ここで

$$X_l(\nu) = \frac{4^{m'}\Gamma(m'+\frac{1}{2})^{2r}\Gamma(\frac{m}{2})^{2r(r-1)}}{\Gamma(2m'+1)^{2r}\Gamma(m)^{2r(r-1)}} \prod_{j=1}^{r}\left\{\nu_j \,\mathrm{th}\,\pi\left(\nu_j + \frac{i(l+m)}{2}\right)\prod_{p=1}^{m'}\left(\nu_j^2 + \left(\frac{|l|-m'-1}{2}+p\right)^2\right)\right\},$$

$$Y(\nu) = \prod_{j<k}\prod_{p=1}^{m/2}\left((\nu_j+\nu_k)^2 + \left(\frac{m}{2}-p\right)^2\right)\left((\nu_j-\nu_k)^2 + \left(\frac{m}{2}-p\right)^2\right),$$

$$Z(\nu) = \prod_{j<k}\left\{(\nu_j^2-\nu_k^2)\,\mathrm{th}\,\pi(\nu_j+\nu_k)\,\mathrm{th}\,\pi(\nu_j-\nu_k)\prod_{p=1}^{\frac{m-1}{2}}\left((\nu_j+\nu_k)^2+\left(\frac{m}{2}-p\right)^2\right)\left((\nu_j-\nu_k)^2+\left(\frac{m}{2}-p\right)^2\right)\right\}$$

である. $\mu^l(\nu)$ は ν_r の関数として

$$\frac{m'+l}{2} + ia \equiv \frac{1}{2} \pmod{\mathbb{Z}},\quad \left|\frac{|l|}{2} + ia\right| \geq \frac{m'}{2}$$

をみたす $a \in i\mathbb{R}$ に simple poles をもつ. これらの simple poles のうち 0 と $i(|l|-m')/2$ の間にあるもののなす集合を $\Pi_1 = \Gamma_1$ とし, $a \in \Pi_1$ に対し

$$\mu^l_a(\nu^{(a)}) = -2\pi i \cdot \mathrm{Res}[\mu^l(\nu) : \nu_r = a]$$

とおく. $\nu^{(a)}$ は $(\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_{r-1})$ を表わす. m の偶奇性に従い, $\mu^l_a(\nu^{(a)})$ は ν_{r-1} の関数として

$$\frac{l+m'}{2}+ib \equiv \frac{1}{2} \pmod{\mathbb{Z}},\ \left|\frac{|l|}{2}-|b|\right| \geqq \frac{m'}{2},\ |a\pm b| \geqq \frac{m}{2}$$

或いは $\dfrac{l+m'}{2}+ib \equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}},\ \left|\dfrac{|l|}{2}-|b|\right| \geqq \dfrac{m'}{2},\ |a\pm b| \geqq \dfrac{m}{2}$

を満す $b\in i\mathbb{R}$ に simple pole をもつ．これらのうち 0 と a の間にあるもの全体を Π_a とし，$\Gamma_2=\{(a,b): a\in\Pi_1,\ b\in\Pi_a\}$ とおく．$\beta=(a,b)\in\Gamma_2$ に対し

$$\mu_\beta^l(\nu^{(\beta)}) = -2\pi i\cdot Res[\mu_a^l(\nu^{(a)}) : \nu_{r-1}=b]$$

とおく．こうして $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_r$, Π_β, $\mu_\beta^l(\nu^{(\beta)})$ を定義する．便宜上 $\Gamma_0=\{0\}$, $\mu_0^l(\nu^{(0)})=\mu^l(\nu)$ および $\Gamma=\bigcup_{p=0}^{r}\Gamma_p$ とおく．各 $\beta=(a_1,a_2,\cdots,a_p)\in\Gamma_p$ に対し，$\beta'=(a_p,\cdots,a_2,a_1)$，$\mathbb{R}^{(\beta)}=\mathbb{R}^{r-p}$，$W$ の元で $\nu^{(\beta)}$ 空間へ作用するもののなす部分群を W_β と書く．

(3―2) 各 $\beta\in\Gamma$ に対し，$\mu_\beta^l(\nu^{(\beta)})$ は W_β-不変な有理型関数であり，$\mathbb{R}^{(\beta)}$ 上 正の値をとる．

(3―3) <u>Key lemma</u>　$F\in \mathcal{H}_W(R)$ に対し

$$f_1(x) \equiv \sum_{\beta\in\Gamma}\frac{1}{|W_\beta|}\int_{\mathbb{R}^{(\beta)}} F(\nu^{(\beta)}\beta')\phi(\nu^{(\beta)}\beta' : x)\mu_\beta^l(\nu^{(\beta)})\,d\nu^{(\beta)}$$

とおけば　$f_1\in\mathcal{D}_\tau(R)$.

この lemma は重要であるが，今は $r=1$ の場合しか完全な証明を与えることができない．F の急減少性から f_1 が G 上の τ-spherical C^∞ 関数であることはよいから，$h=\exp H$, $H\in\mathfrak{a}^+$ $\|H\|>R$ のとき $f_1(h)=0$ なることを示せばよい．(1―6) より

$$\frac{1}{|W|}\Delta(h)^{1/2}\int_{\mathfrak{a}^*}F(\nu)\phi(\nu:h)\mu^\ell(\nu)d\nu=\int_{\mathbb{R}}F(\nu)\Psi(\nu:h)\,C^\ell(-\nu)^{-1}d\nu\,.$$

