数理解析研究所講究録
第 368 巻 1979 年 160-175

The Plancerel formula for Sp(n, $\mathbb{R}$)

職業訓練大　佐野 茂

§§1 非退化連続主系列

§1-1 G を連結で中心有限, acceptable な実半単純 Lie 群とする。$\mathfrak{g}$ をその Lie 環, θ を $\mathfrak{g}$ 上の Cartan involution とする。$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$ を θ に対応する Cartan 分解, K を部分環 $\mathfrak{k}$ に対応する極大コンパクト群とする。今, P=MAN を Langlands 分解された cuspidal Parabolic 部分群とする。θー不変な Cartan 部分環 $\mathfrak{h}$ が存在して $\mathfrak{h}\cap\mathfrak{p}=\mathfrak{a}$ ($\mathfrak{a}$ = LA(A)) となる。H を $\mathfrak{h}$ に対応する Cartan 部分群とする, $B=H\cap K$ とおくと, B は M の コンパクト Cartan 部分群となる。ω を M の 2 乗可積分な既約ユニタリ表現, ν を $\mathfrak{a}$ 上の純虚数値をとる正則な線形形式とする。
$\omega\otimes\nu$ を自然に P の表現に拡張して, G の表現

$$\pi(\omega,\nu) = \operatorname*{Ind}_{P\uparrow G} \omega\otimes\nu$$

を定義する。既約ユニタリ表現となり, G の非退化連続主系列表現という。$\Theta(\omega,\nu)$ をその指標とする。$\Theta(\omega,\nu)$ は G 上局所可

積分関数で G' (G の正則な元全体) 上では実解析関数となる。この論文では群 $G_n \cong Sp(n,\mathbb{R})$ を取りあつかうが，まず Ⓗ(ω,ν) を G_n 上で明確に与える。次に各Cartan 部分群上の Radon 変換の性質と，Ⓗ(ω,ν) を構成する基本的単位となる関数を調べ，各単位ごとに Parseval 公式を用いる事により G_n 上の Plancherel公式を得る。

§1-2

$$H_n = \begin{pmatrix} 0_n & 1_n \\ -1_n & 0_n \end{pmatrix} \qquad I_n = \begin{pmatrix} 1_n & 0_n \\ 0_n & -1_n \end{pmatrix}$$

($1_n, 0_n$ は次数n の単位行列，零行列) とおく。群 $Sp(n,\mathbb{C})$, $Sp(n,\mathbb{R})$ は

$$Sp(n,\mathbb{C}) = \left\{ g \in GL(2n,\mathbb{C}) \ ; \ {}^t g H_n g = H_n \right\}$$

$$Sp(n,\mathbb{R}) = \left\{ g \in GL(2n,\mathbb{R}) \ ; \ {}^t g H_n g = H_n \right\}$$

と定義される。$Sp(n,\mathbb{R})$ は $Sp(n,\mathbb{C})$ の実形式である。ここでは $Sp(n,\mathbb{R})$ と同型な次の群を考える。

$$G_n = \left\{ g \in Sp(n,\mathbb{C}) \ ; \ g^* I_n g = I_n \right\} \qquad (g^* = {}^t\bar{g})$$

以下 $G = G_n$，$\mathfrak{g}$ を G の Lie 環とする。θ を $X = I_n X I_n$ $(X \in \mathfrak{g})$ で定義される $\mathfrak{g}$ 上の Cartan involution，$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{z}$ を対応する Cartan 分解とする。

k,ℓ,m を $k+2\ell+m=n$ を満足する負でない整数とする。次の θ 一不変な Cartan 部分群の集合 $\left\{ H^{k,\ell},\ 0 \leqslant k,\ell \quad k+2\ell \leqslant n \right\}$ は G の自己同型で互いに共役とならない極大系列となる。

$H^{k,\ell}=H_+^{k,\ell}H_-^{k,\ell}$, 部分群 $H_+^{k,\ell}$, $H_-^{k,\ell}$ は次の元全体からなる。

$H_+^{k,\ell}$; $h_+=\mathrm{diag}(e^{\sqrt{-1}\varphi_1}, e^{\sqrt{-1}\varphi_2}, \cdots, e^{\sqrt{-1}\varphi_k}; e^{\sqrt{-1}\theta_1}, e^{-\sqrt{-1}\theta_1}, e^{\sqrt{-1}\theta_2}, e^{-\sqrt{-1}\theta_2}, \cdots, e^{\sqrt{-1}\theta_\ell}, e^{-\sqrt{-1}\theta_\ell}; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_m$
$; e^{-\sqrt{-1}\varphi_1}, e^{-\sqrt{-1}\varphi_2}, \cdots, e^{-\sqrt{-1}\varphi_k}; e^{-\sqrt{-1}\theta_1}, e^{\sqrt{-1}\theta_1}, e^{-\sqrt{-1}\theta_2}, e^{\sqrt{-1}\theta_2}, \cdots, e^{-\sqrt{-1}\theta_\ell}, e^{\sqrt{-1}\theta_\ell}; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_m)$

(φ_p, $\theta_q \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_r = \pm 1$)

$H_-^{k,\ell}$;
$$h_-=\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
1_k &&&&& 0_k &&&& \\
& \mathrm{ch}\tau_1 1_2 &&&& & \mathrm{sh}\tau_1 J_2 &&& \\
&& \ddots &&& && \ddots && \\
&&& \mathrm{ch}\tau_\ell 1_2 && &&& \mathrm{sh}\tau_\ell J_2 & \\
&&&& \mathrm{ch}t_1 \ddots \mathrm{ch}t_m & &&&& \mathrm{sh}t_1 \ddots \mathrm{sh}t_m \\
\hline
0_k &&&&& 1_k &&&& \\
& \mathrm{sh}\tau_1 J_2 &&&& & \mathrm{ch}\tau_1 1_2 &&& \\
&& \ddots &&& && \ddots && \\
&&& \mathrm{sh}\tau_\ell J_2 && &&& \mathrm{ch}\tau_\ell 1_2 & \\
&&&& \mathrm{sh}t_1 \ddots \mathrm{sh}t_m & &&&& \mathrm{ch}t_1 \ddots \mathrm{ch}t_m
\end{array}\right)$$

