数理解析研究所講究録
第 368 巻 1979 年 204-223

Mautner群の既約表現について

阪大　基礎工　河上　哲

§1. 序

discrete Mautner 群やMautner群等の非I型群の既約表現を決定する事は、一般に絶望的とされているし、具体的に知られている表現はごくわずかである。Mackeyの方法によって誘導表現として得られる既約表現("Mackey表現"と呼ばれている)や、正則表現の分解の際に顔を出すnon-Mackey表現等についてはよく知られている。最近、L.Baggettが、表現のテンサー積の概念を群拡大と関連づけて一般化し、そのテンサー積を分解する事によって、discrete Mautner群の新しい既約表現を見出した。[1] ここでは、その表現の正体を明らかにし、ある種のnon-Mackey表現達の構成を試みると伴に、更に新しい既約表現を索す事を主目的とする。

§2. discrete Mautner 群の既約表現

discrete Mautner群とは、$\mathbb{C}$（複素数加群）と$\mathbb{Z}$（整数加群）の半直積群$\mathbb{D}=\mathbb{C}\times_s\mathbb{Z}$であり、積は

$$(z,n)(z',n')=(z+e^{in}z',\ n+n')$$

と定義されている。この$\mathbb{D}$のよく知られたnon-Mackey表現とは、次のような表現である。

> $\lambda\in\mathbb{R}$，$r\in\mathbb{R}^+$，$\mathbb{T}=\{\alpha\in\mathbb{C}\ ;\ |\alpha|=1\}$で
>
> $\mathfrak{h}=L^2(\mathbb{T})\ni f(\alpha)$，$\mathbb{D}\ni(z,n)$に対し、
>
> $$\left(U^{(\lambda,r)}_{(z,n)}f\right)(\alpha)=e^{i\lambda n}e^{i(r\bar{\alpha},z)}f(\alpha e^{in})$$

但し、$(\ ,\ )$は$\mathbb{C}$の実内積

この表現に対し、一つ解釈を与えてみる。まずGを$\mathbb{C}$と$\mathbb{R}$の半直積群$\mathbb{C}\times_s\mathbb{R}$とし、積が

$$(z,t)(z',t')=(z+e^{it}z',\ t+t')$$

と定義される群を考える。これは、運動群の普遍被覆群で、3次元可解リー群である。この群Gの既約表現は、Mackeyの方法で求まる。$\hat{\mathbb{C}}\ni\varphi\neq0$に対し、その不変部分群は、$H_\varphi=\{t\in\mathbb{R}\ ;\ t\cdot\varphi=\varphi\}=2\pi\mathbb{Z}$であり、$\hat{H}_\varphi\ni\chi$を1つとって、$G_\varphi=\mathbb{C}\times_s H_\varphi$の表現$L^{(\chi,\varphi)}$を、

$$L^{(\chi,\varphi)}_{(z,h)}=\varphi(z)\chi(h)\qquad(z,h)\in\mathbb{C}\times_s H_\varphi$$

と定め、

$$V^{(\chi,\varphi)} = \operatorname*{Ind}_{G_\varphi \uparrow G} L^{(\chi,\varphi)}$$

とおくと、$V^{(\chi,\varphi)}$ は G の既約表現である。特に

$$\chi^\lambda(h) = e^{i\lambda h}, \quad \varphi^r(z) = e^{i(r,z)} \qquad r \in \mathbb{R}^+,\ \lambda \in \mathbb{R}$$

をとると、$V^{(\lambda,r)} \equiv V^{(\chi^\lambda,\varphi^r)}$ は、

$\mathfrak{h} = L^2(\mathbb{T}) \ni f(\alpha)$ に対し、

$$\left(V^{(\lambda,r)}_{(z,t)} f\right)(\alpha) = e^{i\lambda t}\, e^{i(r\bar{\alpha},\, z)} f(\alpha e^{it}) \qquad (z,t) \in G$$

となっている。ここで自然に D を G の部分群と思うと、D の表現 $U^{(\lambda,r)}$ は、G の表現 $V^{(\lambda,r)}$ の D への制限になっている。つまり、

$$U^{(\lambda,r)} = {}_{D}\Big|\operatorname*{Ind}_{G_\varphi \uparrow G} L^{(\chi^\lambda,\varphi^r)}$$

と、解釈できる。$U^{(\lambda,r)}$ の既約性は、両側 coset $D\backslash G/G_\varphi$ が、countably separated でない事により、その可能性が伺われる。([2] 参照)