であるが，$\Psi(\nu:h)$ は $Im\,\nu\geq 0$ で正則であるから，上式は

$$2\pi i\sum_{a\in\Gamma_1}F(a)\Psi(a:h)\underset{\nu=a}{Res}[C^\ell(-\nu)^{-1}]+\int_{\mathbb{R}}F(\nu+i\sigma)\Psi(\nu+i\sigma:h)\,C^\ell(-\nu-i\sigma)^{-1}d\nu$$

$$=-\sum_{a\in\Gamma_1}F(a)\,C^\ell(a)\Psi(a:h)\mu^\ell_a+\int_{\mathbb{R}}F(\nu+i\sigma)\Psi(\nu+i\sigma:h)\,C^\ell(-\nu-i\sigma)^{-1}d\nu$$

に等しい。ここで σ は十分大きな$^\forall$正数．よって (1−5), (1−6) より

$$\Delta(h)^{1/2}f_1(h)=\sum_{\lambda}e^{-\lambda(H)}\int_{\mathbb{R}}F(\nu+i\sigma)\,e^{(i\nu-\sigma)(H)}q_\lambda(\nu+i\sigma)\,C^\ell(-\nu-i\sigma)^{-1}d\nu$$

となるが，$\|H\|>R$ としたから 各 $\lambda\in L$ に対し $\int\mapsto 0$．これより $f_1(h)=0$．

以後 (3−3) を仮定して議論をすゝめる．τ-spherical functions は A への制限で完全に決るから，$\mathcal{D}_\tau(G)$ 上の線型汎関数は A 上の W-不変な超関数と考えることができる．key lemma より

(3−4) $\mathcal{D}_\tau(G)$ 上の線型汎関数

$$f\longmapsto Tf\equiv\sum_{\beta\in\Gamma}\frac{1}{|W_\beta|}\int_{\mathbb{R}^{(\beta)}}\hat{f}(\nu^{(\beta)}:\beta)\mu^\ell_\beta(\nu^{(\beta)})\,d\nu^{(\beta)}$$

は $supp(T)=\{1\}$ なる超関数である．

(3−3) での右辺を $\mathcal{F}(F:x)$ と書くことにする．今 $F_0\in\mathcal{H}_W(1)$ を $F_0(0)=1$ なるようにとると

$$Tf = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathcal{F}(\hat{f}(\cdot)F_0(\varepsilon\cdot) : 1) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_G f(x)\, g_\varepsilon(x)\, dx,$$

$$g_\varepsilon(x) = \mathcal{F}(F_0(\varepsilon\cdot) : x^{-1}).$$

(3-3) より g_ε は ε-球 に support をもつ. $T = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} g_\varepsilon$ であるから $\mathrm{supp}\, T = \{1\}$.

更に $\mu^2(\nu)$ の order を調べて

(3-5) T は positive measure である.

ことがわかる. よって

$$Tf = \gamma \cdot f(1) \qquad f \in \mathcal{D}_\tau(G)$$

なる $\gamma > 0$ が存在する. これより

(3-6) 各 $f \in \mathcal{D}_\tau(G)$ に対し

$$\gamma \cdot f(x) = \mathcal{F}(\hat{f} : x) \qquad (x \in G)$$

$$\gamma \cdot \|f\|^2_{L^2(G)} = \mathcal{F}(|\hat{f}|^2 : 1)$$

が成立つ. 更に Γ を Plancherel measure の support とすると
$\{\hat{f} : f \in \mathcal{D}_\tau(G)\}$ は $C_0(\Gamma) \equiv \{\psi \in C(\Gamma) : \psi(\infty) = 0\}$ で dense.

最後の主張は $\mathcal{D}_\tau(G)$ で生成される C^*-代数 $C^*_\tau(G)$ に可換代数の基本定理を適用して得られる.

<u>定理 2</u> 写像 $f \mapsto \hat{f}$ は $\mathcal{D}_\tau(G)$ を $H_W(\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}})$ の上へ線型同型に写す. 更に各 $R > 0$ に対し, $\mathcal{D}_\tau(R)$ は $H_W(R)$ に写される.

[証明] 任意の $F \in H_W(R)$ に対し, $\gamma \cdot f(x) \equiv \mathcal{F}(F : x)$ で

fを定義すると(3−3)より $f\in \mathcal{D}_\tau(R)$. $F' \equiv F-\hat{f}$ とおいて $F'\equiv 0$ を示せばよい. fの定義からまず

$$\mathcal{F}(F' : x) = 0 \qquad \forall x\in G .$$

これより

$$\mathcal{F}(F'\hat{g} : 1) = \int_G \mathcal{F}(F' : x) g(x)\, dx = 0 \qquad \forall g\in \mathcal{D}_\tau(G)$$

$\hat{g}$ は $C_0(\Gamma)$ の dense subset をなすから, (3−6)より F' は Γ 上 0. したがって解析性より $F'\equiv 0$ となる.

文　献

[1] O. Campoli, The complex Fourier transform for rank one semisimple Lie groups, Ph.D. Thesis, Rutgers Univ. 1977.

[2] R. Gangolli, On the Plancherel formula and the Paley-Wiener theorem for spherical functions on semisimple Lie groups, Ann. of Math. 93 (1971), 150−165.

[3] Harish-Chandra, Spherical functions on a semisimple Lie group I, II, Amer. J. Math. 80 (1958).

[4] ———, On the theory of Eisenstein integral, Lecture Notes in Math. vol 266, Springer 1972

[5] J. Rosenberg, A quick proof of Harish-Chandra's

Plancherel theorem for spherical functions on a semisimple Lie group, Proc. Amer. Math. Soc. 63 (1977), 143–149.

[6] G. Schiffmann, Integrales d'entrelacement et fonctions de Whittacker, Bull. Soc. Math. France 99 (1971), 3–72.

[7] G. Warner, Harmonic analysis on semisimple Lie groups Vol I, II Springer, 1972

[8] Y. Muta, On the spherical functions with one dimensional K-types and the Paley-Wiener type theorem on some simple Lie groups, in preparation