但し, $J_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $1_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

(τ_q, $t_r \in \mathbb{R}$)

$h=h_+h_-\in H^{k,\ell}$ の固有値は $(\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n; \delta_1^{-1}, \delta_2^{-1}, \cdots, \delta_n^{-1})$

$$\begin{cases}\delta_p = e^{\sqrt{-1}\varphi_p} & (1\leqslant p\leqslant k)\\ \delta_{k+2q-1} = e^{z_q}, \quad \delta_{k+2q} = e^{\bar{z}_q} & (1\leqslant q\leqslant \ell) \qquad z_q = \tau_q+\sqrt{-1}\theta_q \\ \delta_{k+2\ell+r} = \varepsilon_r e^{t_r} & (1\leqslant r\leqslant m)\end{cases}$$

で与えられる。$\delta=(\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n)$ を h の座標にとる。そして

$$\Delta^{k,\ell}(h) = \prod_{1\leqslant p<q\leqslant n}\{(\delta_p+\delta_p^{-1})-(\delta_q+\delta_q^{-1})\}\prod_{1\leqslant p\leqslant n}(\delta_p-\delta_p^{-1})$$

$$\Delta_R^{k,\ell}(h) = \prod_{1\leqslant p\leqslant \ell}(1-e^{-2\tau_p})\prod_{1\leqslant p\leqslant m}(1-e^{-2t_p})\prod_{1\leqslant p<q\leqslant m}(1-\varepsilon_p\varepsilon_q e^{-t_p-t_q})(1-\varepsilon_p\varepsilon_q e^{-t_p+t_q})$$

$$\varepsilon_R(h) = \mathrm{sgn}\,\Delta_R^{k,\ell}(h)$$

とおく。 δ_j に対応する微分作用素を x_j とする。すなわち,

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial \Phi_p} = \dfrac{1}{\sqrt{-1}}\dfrac{\partial}{\partial \varphi_p}\\ \dfrac{\partial}{\partial z_q} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial \tau_q}+\dfrac{\partial}{\partial \Theta_q}\right), \quad \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_q} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial \tau_q}-\dfrac{\partial}{\partial \Theta_q}\right), \quad \dfrac{\partial}{\partial \Theta_q} = \dfrac{1}{\sqrt{-1}}\dfrac{\partial}{\partial \theta_q}\\ \dfrac{\partial}{\partial t_r}\end{cases}$$

である。多項式

$$L(y_1, y_2, \cdots, y_n) = \prod_{1 \leq p < q \leq n} (y_p + y_q)(y_p - y_q) \prod_{1 \leq p \leq n} y_p \quad .$$

において，$H^{k,\ell}$上の微分作用素を

$$L^{k,\ell}(X_1, X_2, \cdots, X_n) = \prod_{1 \leq p < q \leq n} (X_p + X_q)(X_p - X_q) \prod_{1 \leq p \leq n} X_p$$

で与える。又，$H^{k,\ell}$ の連結成分 $H_p^{k,\ell}$ $(0 \leq p \leq m)$ を

$$H_p^{k,\ell} = \left\{ h \in H^{k,\ell} ; \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots = \varepsilon_p = 1, \varepsilon_{p+1} = \varepsilon_{p+2} = \cdots = \varepsilon_m = -1 \right\}$$

とすると，Gの自己同型で互いに共役とならない極大系列となる。さらに

$$F_p^{k,\ell} = \left\{ h \in H_p^{k,\ell} ; \tau_r > 0 \ (1 \leq r \leq \ell), t_1 > t_2 > \cdots > t_p > 0, t_{p+1} > t_{p+2} > \cdots > t_m > 0 \right\}$$

とおく。

Notation　次の関数を定義する。

(1,1)　$\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_p$　負でない整数。$\delta_1 = e^{\sqrt{-1}\varphi_1}, \delta_2 = e^{\sqrt{-1}\varphi_2}, \cdots, \delta_p = e^{\sqrt{-1}\varphi_p}$ $(\varphi_j \in \mathbb{R})$

$\ell_1 \geq \ell_2 \geq \cdots \geq \ell_p \geq 0$　　$\nu_j = \pm 1$, $1 \leq j \leq p$

$$\xi_p(\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_p ; \nu_1 \ell_1, \nu_2 \ell_2, \cdots \nu_p \ell_p) = \det\left(\nu_i \delta_j^{\nu_i \ell_i}\right)_{1 \leq i, j \leq p}$$
$$= \left| \nu_1 \delta^{\nu_1 \ell_1}, \nu_2 \delta^{\nu_2 \ell_2}, \cdots, \nu_p \delta^{\nu_p \ell_p} \right|_{\delta = \delta_1, \delta_2, \cdots \delta_p}$$

$$^{+}\xi_p(\qquad) = \sum_{\nu_1, \cdots, \nu_p} \xi_p(\qquad)$$

(1,2)　$\ell_1 \geq \ell_2 \geq 0$, $\nu_1, \nu_2 = \pm 1$, $\delta_1 = e^{z}$, $\delta_2 = e^{\bar{z}}$

$$\eta_2(\delta_1, \delta_2 ; \nu_1 \ell_1, \nu_2 \ell_2) = \begin{vmatrix} -\delta_1^{-\ell_1} & -\nu_1\nu_2 \delta_1^{-\nu_1\nu_2\ell_2} \\ -\delta_2^{-\ell_1} & -\nu_1\nu_2 \delta_2^{-\nu_1\nu_2\ell_2} \end{vmatrix}$$