次に、L. Baggett の得た新しい表現というのは、次のような non-Mackey 表現である。([1] 参照)

$\lambda \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}^+$, $d \in \mathbb{Z}$, $\mathfrak{h} = L^2(\mathbb{T}) \ni f(\alpha)$ に対し、

$$\boxed{\left(U^{(\lambda,d,r)}_{(z,n)} f\right)(\alpha) = e^{i\frac{d}{2}n^2}\, e^{i\lambda n}\, \alpha^{nd}\, e^{i(r\bar{\alpha},\, z)} f(\alpha e^{in})}$$

ここで、$\mathbb{T} \longleftrightarrow [0, 2\pi)$ のボレル同型により、書き直すと、

$L^2([0, 2\pi)) \ni f(x)$ に対し、

$$\left(U_{(z,n)}^{(\lambda,d,r)} f\right)(x) = e^{in^2\frac{d}{2}} e^{inx} e^{i\lambda n} e^{i(re^{-ix}, z)} f(\overline{x+n})$$

となる。但し、$x \in \mathbb{R}$ において、$x = [x] + \overline{x}$; $[x] \in 2\pi\mathbb{Z}$, $0 \leq \overline{x} < 2\pi$ と表わす。前記 $U^{(\lambda,r)}$ と異なっている点は、$D^d(n, x) = e^{i\frac{d}{2}n^2} e^{inx}$ の項が、余分についている。今、x を実数の範囲で取ってさしつかえない。その時、$D^d(n, x)$ は、$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ から $\mathbb{T}$ へのボレル関数であって、

$$D^d(n, x + 2\pi m) = D^d(n, x) \qquad \forall m \in \mathbb{Z}$$

を満たす。更に、$A^d(x) = e^{-i\frac{d}{2}x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$ をとると、

$$D^d(n, x) = A^d(x)\, \overline{A^d(x+n)}$$

と表わされ、この事から容易に、

$$D^d(n_1 + n_2, x) = D^d(n_1, x)\, D^d(n_2, x + n_1)$$

の関係式を満たす事が判る。次に、

$$\begin{aligned} C^d(2\pi m, x) &= \overline{A^d(x)}\, A^d(x + 2\pi m) \qquad m \in \mathbb{Z} \\ &= e^{i\frac{d}{2}(2\pi m)^2} e^{2\pi i m x} \end{aligned}$$

とおいてみると、やはり、

$$\begin{cases} C^d(2\pi m, x + n) = C^d(2\pi m, x) \qquad \forall n \in \mathbb{Z} \\ C^d(2\pi m_1 + 2\pi m_2, x) = C^d(2\pi m_1, x)\, C^d(2\pi m_2, x + 2\pi m_1) \end{cases}$$

を満たしている事に注意しておこう。ここで、

$$\tilde{C}^d((z, 2\pi m), (w, t)) \equiv C^d(2\pi m, t)$$ とおく。

そこで、$G_\varphi = \mathbb{C} \times_s 2\pi\mathbb{Z}$ の表現 $L^{(\chi^\lambda, \varphi^r)}$ と、変換群 $(G_\varphi ; G)$ の $\mathbb{D}$ 一不変 cocycle $\tilde{C}^d(k, g)$ を用いると、$\mathbb{D}$ の表現 $U^{(\lambda, d, r)}$ は、次に定義される表現 $\tilde{U}^{(\lambda, d, r)}$ とユニタリー同値である事が容易に判る。$\tilde{\mathfrak{h}}$ を、次の条件を満たす f 達の集まりから作られるヒルベルト空間とする。

$$\begin{cases} ① \ f \text{ は、} G \text{ 上のボレル関数} \\ ② \ f(k \cdot g) = \tilde{C}^d(k, g)^* L_k^{(\chi^\lambda, \varphi^r)} f(g) \quad k \in G_\varphi,\ g \in G \\ ③ \ \int_{G_\varphi \backslash G} |f(g)|^2 d\mu(g) < \infty \quad \left(\text{但し、} \mu \text{ は } G_\varphi \backslash G \cong 2\pi m \backslash \mathbb{R} \text{ のハール測度} \right) \end{cases}$$

この時、$(z, n) \in \mathbb{D}$ に対し、

$$\tilde{U}^{(\lambda, d, r)}_{(z, n)} \ ; \ \tilde{\mathfrak{h}} \ni f(g) \longmapsto f(g \cdot (z, n)) \in \tilde{\mathfrak{h}}$$