$$^{+}\eta_2(\qquad) = \sum_{\nu_1, \nu_2} \eta_2(\qquad)$$

(1,3)　$\ell_1 \geq \ell_2 \geq 0$, $\nu_1, \nu_2 = \pm 1$,　$\delta_1 = \varepsilon e^{t_1}$, $\delta_2 = \varepsilon e^{t_2}$

$$\zeta_2(\delta_1, \delta_2 ; \nu_1 \ell_1, \nu_2 \ell_2) = \begin{vmatrix} -\delta_1^{-\ell_1} & -\delta_1^{-\ell_2} \\ -\delta_2^{-\ell_1} & -\nu_1\nu_2(\delta_2^{-\ell_2} + \delta_2^{\ell_2}) + \delta_2^{\ell_2} \end{vmatrix}$$

$$^{+}\zeta_2(\qquad) = \sum_{\nu_1, \nu_2} \zeta_2(\qquad)$$

(1,4) $\ell_1 \geq \ell_2 \geq 0$, $\nu_1, \nu_2 = \pm 1$, $\delta_1 = \varepsilon e^{t_1}$, $\delta_2 = -\varepsilon e^{t_2}$

$$\chi(\delta_1, \delta_2; \nu_1\ell_1, \nu_2\ell_2) = \begin{vmatrix} -\delta_1^{-\ell_1} & -\delta_1^{-\ell_2} \\ -\delta_2^{-\ell_1} & -\delta_2^{-\ell_2} \end{vmatrix}$$

$$^{+}\chi(\quad) = \sum_{\nu_1, \nu_2} \chi(\quad)$$

$\ell_1 \geq 0$, $\nu_1 = \pm 1$, $\delta_1 = \varepsilon e^{t_1}$

$$\chi(\delta_1, \nu_1\ell_1) = -\delta_1^{-\ell_1}$$

$$^{+}\chi(\quad) = \sum_{\nu_1} \chi(\quad)$$

(2,1) $\lambda = \frac{m + \sqrt{-1}\xi}{2}$, $\bar{\lambda} = \frac{m - \sqrt{-1}\xi}{2}$, $\delta_1 = e^{z}$, $\delta_2 = e^{\bar{z}}$ $(z = \tau + \sqrt{-1}\theta \quad \tau.\theta \in \mathbb{R})$

$m \geq 0$ 整数, $\xi \in \mathbb{R}$

$$H_2(\delta_1, \delta_2; \lambda, \bar{\lambda}) = (e^{\sqrt{-1}m\theta} - e^{-\sqrt{-1}m\theta})(e^{\sqrt{-1}\xi\tau} + e^{-\sqrt{-1}\xi\tau})$$

(2,2) $\delta_1 = \varepsilon e^{t_1}$, $\delta_2 = \varepsilon e^{t_2}$

$$Z_2(\delta_1, \delta_2; \lambda, \bar{\lambda}) = 2 \begin{vmatrix} e^{\bar{\lambda}t_1} & e^{\bar{\lambda}t_2} + e^{-\bar{\lambda}t_2} \\ -e^{-\lambda t_1} & -e^{\lambda t_2} + e^{-\lambda t_2} \end{vmatrix} \varepsilon^{\lambda + \bar{\lambda}}$$

(3,1) $\lambda_j = (\epsilon_j, \rho_j)$ $\epsilon_j = 0, 1$, $\rho_j \in \mathbb{R}$ $1 \leq j \leq p$

$\delta_j = \varepsilon_j e^{t_j}$ $(t_j \in \mathbb{R})$

$$\Xi_p(\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_p; \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p) = \sum_{\sigma \in S_p} \prod_{j=1}^{p} (e^{\sqrt{-1}\rho_{\sigma(j)}t_j} + e^{-\sqrt{-1}\rho_{\sigma(j)}t_j}) \varepsilon_j^{\epsilon_{\sigma(j)}}$$

(S_p, p 次対称群)

k, ℓ, m $(k+2\ell+m=n)$ 固定する。$k'+2\ell' \leq k+2\ell$, $k' \leq k$, $0 \leq j \leq m'$ $(k'+2\ell'+m'=n)$ をみたす k', ℓ', m', j をとってくる。さらに $0 \leq p \leq \ell'$ を満足する p をとる。整数を成分とする順序付けられた集合を次の様に定義する。

$A = (a_1, a_2, \cdots, a_{k'})$ $a_1 < a_2 < \cdots < a_{k'}$

$B = (b_1, b_2, \cdots, b_p)$

$C = (c_1, c_2, \cdots, c_p)$ $b_i < c_i$ $(1 \leq i \leq p)$

$J = [j'/2]$, $I = [(k - k' - 2p - j')/2]$ $\mathrm{Max}(j-m, 0) \leq j' \leq \mathrm{Min}(j, m'-m)$

$$\begin{cases} P=(p_1, p_2, \cdots, p_{J+I}) \\ Q=(q_1, q_2, \cdots, q_{J+I}) \end{cases} \qquad p_i<q_i$$

$r<s$　r は $2J=j'-1$ のとき整数を，$2J=j'$ のときは空集合 $\emptyset$ を表わすとする。s は $2I=k-k'-2p-j'-1$ のとき整数を，$2I=k-k'-2p-j'$ のときは空集合 $\emptyset$ を表わす。

$\bar{A}$ は集合 $\{a_1, a_2, \cdots, a_{k'}\}$ を表わすとする。

$$\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}\cup\bar{P}\cup\bar{Q}\cup\{r,s\}=\{1,2,\cdots,k\}$$