は、$\mathbb{D}$ のユニタリー表現になる。

この定義から、$d = 0$ 即ち $C^d \equiv 1$ の時は、確かに $L^{(\chi^\lambda, \varphi^r)}$ の G への誘導表現を $\mathbb{D}$ に制限した表現になっている事に注意しておこう。以後の § で、この表現の若干の一般論を述べる。

§ 3、変換群のコホモロジー

以下の位相群及び位相空間は、可算基を持つ局所コンパクトとする。今、位相変換群 $(G ; X)$ と、フォン・ノイマン環 $\mathfrak{A}$

が与えられている時、G, Xにはその位相から自然にボレル構造が入り、一方、$\mathfrak{A}^u=\{\mathfrak{A}$のユニタリー作用素全体$\}$も、弱作用素位相から生成されるボレル構造を備えているとする。その時、

$$C(g_1g_2, x) = C(g_1, x)\,C(g_2, x\cdot g_1) \qquad g_1, g_2 \in G,\ x \in X$$

を満たす、$G\times X$から$\mathfrak{A}^u$へのボレル関数$C(g, x)$を、$\mathfrak{A}^u$-値cocycleと呼んでおく。二つのcocycle C_1とC_2が、X上の$\mathfrak{A}^u$-値ボレル関数Aによって、

$$C_2(g, x) = A(x)^* C_1(g, x) A(x\cdot g)$$

の関係を満たす時、C_1とC_2はcohomologous、あるいは同値という。特に恒等的に1であるcocycleとcohomologousの時、coboundaryと呼ぶ。$\mathcal{H}_{\mathfrak{A}}(G\,;X)$で$\mathfrak{A}^u$-値cocycle全体の同値類を表わし、$\mathfrak{A}^u$-値コホモロジー類と呼ぶ。特に$\mathfrak{A}$が可換の場合、これは自然な演算で群構造を持つ。一方、位相変換群$(G\,;X)$において、そのすべての軌道が局所閉集合である時、"smooth"と呼ぶ。この定義と同値な条件は、数多く知られており、I型性と密接に関連した重要な概念である。([4] 参照)

命題1. 位相変換群$(G\,;X)$がsmoothでかつ効果的であれば、$\mathcal{H}_{\mathfrak{A}}(G\,;X)$は自明。[6]

つまり、効果的な$(G\,;X)$においては、smoothであれば、

本質的には、cocycleは顔を出さない。効果的という条件をはずせば、一般には極めて難しく、単純な場合には、次の命題が成立する。

命題2　(G ; X)が推移的でかつ$\mathcal{O}=\mathbb{C}$ ならば、$\mathcal{H}_c(G;X)$は、$\mathcal{X}(G_0)=\{G_0$の1次表現全体$\}$と、群として同型。但し、G_0はGの不変部分群。

尚、(G;X)がsmoothでない場合が本題だが、ここでは、これに代わり、両側変換群(G ;Y; H)を考える。より正確に述べると、効果的だがnon-smoothな(G ; X)に対し、次の条件を満足する両側変換群(G ;Y ; H)を見出す。

$$\begin{cases} (G\,;X) \cong (G\,;Y/H) \\ (G\,;Y)\text{と}(H\,;Y)\text{は効果的かつ smooth} \end{cases}$$

この時、命題1の恩恵により、(G, X)のcocycle $D(g,x)$は、Y上の$\mathcal{O}^{\nu}$-値ボレル関数$A(y)$を使って、

$$D(g,y) = A(y)\,A(g\cdot y)^{*} \qquad g\in G\ ,\ y\in Y$$

と、表わされ、かつ

$$D(g,y\cdot h) = D(g,y) \qquad \forall h\in H$$

つまり、H-不変な(G;Y)のcocycleとして、とらえる事が出来る。一方、

$$C(h, y) = A(y)^* A(y \cdot h)$$

とおくと、これはG－不変な(H ; Y)のcocycleになっている。実は、D ⟷ A ⟷ C は、コホモロジー群(Ωが可換の場合)の同型を与えている。([6]参照)

[注意1] Xに正の測度μが与えられている時は、測度に依存したコホモロジーを定義する必要がある。ここでは、cocycleは上記のままで、同値の条件を、

$$\forall g \in G \ ; \ C_2(g, x) = \overline{A(x)} \ C_1(g, x) \ A(g \cdot x) \qquad \mu\text{-a.a.}x$$

と変更した時に、$C_1 \underset{\mu}{\simeq} C_2$と記し、そのコホモロジー類を$\mathcal{H}^{\mu}_{\Omega}(G ; X)$と表わす事にする。

[注意2] 両側変換群の典型的な例は、1つの群$\mathcal{G}$に、2つの内部分群G及びHが与えられると、右と左からそれぞれ掛けるという作用で、自然に定まる。

[例1] $X = \mathbb{R}$, $G = \mathbb{Z}$, $H = 2\pi\mathbb{Z}$ とし、

$$\begin{cases} \text{G の作用} & m \cdot x = x + m & x \in X, \ m \in G \\ \text{H の作用} & x \cdot (2\pi n) = x + 2\pi n & x \in X, \ 2\pi n \in H \end{cases}$$ の時、

① $A^{\lambda}(x) = e^{-i\lambda x}$ $\lambda \in \mathbb{R}$ をとると、

$$\begin{cases} C^{\lambda}(2\pi m, x) = e^{-2\pi i \lambda m} & (G\text{－不変}) \\ D^{\lambda}(n, x) = e^{i\lambda n} & (H\text{－不変}) \end{cases}$$

これは、一次表現をcocycleとして、とらえてみた。

㊁ $A^d(x) = e^{-i\frac{d}{2}x^2}$ 　 $d \in \mathbb{Z}$ 　をとると、

$$\begin{cases} C^d(2\pi m, x) = e^{-2\pi i d m x} e^{-i\frac{d}{2}(2\pi m)^2} & (G\text{-不変}) \\ D^d(n, x) = e^{i\frac{d}{2}n^2} e^{idnx} \end{cases}$$

［例 2］ $X = \mathbb{R}^2$, $G = \mathbb{R}$, $H = 2\pi\mathbb{Z} \times 2\pi\mathbb{Z}$ とし、

$$\begin{cases} G\text{の作用} & t\cdot(x, y) = (x+t, y+2\pi t) \\ H\text{の作用} & (x, y)(2\pi m, 2\pi n) = (x+2\pi m, y+2\pi n) \end{cases}$$

但し、$(x, y) \in X$, $t \in G$, $(2\pi m, 2\pi n) \in H$ の時、

$A^d((x, y)) = e^{-i\frac{d}{2}(x-\frac{1}{2\pi}\bar{y})^2}$ 　 $d \in \mathbb{Z}$ 　をとると、

$$\begin{cases} C^d((2\pi m, 2\pi n), (x, y)) = e^{-2\pi i d m(x-\frac{1}{2\pi}\bar{y})} e^{-2\pi^2 i d m^2} & (G\text{-不変}) \\ D^d(t, (x, y)) = e^{\frac{d}{2\pi}ix[\bar{y}+2\pi t]} e^{\frac{d}{8\pi^2}i\{[\bar{y}+2\pi t]-2\bar{y}[\bar{y}+2\pi t]^2\}} \end{cases}$$

$(H\text{-不変})$

§4．誘導表現の一般化

両側変換群 $(G ; X ; H)$ において、H のユニタリー表現 $(L, \mathfrak{h}(L))$ と X/H 上の準不変測度 μ が与えられているとしよう。この時、$\mathfrak{A}$ を、$L(H)' = \{T \in B(\mathfrak{h}(L)) ; L_h T = T L_h \ \forall h \in H\}$ なるフォン・ノイマン環とし、かつ C を G-不変な $(H ; X)$ の $\mathfrak{A}^u$-値 cocycle とする。そこで、L, C, μ によって、G の表現 $U^{(L, C, \mu)}$ を次のように定める。

まず、$\mathfrak{h}$ は次の条件を満たす f 達の集まりから自然に作られるヒルベルト空間とする。

$$\begin{cases} ① \ f ; X \longrightarrow \mathfrak{h}(L) & ;\text{弱ボレル関数} \\ ② \ f(x \cdot h) = C(h, x)^{*} L_h f(x) & \\ ③ \displaystyle\int_{X/H} \|f(\dot{x})\|^2 d\mu(\dot{x}) < \infty & \end{cases}$$

この時、

$$U^{(L,C,\mu)} ; \mathfrak{h} \ni f(x) \longmapsto \rho(g, x)^{1/2} f(g \cdot x) \in \mathfrak{h}$$

は、Gのユニタリー表現になる。但し、$\rho(g, x) = \frac{d\mu_g}{d\mu}(\dot{x})$

$\mu_g(E) = \mu(g \cdot E)$ とした。

［注意3］G, Hが、ある群$\mathcal{G}$の部分群である時、μは自然に定まる。更に、$C \equiv 1$とすると、$U = {}_G|\operatorname{Ind}_{H\uparrow\mathcal{G}} L$ に他ならず、特に、$G = \mathcal{G}$だと、誘導表現になっている。