整数を成分とする順序付けられた集合 D,F を次の様に定義する。

$$\begin{cases} D=(d_1, d_2, \cdots, d_q) \\ F=(f_1, f_2, \cdots, f_{\ell-q}) \end{cases}$$

$$\bar{D}\cup\bar{F}=\{k+1, k+3, \cdots, K+2\ell-1\}$$

まとめて

$\mathfrak{U}=(A,B,C,P,Q,r,s,D,F)$

$\mathrm{sgn}\,\mathfrak{U}=\mathrm{sgn}(A,B\cdot C,P\cdot Q,r,s)$　但し，$B\cdot C=(b_1, c_1, b_2, c_2, \cdots, b_p, c_p)$

とおく。

さらに $q=\ell'-p$ とする。

$$\mathcal{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p) \qquad \alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_p$$

$$\mathcal{B}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_q) \qquad \beta_1<\beta_2<\cdots<\beta_q$$

$$\bar{\mathcal{A}}\cup\bar{\mathcal{B}}=\{1,2,\cdots,\ell'\}$$

$W_{j'}=(w_1, w_2, \cdots, w_{k-k'-2p})$

$w_1<w_2<\cdots<w_{k-k'-2p}$　　$\{w_1, w_2, \cdots, w_{j'}\}\subset\{k'+2\ell'+1, k'+2\ell'+2, \cdots, k'+2\ell'+j'\}$

$\{w_{j'+1}, w_{j'+2}, \cdots, w_{k-k'-2p}\}\subset\{k'+2\ell'+j'+1, k'+2\ell'+j'+2, \cdots, n\}$

$U_{j'}=(u_1, u_2, \cdots, u_{J+I})$　　$V_{j'}=(v_1, v_2, \cdots, v_{J+I})$

$v_1<v_2<\cdots<v_{J+I}$　　$u_i<v_i \quad (1\leqslant i\leqslant J+I)$

ここで w は $2J=j'-1$ のとき整数を，$2J=j'$ のときは ϕ を表わすとする。 x は $2I=k-k'-2p-j'-1$ のとき整数を，$2I=k-k'-2p-j'$ のときは ϕ を表わす。

$$\{u_i, v_i\ (1\leqslant i\leqslant J),\ w\} = \{w_1, w_2, \cdots, w_{j'}\}$$

$$\{u_i, v_i\ (J+1\leqslant i\leqslant J+I), x\} = \{w_{j'+1}, w_{j'+2}, \cdots, w_{k-k'-2p}\}$$

$$\#\{u_i, v_i\ (1\leqslant i\leqslant J), w\} = j'$$

$$\#\{u_i, v_i\ (J+1\leqslant i\leqslant J+I), x\} = k-k'-2p-j'$$

$$\mathfrak{z} = (z_1, z_2, \cdots z_{l-g}) \qquad z_1 < z_2 < \cdots < z_{l-g}$$

$$\mathfrak{bl} = (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \cdots \mathfrak{a}_{l-g}) \qquad z_i < \mathfrak{a}_i \qquad (1\leq i\leq l-g)$$

$$\{z_i, \mathfrak{a}_i\} \subset \{k'+2l'+1, k'+2l'+2, \cdots, k'+2l'+j\}$$

又は $\{z_i, \mathfrak{a}_i\} \subset \{k'+2l'+j+1, k'+2l'+j+2, \cdots, n\}$

$$\ni = (\ni_1, \ni_2, \cdots, \ni_m)$$

$$\overline{U_{j'}} \cup \overline{V_{j'}} \cup \{w, x\} \cup \overline{\mathfrak{z}} \cup \overline{\mathfrak{bl}} \cup \overline{\ni} = \{k'+2l'+1, k'+2l'+2, \cdots, n\}$$

まとめて $\mathcal{U}_{j'} = (A, B, W_{j'}, U_{j'}, V_{j'}, w, x, \mathfrak{z}, \mathfrak{bl}, \ni)$ とおく

以上の準備の下に，

$F_j^{k',l'}$ 上の関数を次の様に定義する $h\in F_j^{k',l'}$ $(\subset H_j^{k',l'})$

$$\widetilde{K}_j^{k',l'}(h) \underset{\text{def}}{=} (-1)^{k(k+1)/2} \sum_{\mathcal{U}} \operatorname{sgn}\mathcal{U} \sum_{\operatorname{Max}\{j-m,0\}\leqslant j'\leqslant \operatorname{Min}\{j,m'-m\}} \sum_{\mathcal{U}_{j'}}$$

$$\xi_{k'}(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{k'}; \lambda_{a_1}, \lambda_{a_2}, \cdots \lambda_{a_{k'}}) \prod_{1\leqslant i\leqslant p} \eta_2(\sigma_{k'+2\alpha i-1}, \sigma_{k'+2\alpha i}; \lambda_{b_i}, \lambda_{c_i})$$

$$\prod_{1\leqslant i\leqslant J+I} \zeta_2(\sigma_{u_i}, \sigma_{v_i}; \lambda_{p_i}, \lambda_{q_i}) \chi(\sigma_w, \sigma_x; \lambda_r, \lambda_s) \prod_{1\leqslant i\leqslant g} H_2(\sigma_{k'+2\beta i-1}, \sigma_{k'+2\beta i}; \lambda_{d_i}, \lambda_{d_{i+1}})$$

$$\prod_{1\leqslant i\leqslant l-g} Z_2(\sigma_{z_i}, \sigma_{\mathfrak{a}_i}; \lambda_{f_i}, \lambda_{f_{i+1}}) \quad \Xi_m(\sigma_{\ni_1}, \sigma_{\ni_2}, \cdots, \sigma_{\ni_m}; \lambda_{k+2l+1}, \lambda_{k+2l+2}, \cdots, \lambda_n)$$

$$\prod_{1\leq i\leq m'}(-1)^{k'm'}\ \varepsilon_i^{m'+k'+1-i}\prod_{1\leq i\leq k-k'-2p}(-1)^{k'(k-k'-2p)}\ \varepsilon_{\omega i-k'-2l'}^{k-2p+1-i}\prod_{1\leq i\leq l-q}\varepsilon_{\sigma i-k'-2l'}$$