従って、今後、この定義によって得られる表現$U^{(L,C,\mu)}$を

$$U^{(L,C,\mu)} = \operatorname{Ind}^{\mu}_{H \underset{C}{\rightarrow} G} L$$

と書く事にする。尚、この表現の研究は、将来に委ねよう。

§5、ある半直積群の表現の構成

$G = N \times_s K$（半直積群）とする。但し、KがNの自己同型群として作用している。これを$N \ni n$と$K \ni k$に対し、$k \cdot n \in N$と記す。更にNもKも可換である事を仮定しよう。その時、

$$(k\cdot\chi)(n)=\chi(k\cdot n) \qquad \chi\in\hat{N},\ k\in K,\ n\in N$$

と約束すれば、Kは$\hat{N}$（Nのdual）に、位相変換群として作用する。G.W. Mackeyは、変換群（K；$\hat{N}$）がsmoothの時、$G=N\times_s K$を"regular"な半直積群と呼び、この群の既約表現をすべて決定した。ここでは、主にGがregularでない場合を扱い、そのGのnon-Mackey表現の一部を求めてみよう。しかし、次の仮定を設ける。

(*) $\mathcal{G}=N\times_s\mathcal{K}$は、regularな半直積群で、$G=N\times_s K$の$\mathcal{G}$への埋め込みが効くような、可換群$\mathcal{K}$を見出す事が出来る。

この時、まず$\hat{N}\ni\varphi$を1つとり、その不変群を$H_\varphi=\{t\in\mathcal{K};\ t\cdot\varphi=\varphi\}$とおく。更に$\hat{H}_\varphi\ni\chi$をとり、$\mathcal{G}_\varphi=N\times_s H_\varphi$の表現$L^{(\chi,\varphi)}$を、

$$L^{(\chi,\varphi)}_{(n,h)}=\varphi(n)\,\chi(h) \qquad (n,h)\in\mathcal{G}_\varphi$$

で定める。更に、Cを変換群$(H_\varphi;\mathcal{K})$のK-不変な$\mathbb{T}$-値cocycleとすると、これは自然に$(\mathcal{G}_\varphi;\mathcal{G})$のG-不変なcocycleと思える。そして、$\mu$としては、$\mathcal{K}/H_\varphi$のハール測度をとると、§4に従い、Gの表現

$$U^{(\chi,c,\varphi)}=\operatorname*{Ind}_{\mathcal{G}_\varphi\xrightarrow{c}G}L^{(\chi,\varphi)}$$

が求まる。しかし、ここで、Cとχは重複を許している為(

つまり α は1つの cocycle と思える）以下の議論の必要上、$\alpha=0$ として、$U^{(C,\varphi)}$ を考える。更に、$t\in\mathcal{K}$ に対し、

$$(t\cdot C)(h,x)=C(h,t\cdot x) \qquad h\in H_\varphi,\ x\in\mathcal{K}$$

とおく事で、実は、$\mathcal{H}^{\mu}_{\varphi}(K\,;\mathcal{K}/H_\varphi)$ に $\mathcal{K}$ の作用が自然に定義できる。この時、次の定理を得る。

定理3. $U^{(C,\varphi)}$ と $U^{(C',\varphi')}$ がユニタリー同値である為の必要十分条件は、φ と φ' が同じ $\mathcal{K}$ の軌道に属し、かつ $\varphi'=t\cdot\varphi$ なら（$t\in\mathcal{K}$）$C'\underset{\mu}{\simeq} t\cdot C$ である事。

定理4、$Orb_K(\varphi)$ が $Orb_{\mathcal{K}}(\varphi)$ の中で、相対位相により、稠密であれば、$U^{(C,\varphi)}$ は既約表現である。

証明は[6]参照

[注意.4]　もし、$\hat{N}\ni\varphi\neq 0$ に対し、$Orb_{\mathcal{K}}(\varphi)=\overline{Orb_K(\varphi)}$ かつ、$H_\varphi\equiv H$（一定）であれば、既約表現 $U^{(C,\varphi)}$ は $\mathcal{H}^{\mu}(K\,;\mathcal{K}/H)\times(\hat{N}\setminus\{0\})$ への $\mathcal{K}$ の作用による軌道で決定される。これは、discrete Mautner 群 $\mathbb{D}$ や Mautner 群 $\mathbb{M}$ に対し、有効である。

[注意.5]　(*) の仮定が、どの程度強いものか、未だよく判らない。一般に、単連結な可解リー群を代数群（I型群）に埋め込む有用性は、Pukanszky [5] に示されている。

§6. Mautner群の既約表現

上記で、$N=\mathbb{C}^2$, $K=\mathbb{R}$ とした半直積群 $M=\mathbb{C}^2\times_s\mathbb{R}$ で、積が、

$$(z,w,t)(z',w',t')=(z+e^{it}z',\ w+e^{2\pi it}w',\ t+t')$$

と定義される群が、Mautner群と呼ばれている。これは、連結な5次元可解リー群で、I型でない群として有名である。ここで、$G=\mathbb{C}^2\times_s\mathbb{R}^2$ で、積が、

$$(z,w,t,u)(z',w',t',u')=(z+e^{it}z',\ w+e^{iu}w',\ t+t',\ u+u')$$

と定義される、6次元可解リー群も考え、

$$M\ni(z,w,t)\longmapsto(z,w,t,2\pi t)\in G$$

なる対応で M を G に埋め込み、G の閉部分群と見なす。あとは、§5に従って、non-Mackey表現を求めてみる。

$\widehat{\mathbb{C}^2}\ni\varphi^{(r,s)}$ $\quad r,s\in\mathbb{R}^+$ $\quad \varphi^{(r,s)}_{(z,w)}=e^{i(r,z)}e^{i(s,w)}$

$\widehat{H_\varphi}\ni\chi^\lambda$ $\quad \lambda\in\mathbb{R}$ $\quad \chi^\lambda_{(2\pi m,\,2\pi n)}=e^{2\pi i\lambda m}$

$L^{(\lambda,r,s)}\equiv L^{(\chi^\lambda,\,\varphi^{(r,s)})}$ は G_φ の表現

C^d ; $(G_\varphi;G)$ の M-不変 cocycle (§3、例2)

等を用いて、

$$U^{(\lambda,d,r,s)}\equiv \operatorname*{Ind}_{G_\varphi\xrightarrow[C^d]{}M} L^{(\lambda,r,s)}$$

とおく。これを具体的に書き下してみると、次のような表現になっている。

$\mathfrak{h} = L^2([0,2\pi)\times[0,2\pi)) \ni f(x,y)$ に対し、

$$\left(U^{(\lambda,d,r,s)}_{(z,w,t)} f\right)(x,y) = e^{i\lambda t} e^{\frac{id}{2\pi}x[y+2\pi t]}$$
$$\times e^{\frac{id}{8\pi^2}\{[y+2\pi t]-2y[y+2\pi t]^2\}} e^{i(re^{-ix},z)} e^{i(se^{-iy},w)} f(\overline{x+t},\overline{y+2\pi t})$$

但し、$\mathbb{R}\ni t$ に対し、$t=[t]+\bar{t}$; $[t]\in 2\pi\mathbb{Z}$, $0\leq \bar{t} < 2\pi$ と表わした。（§3、例2の D^d 参照）

この表現は、L、Baggett が D で得た表現（§2）を元に、D を M の部分群とみて、Mackey の方法に従って求めた表現とユニタリー同値になっている。

§7. 具体的なコホモロジー群について.

ここでは、$\mathbb{Z}$ の $\mathbb{T}$ への作用が

$$n\cdot\alpha = e^{in}\alpha \qquad n\in\mathbb{Z}\ ,\ \alpha\in\mathbb{T}$$

で定まる変換群（$\mathbb{Z},\mathbb{T}$）と、$\mathbb{R}$ の $\mathbb{T}^2$ への作用が

$$t\cdot(\alpha,\beta) = (e^{it}\alpha,\ e^{2\pi i t}\beta) \qquad t\in\mathbb{R},\ (\alpha,\beta)\in\mathbb{T}^2$$

で定まる変換群（$\mathbb{R},\mathbb{T}^2$）のコホモロジー群の一部を、求めてみよう。（§3、例1，例2参照）　ここで

$$\mathcal{F} = \{\mathbb{R}\text{上の}\mathbb{T}\text{-値ボレル関数で}\mathbb{Z}\text{-不変なもの全体}\}$$
$$\mathcal{F}_0 = \{b(t)\in\mathcal{F}\ ;\ \exists\, a(t)\in\mathcal{F}\ \text{s.t.}\ b(t)=\overline{a(t)}\,a(t+2\pi)\ \text{a.a.}t\}$$

とおくと、次の命題が成立する。

補題5．$\mathcal{H}^{\mu}_{c}(\mathbb{Z};\mathbb{T})$は、可換群として$\mathcal{F}/\mathcal{F}_0$と同型。