但し, $p+q=l$

$$\begin{cases}\delta_i=e^{\sqrt{-1}\varphi_i} & 1\leq i\leq k\\ \delta_{k+2i-1}=e^{z_i},\quad \delta_{k+2i}=e^{\bar{z}_i} & 1\leq i\leq l\\ \delta_{k+2l+i}=\varepsilon_i e^{t_i} & 1\leq i\leq m\end{cases}$$

$$\begin{cases}\lambda_i=\nu_i l_i,\quad \nu_i=\pm1 & 1\leq i\leq k\\ \lambda_{k+2i-1}=(m_i,\sqrt{-1}\xi_i),\ \lambda_{k+2i}=(m_i,-\sqrt{-1}\xi_i) & 1\leq i\leq l\\ \lambda_{k+2l+i}=(\epsilon_i,\sqrt{-1}\rho_i) & 1\leq i\leq m\end{cases}$$

定理 1　$G'=\bigcup_{x\in G}\ \bigcup_{k+2l+m=n}\ \bigcup_{0\leq p\leq m} x(F_p^{k,l})'x^{-1}$ が成立するから, $g\in G'$と共役な元を$hg\in(F_p^{k,l})'$で表わすことにする。このときG上の関数を

$$\textcircled{H}(\omega(\nu,l_1,\cdots,\nu_k l_k;m_1,\cdots m_l;\epsilon_1,\cdots\epsilon_m),\nu(\xi_1,\cdots\xi_l;\rho_1,\cdots,\rho_m))(g)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\tilde{K}_j^{k',l'}(hg)}{\Delta^{k',l'}(hg)} & hg\in(F_j^{k',l'})' \qquad 0\leq k'\leq k,\ 0\leq l',\ k'+2l'\leq k+2l\\[2ex] 0 & \text{その他}\end{cases}$$

で定義する。不変固有超関数となる。特に$l_1>l_2>\cdots>l_k>0$, $m_1>0, m_2>0,\cdots,m_l>0$, $\xi_1>0,\xi_2>0,\cdots,\xi_l>0,\rho_1>\rho_2>\cdots>\rho_m>0$ の場合既約ユニタリ表現, 非退化連続主系列の指標を表わす。$l,m=0$ のときは離散系列, $k,l=0$ のときは連続系列の指標となる

$\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_k$に関する和を

$$^{+}\textcircled{H}(\omega(l_1,\cdots l_k;m_1,\cdots,m_l;\epsilon_1,\cdots\epsilon_m),\nu(\xi_1,\cdots,\xi_l;\rho_1,\cdots\rho_m))=\sum_{\nu_1,\nu_2,\cdots\nu_k}\textcircled{H}(\omega(\nu,l_1,\cdots\nu_k l_k;m_1,\cdots m_l;\epsilon_1,\cdots\epsilon_m),\nu(\xi_1,\cdots\xi_l;\rho_1,\cdots\rho_m))$$

とおく。

§2. Fourier 変換

Notation §1-2 で与えた Notation に対応して次の関数を定義する。

(1,1) $l_1 \geq l_2 \geq \cdots \geq l_p \geq 0$

$$ {}^{+}\xi'_p(\delta_1,\delta_2,\dots,\delta_p;\, l_1,l_2,\dots,l_p) = \sum_{\sigma\in S_p} (\delta_{\sigma(1)}^{l_1}+\delta_{\sigma(1)}^{-l_1})(\delta_{\sigma(2)}^{l_2}+\delta_{\sigma(2)}^{-l_2})\cdots(\delta_{\sigma(p)}^{l_p}+\delta_{\sigma(p)}^{-l_p}) $$

(1,2)

$$ {}^{+}\zeta'_2(\delta_1,\delta_2;\, l_1,l_2) = \begin{vmatrix} \delta_1^{-l_1} & 2(\delta_1^{l_2}+\delta_1^{-l_2}) \\ -\delta_2^{-l_1} & 2(\delta_2^{l_2}+\delta_2^{-l_2}) \end{vmatrix} $$

(1,3)

$$ {}^{+}\zeta'_2(\delta_1,\delta_2;\, l_1,l_2) = 4\begin{vmatrix} \delta_1^{-l_1} & \delta_1^{-l_2} \\ -\delta_2^{-l_1} & \delta_2^{l_2} \end{vmatrix} $$

(1,4)

$$ {}^{+}\chi'(\delta_1,\delta_2;\, l_1,l_2) = 4\begin{vmatrix} \delta_1^{-l_1} & \delta_1^{-l_2} \\ -\delta_2^{-l_1} & \delta_2^{-l_2} \end{vmatrix} $$

$$ {}^{+}\chi(\delta_1, l_1) = 2\delta_1^{-l_1} $$

(2,1)

$$ H'_2(\delta_1,\delta_2;\,\lambda,\bar{\lambda}) = (e^{-\sqrt{-1}m\theta}+e^{\sqrt{-1}m\theta})(e^{\sqrt{-1}\xi t}-e^{-\sqrt{-1}\xi t}) $$

(2,2)

$$ Z'_2(\delta_1,\delta_2;\,\lambda,\bar{\lambda}) = 2e\left(-m\frac{t_1-t_2}{2}\right)\left\{e\left(\sqrt{-1}\xi\frac{t_1+t_2}{2}\right)-e\left(-\sqrt{-1}\xi\frac{t_1+t_2}{2}\right)\right\}\varepsilon^m $$
$$ -2e\left(-m\frac{t_1+t_2}{2}\right)\left\{e\left(\sqrt{-1}\xi\frac{t_1-t_2}{2}\right)-e\left(-\sqrt{-1}\xi\frac{t_1-t_2}{2}\right)\right\}\varepsilon^m $$

($e(x)=e^x$ で表わした)