（説明）$(\mathbb{Z},\mathbb{T})$のcocycleを$\mathbb{R}$上のボレル関数$A(x)$と見なすと、

$$a(x)=\overline{A(x)}\,A(x+2\pi)\ \in\mathcal{F}$$

の対応がつく。逆に、$a\in\mathcal{F}$に対し、帰納的な手続きで、cocycleが構成できる。

補題6．$E\oplus\mathbb{Z}\subset\mathcal{H}^{\mu}_{c}(\mathbb{Z};\mathbb{T})$　部分群として　但し$E=\mathbb{R}/\mathbb{Z}+2\pi\mathbb{Z}$

（証明）$A^{(\lambda,d)}(x)=e^{i(\frac{d}{2}x^2+\lambda x)}$　$(\lambda\in\mathbb{R},\ d\in\mathbb{Z}$；例1）のうち、coboundaryを決定する。しかし、補題5により、$a^{(\lambda,d)}(x)=e^{2\pi i(dx+\lambda)}$が、どんな$(\lambda,d)$に対し、$a^{(\lambda,d)}\in\mathcal{F}_0$かを求めれば良い。

$$a^{(\lambda,d)}\in\mathcal{F}_0\iff{}^{\exists}b\in\mathcal{F}\ ;\ a^{(\lambda,d)}(x)=\overline{b(x)}\,b(x+2\pi)\quad a.a.\ x$$

$$\iff{}^{\exists}b\in\mathcal{F}\ ;\ a^{(\lambda,d)}(x)=\overline{b(x)}\,b(x+2\pi)\quad L^2\text{-norm}$$

但し、L^2-normとは、$\mathbb{Z}$-不変な関数cに対し$\|c\|_2=\int_0^1|c(x)|^2dx$。

ここで、　$b(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}b_n e^{2\pi inx}$　　L^2-norm

と展開し、これを、

$$b(x)\,a^{(\lambda,d)}(x)=b(x+2\pi)$$

に代入すると、

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}b_n e^{2\pi i\lambda}e^{2\pi i(n+d)x}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}b_n e^{2\pi in\cdot2\pi}e^{2\pi inx}$$

係数の一意性より、

$$b_n e^{2\pi i\lambda}=b_{n+d}\,e^{2\pi i(n+d)2\pi}$$

を得る。従って、$|b_n|=|b_{n+d}|$となるが、もし、$d\neq0$なら

$\|b\|_2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |b_n|^2 = 1 < \infty$ に矛盾する。依って、少なくとも $d=0$ である。これを元の式に代入すると、

$$b_n e^{2\pi i\lambda} = b_n e^{2\pi i n\cdot 2\pi}$$

$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |b_n|^2 = 1$ より、$b_n \neq 0$ となる n が存在して、

$$e^{2\pi i\lambda} = e^{2\pi i n\cdot 2\pi} \quad \text{即ち、} \quad e^{2\pi i(\lambda - 2\pi n)} = 1$$

を得る。故に $\lambda \in \mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$。逆に、$d=0$, $\lambda \in \mathbb{Z}+2\pi\mathbb{Z}$ なら、$a^{(\lambda,d)} \in \mathcal{F}_0$ は容易に判る。

命題7　$E \oplus \mathbb{Z} \subset E \oplus \mathbb{Q} \subset \mathcal{H}_c^{\mu}(\mathbb{Z};\mathbb{T})$

(証明)　$p \in \mathbb{Z}^+$, $q \in \mathbb{Z}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ に対し、

$$\tilde{a}^{(\lambda,\frac{q}{p})}(x) = e^{2\pi i(\frac{q}{p}x + \lambda)} \qquad 0 \le x < 1$$

から作られる $\mathcal{F}$ の元を $a^{(\lambda,\frac{q}{p})}$ とする。この時、

$$\left(a^{(\lambda,\frac{q}{p})}\right)^p = a^{(p\lambda, q)}$$

の関係がある。従って、もし $a^{(\lambda,\frac{q}{p})} \in \mathcal{F}_0$ なら、$\mathcal{F}_0$ が群である事から、$a^{(p\lambda,q)} \in \mathcal{F}_0$ となり、補題6より、$q=0$ を得る。これを、元の式に代入して、$\lambda \in \mathbb{Z}+2\pi\mathbb{Z}$ を得る。逆は、明らか。

補題8　$\mathcal{H}_c^{\mu}(\mathbb{Z};\mathbb{T})$ は群として、$\mathcal{H}_c^{\nu}(\mathbb{R};\mathbb{T}^2)$ と同型。
(但し、μ は $\mathbb{T}$ のハール測度，ν は $\mathbb{T}^2$ のハール測度)