(3,1)

$$ \Xi'_p(\delta_1,\delta_2,\dots,\delta_p;\,\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_p) = \sum_{\sigma\in S_p} \mathrm{sgn}\,\sigma \prod_{j=1}^{p} (e^{\sqrt{-1}\rho_{\sigma(j)}t_j} - e^{-\sqrt{-1}\rho_{\sigma(j)}t_j})\,\varepsilon_j^{\varepsilon_{\sigma(j)}} $$

さらに、Fourier 変換に関係して次の関数を定義する。

(Notation に歴史をもたせておいた)

(1,2)

$$ {}^{+}\hat{\zeta}'_2(m,\xi) = \begin{cases} \dfrac{\coth \pi\xi/2}{4\sqrt{-1}} & m \in \mathbb{Z}_0 \qquad \mathbb{Z}_0 = 2\mathbb{Z} \\ \dfrac{\tanh \pi\xi/2}{4\sqrt{-1}} & m \in \mathbb{Z}_1 \qquad \mathbb{Z}_1 = 2\mathbb{Z}+1 \end{cases} $$

そして $\quad {}^{+}\hat{\zeta}'_2(\xi;\mathbb{Z}_p) = {}^{+}\hat{\zeta}'_2(m,\xi) \quad m \in \mathbb{Z}_p \quad (p=0,1)$

とおく

(1,3)

$$ {}^{+}\hat{\zeta}'_2(\rho_1,\varepsilon;\rho_2,\varepsilon) = \begin{cases} \frac{1}{8}\{2\coth \pi\rho_2 \coth \pi(\rho_1+\rho_2) - 1\} & \varepsilon = 1 \\ \frac{1}{4} \coth \pi\rho_2 \operatorname{cosech} \pi(\rho_1+\rho_2) & \varepsilon = -1 \end{cases} $$

(1,4)

$$ {}^{+}\hat{\chi}'(\rho_1,\varepsilon;\rho_2,-\varepsilon) = \begin{cases} -\frac{1}{4} \coth \pi\rho_1 \operatorname{cosech} \pi\rho_2 & \varepsilon = 1 \\ -\frac{1}{4} \operatorname{cosech} \pi\rho_1 \coth \pi\rho_2 & \varepsilon = -1 \end{cases} $$

$$ {}^{+}\hat{\chi}'(\rho_1,\varepsilon_1) = \begin{cases} \dfrac{\coth \pi\rho_1}{2\sqrt{-1}} & \varepsilon_1 = 1 \\ \dfrac{\operatorname{cosech} \pi\rho_1}{2\sqrt{-1}} & \varepsilon_1 = -1 \end{cases} $$

とおくと

${}^{+}\hat{\chi}'(\rho_1,\varepsilon;\rho_2,-\varepsilon) = {}^{+}\hat{\chi}'(\rho_1,\varepsilon)\ {}^{+}\hat{\chi}'(\rho_2,-\varepsilon)$ が成立。

(2,2)

$$ \hat{Z}'_2(\eta;\varepsilon;\mathbb{Z}_0) = \frac{\coth \frac{\pi\eta}{2}}{4\sqrt{-1}} $$

$$ \hat{Z}'_2(\eta;\varepsilon;\mathbb{Z}_1) = \frac{\tanh \frac{\pi\eta}{2}}{4\sqrt{-1}}\,\varepsilon $$

$\{l_1, l_2, \cdots, l_p\}$ 上の変換群

W_P $\left\{ \begin{array}{ll} l_1, l_2, \cdots l_p \text{ の permutation} & \\ l_j \to -l_j \quad \text{transformation} & (1 \leq j \leq P) \end{array} \right\}$ より生成される

とし，$l_1, l_2, \ldots l_p$ のパラメーターをもつ関数 f に対して，和を次の様に定義する。

$$\sum_{Sg(l_1>l_2>\cdots>l_p>0)} f(l_1, l_2, \cdots, l_p) \underset{def}{=} \sum_{l_1\geq l_2\geq\cdots\geq l_p\geq 0} \frac{1}{|W(l_1, l_2, \cdots, l_p)|} f(l_1, l_2, \cdots, l_p)$$

但し，$W(l_1, l_2, \ldots, l_p) = \{w \in W_p \,;\, w(l_1, l_2, \ldots, l_p) = (l_1, l_2, \cdots, l_p)\}$

すなわち，等号の数を g とすると

$$|W(l_1, l_2, \cdots, l_p)| = 2^g \cdot g .$$

補題2.1　$F \in C_0(\mathbb{C}^*) \cap C^1(\mathbb{C}^+) \cap C^1(\mathbb{C}^-)$　($\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$, $\mathbb{C}^+$ 上半平面, $\mathbb{C}^-$ 下半平面)，

$F(e^z) = -F(e^{\bar{z}})$ を満たすとする。

$$\sum_{Sg(l_1>l_2>0)} \int_{\substack{\tau>0 \\ \theta\in[-\pi,\pi]}} F(e^z)\, {}^{+}\mathfrak{Z}'_{2}(e^z, e^{\bar{z}}; l_1, l_2)\, d\theta\, d\tau \qquad (z = \tau + \sqrt{-1}\theta)$$

$$= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_{\xi\in\mathbb{R}} \hat{F}(m, \xi)\, {}^{+}\hat{\mathfrak{Z}}'_{2}(m, \xi)\, d\xi$$

$$= \sum_{p=0,1} \sum_{m\in\mathbb{Z}_p} \int_{\xi\in\mathbb{R}} \hat{F}(m, \xi)\, {}^{+}\hat{\mathfrak{Z}}'_{2}(\xi, \mathbb{Z}_p)\, d\xi \qquad \text{が成立}$$

但し，$$\hat{F}(m, \xi) = \int_{\substack{\tau\in\mathbb{R} \\ \theta\in[-\pi,\pi]}} F(\theta, \tau)\, e^{\sqrt{-1}(\xi\tau + m\theta)}\, d\theta\, d\tau$$

補題2.2　$F \in C_0^1(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*)$ ($\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$) は次の対称性を満足するものとする。

$$F(\varepsilon e^{t_1}, \varepsilon e^{t_2}) = -F(\varepsilon e^{-t_1}, \varepsilon e^{t_2}) = -F(\varepsilon e^{t_2}, \varepsilon e^{t_1})$$

$$\sum_{Sg(l_1>l_2>0)} \int_{t_1>t_2>0} F(\varepsilon e^{t_1}, \varepsilon e^{t_2})\ {}^{+}\zeta_2'(\varepsilon e^{t_1}, \varepsilon e^{t_2}; l_1, l_2)\, dt_1 dt_2$$

$$= \int_{\rho_1,\rho_2\in\mathbb{R}} \hat{F}(\rho_1,\varepsilon;\rho_2,\varepsilon)\ {}^{+}\hat{\zeta}_2'(\rho_1,\varepsilon;\rho_2,\varepsilon)\, d\rho_1 d\rho_2$$

が成立。但し，$\hat{F}(\rho_1,\varepsilon_1;\rho_2,\varepsilon_2) = \int_{t_1,t_2\in\mathbb{R}} F(\varepsilon_1 e^{t_1}, \varepsilon_2 e^{t_2})\, e^{\sqrt{-1}(\rho_1 t_1+\rho_2 t_2)}\, dt_1 dt_2$

補題2.3　(1) $F\in C_0^1(\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^*)$ は次の対称性を満足するものとする。

$$F(\varepsilon e^{t_1}, -\varepsilon e^{t_2}) = -F(\varepsilon e^{t_1}, -\varepsilon e^{t_2}) = -F(\varepsilon e^{t_1}, -\varepsilon e^{-t_2}) = F(-\varepsilon e^{t_2}, \varepsilon e^{t_1})$$

$$\sum_{Sg(l_1>l_2>0)} \int_{t_1,t_2>0} F(\varepsilon e^{t_1}, -\varepsilon e^{t_2})\ {}^{+}\chi_2'(\varepsilon e^{t_1}, -\varepsilon e^{t_2}; l_1, l_2)\, dt_1 dt_2$$

$$= \int_{\rho_1,\rho_2\in\mathbb{R}} \hat{F}(\rho_1,\varepsilon;\rho_2,-\varepsilon)\ {}^{+}\hat{\chi}'(\rho_1,\varepsilon;\rho_2,-\varepsilon)\, d\rho_1 d\rho_2$$

が成立

(2)　$F\in C_0^1(\mathbb{R}^*)$ は次の対称性を満足するものとする。

$$F(\varepsilon_1 e^{t_1}) = -F(\varepsilon_1 e^{-t_1})$$

$$\sum_{Sg(l_1>0)} \int_{t_1>0} F(\varepsilon_1 e^{t_1})\ {}^{+}\chi'(\varepsilon_1 e^{t_1}; l_1)\, dt_1$$

$$= \int_{\rho_1\in\mathbb{R}} \hat{F}(\rho_1,\varepsilon_1)\ {}^{+}\hat{\chi}'(\rho_1,\varepsilon_1)\, d\rho_1$$

が成立。

補題2.4　$F\in C_0(\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^*)$　補題2.2の対称性を満たすとする。

$$\sum_{\substack{Sg(m>0)\\ m\in \mathbb{Z}_p}}\int_{t_1>t_2>0} F(\varepsilon e^{t_1},\varepsilon e^{t_2})\, Z_2'(\varepsilon e^{t_1},\varepsilon e^{t_2};\lambda_1,\lambda_2)\,dt_1\,dt_2$$

$$=\int_{\eta\in\mathbb{R}} \hat{F}\left(\frac{\sqrt{-1}(\eta+\xi)}{2},\varepsilon;\frac{\sqrt{-1}(-\eta+\xi)}{2},\varepsilon\right)\hat{Z}_2'(\eta;\varepsilon;\mathbb{Z}_p)\,d\eta \qquad (P=0.1)$$

が成立。但し，$\hat{F}\left(\frac{\sqrt{-1}(\eta+\xi)}{2},\varepsilon;\frac{\sqrt{-1}(\eta+\xi)}{2},\varepsilon\right)=\int_{t_1,t_2\in\mathbb{R}} F(\varepsilon e^{t_1},\varepsilon e^{t_2})\, e\left(\frac{\sqrt{-1}(\eta+\xi)}{2}t_1+\frac{\sqrt{-1}(-\eta+\xi)}{2}t_2\right)dt_1\,dt_2$

補題2.5　$F\in C_0(\mathbb{C}^*)\cap C'(\mathbb{C}^+)\cap C'(\mathbb{C}^-)$　補題2.1の対称性を満たすとする。

$$\sum_{Sg(m>0)}\int_{\substack{\theta\in[-\pi,\pi]\\ \tau>0}} F(e^z)\, H_2'(e^z,e^{\bar{z}};\lambda_1,\lambda_2)\,d\theta\, d\tau$$

$=\hat{F}(m,\xi)$　が成立。

§3　Plancherel 公式

dg を G 上の正規化された Haar 測度，$H^{k,l}$ 上の Haar 測度を

$$d^{k,l}h=d\varphi_1\,d\varphi_2\cdots d\varphi_k\,d\theta_1\,d\theta_2\cdots d\theta_l\,d\tau_1\,d\tau_2\cdots d\tau_l\,dt_1\,dt_2\cdots dt_m$$

で定義する。$d^{k,l}\dot{g}$ を $G/H^{k,l}$ 上の左不変測度で $dg=d^{k,l}\dot{g}\,d^{k,l}h$ を満足するものとする。$f\in C_0^\infty(G)$ に対して $(H^{k,l})'$ 上の関数

$$K_f^{k.l}(h) = \varepsilon_R^{k.l}(h) \ \mathrm{conj}\,\Delta^{k.l}(h) \int_{G/H^{k.l}} f(ghg^{-1})\, d^{k.l}\tilde{g} \quad (h \in (H^{k.l})')$$

を定義すると

$$\int_G f(g)\,dg = \sum_{k.l} \alpha^{k.l} \int_{(H^{k.l})'} K_f^{k.l}(h)\ \varepsilon_R^{k.l}(h)\,\Delta^{k.l}(h)\ d^{k.l}h$$

$$\alpha^{k.l} = 1/|W(G.H^{k.l})|$$

が成立。

補題3.1　$f \in C_0^\infty(G)$に対して，$\left(C = \dfrac{\pi^{\frac{1}{2}n(n-1)} \prod_{p=0}^{n}(n-p)!}{2\sqrt{2}\ (n+1)^{n(n+1)/2}},\ g = \frac{1}{2}n(3n+2)\right.$ をとる$)$　$L^{n,0}K_f^{n.0}(e) = (-1)^g c f(e)$　（eはGの単位元）が成立。

ⒽをG上の不変固有超関数とする。G'上解析関数Ⓗ(g)が存在して

$$(Ⓗ, f) = \int_{G'} f(g)\,Ⓗ(g)\,dg \qquad (f \in C_0^\infty(G))$$

となる。

$$K^{k.l}(h) = \varepsilon_R^{k.l}(h)\,\Delta^{k.l}(h)\,Ⓗ(h) \qquad (h \in (H^{k.l})')$$

とおくと

$$\int_{G'} f(g)Ⓗ(g)\,dg = \sum_{k.l} \alpha^{k.l} \int_{(H^{k.l})'} K_f^{k.l}(h)\ K^{k.l}(h)\ dh$$

が成立。

補題3.2　$f \in C_0^\infty(G)$に対して次式が成立

$$\sum_{k.l} \alpha^{k.l} \int_{(H^{k.l})'} L^{k.l} K_f^{k.l}(h)\ L^{k.l} K^{k.l}(h)\ d^{k.l}h = (-1)^{n^2} L(\mu)^2 (Ⓗ, f)$$

ここで μ はⒽの無限小指標によって決まる線形形式（T.Hirai [2] 参照），$L(\mu)$ は k,l によらず一定。

補題3.3　$f \in C_0^\infty(G)$ に対して

$$\sum_{k,l} \alpha^{k.l} \int_{(H^{k.l})'} L^{k.l} K_f^{k.l}(h)\, {}^{k.l}K'(h)\, dh = L(\mu)(\textcircled{H}, f)$$

但し，${}^{k,l}K' = L^{k.l}(\mu^{k.l})^{-1} L^{k.l} K^{k.l}$，この式は前の補題3.2より無限小指標が正則の時成立するが，正則でない場合にも成立する。

定理2　$f \in C_0^\infty(G)$ に対して次式が成立

$$f(e) = \sum_{\substack{0 \leq k,l \\ k+2l+m=n}} c(k.l) \sum_{\substack{l_1 > l_2 > \cdots > l_k > 0 \\ m_1 > 0 \cdots m_l > 0 \\ \epsilon_1, \cdots, \epsilon_m = 0.1}} \int_{\substack{\xi_1 > 0, \cdots, \xi_l > 0 \\ \rho_1 > \rho_2 > \cdots > \rho_m > 0}} \Big| L\Big(l_1, l_2, \cdots, l_k, \frac{m_1+\sqrt{-1}\xi_1}{2}, \frac{m_1-\sqrt{-1}\xi_1}{2}, \cdots, \frac{m_l+\sqrt{-1}\xi_l}{2}, \frac{m_l-\sqrt{-1}\xi_l}{2},$$

$$\sqrt{-1}\rho_1, \sqrt{-1}\rho_2, \cdots, \sqrt{-1}\rho_m\Big)\Big|$$

$$\prod_{0 \leq p \leq l} \gamma(\xi_p; m_p - 1) \prod_{1 \leq p < q \leq m} \gamma(\rho_p + \rho_q; \epsilon_p + \epsilon_q)\ \gamma(\rho_p - \rho_q; \epsilon_p - \epsilon_q)$$

$$\prod_{0 \leq p \leq m} \gamma(\rho_p; k + \epsilon_p)\ \big({}^{t}\textcircled{H}(\omega(l_1, \cdots, l_k, m_1, \cdots, m_l, \epsilon_1, \cdots, \epsilon_m), \nu(\xi_1, \cdots \xi_l, \rho_1, \cdots, \rho_m)), f\big)$$

$$d\xi_1 d\xi_2 \cdots d\xi_p d\rho_1 d\rho_2 \cdots d\rho_m$$

但し，

$$\gamma(\xi; P) = \begin{cases} \tanh \dfrac{\pi\xi}{2} & P \equiv 0 \pmod 2 \\ \coth \dfrac{\pi\xi}{2} & P \equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$$

$c(k.l)$　正の定数。

文　献

Harish-Chandra ; [1] Discrete series for semisimple Lie groups I, II, Acta math., 113(1965), 241-318;116(1966), 1-111.

T. Hirai ; [1] The Plancherel formula for SU(p,q), J. Math. Soc. Japan., 22(1970), 134-179.

[2] Invariant eigendistributions of Laplace operators on real simple Lie groups, II. General theory for semisimple Lie groups, Japan.J.Math., New Ser. 2 (1976), 27-89.

[3] ----, IV. Explicit forms of the characters of discrete series representations for Sp(n,R), Japan. J. Math., New Ser. 3 (1977), 1-48.

M. Sugiura ; [1] Conjugate classes of Cartan subalgebras in real semisimple Lie algebras, J.Math.Soc.Japan, 11(1959) 374-434.