(説明)　前者の cocycle を、$\mathbb{R}$ 上のボレル関数 $A(x)$ として、

とらえた時、

$$\hat{A}((x,y)) = A\left(x - \frac{1}{2\pi}y\right) \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

の関係で、後者の cocycle $\hat{A}$ を得る。しかも、この対応が、上の同型を与えている。

命題 9、$E \oplus \mathbb{Z} \subset E \oplus \mathbb{Q} \subset \mathcal{H}_c^{\nu}(\mathbb{R}; \mathbb{T}^2)$

(証明) 補題 8 と命題 7 により自明。特に、$E \oplus \mathbb{Z}$ の具体的な代表元は、§3、例 2 を参照。

§8、結果

定理 3、4 の応用として、命題 7、9 を用いると、discrete Mautner 群 $\mathbb{D}$ と、Mautner 群 $\mathbb{M}$ の新しい既約表現 (non-Mackey 表現) が、次のような parametarization として得られる。

$\mathbb{D}$ の表現

$$\boxed{\begin{array}{l} \lambda \in \mathbb{R}, \quad \frac{q}{p} \in \mathbb{Q}, \quad r \in \mathbb{R}^+ \text{ による } U^{(\lambda, \frac{q}{p}, r)} \\ U^{(\lambda, \frac{q}{p}, r)} \cong U^{(\lambda', \frac{q'}{p'}, r')} \Longleftrightarrow r' = r, \ \frac{q'}{p'} = \frac{q}{p}, \ \lambda' - \lambda \in \mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z} \end{array}}$$

$\mathbb{M}$ の表現

$$\boxed{\begin{array}{l} \lambda \in \mathbb{R}, \quad \frac{q}{p} \in \mathbb{Q}, \quad r, s \in \mathbb{R}^+ \text{ によって、} U^{(\lambda, \frac{q}{p}, r, s)} \\ U^{(\lambda, \frac{q}{p}, r, s)} \cong U^{(\lambda', \frac{q'}{p'}, r', s')} \Longleftrightarrow r' = r, \ s' = s, \ \frac{q'}{p'} = \frac{q}{p}, \ \lambda' - \lambda \in \mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z} \end{array}}$$

$p=1$ の時は、L. Baggett の得た表現になっている。(§2, §6)

§9、余談

一般に、非I型群においては、表現の既約分解が一意的でなくなる現象が知られている。そこで、$\mathbb{D}$ 及び $\mathbb{M}$ の factor 表現の既約分解について研究する為に、とりあえず知られている既約表現について、整理してみた。現段階で判った事は、non-smooth な位相変換群のコホモロジーが十分たくさんある事が、分解の一意性の破れる原因の一つとして、考えられる。というのは、次の事実が、$\mathbb{D}$ に関して判った。

$$\pi^{\gamma} = \int_0^{1\,\oplus} U^{(\lambda,0,\gamma)}\, d\mu(\lambda) \qquad \mu \text{ はルベーグ測度}$$

とおくと、π^{γ} は、$\mathbb{D}$ の II_1-factor 表現であり、かつ、

$$\pi^{\gamma} = \int_0^{1\,\oplus} U^{(\lambda,\frac{q}{p},\gamma)}\, d\mu(\lambda) \qquad \forall\, \frac{q}{p} \in \mathbb{Q}$$

となっている。もう少し、一般的な記述に直すと、

$\mathbb{D} = \mathbb{C} \times_s \mathbb{Z}$ において、$\hat{\mathbb{C}} \ni \varphi \neq 0$ に対し、

$$\pi^{\varphi} = {}_{\mathbb{D}}\Big|\operatorname*{Ind}_{G_\varphi \to G} \varphi \quad , \quad U^{(\alpha,c,\varphi)} = \operatorname*{Ind}_{G_\varphi \nearrow \mathbb{D}} L^{(\alpha,\varphi)} \qquad (\S 5\text{参照})$$

$$(\alpha \in \hat{H}_\varphi)$$

をとると、

$$\pi^{\varphi} = \int_{\widehat{H}_{\varphi}}^{\oplus} U^{(\chi, c, \varphi)} \, d\mu(\chi) \qquad \mu \text{ は } \widehat{H}_{\varphi} \text{ のハール測度}$$

となっている。$U^{(\chi, c, \varphi)}$は、定理4により、既約であり、かつ定理3により、cが異なる事で、同値でない表現がたくさんでてくる。（[7]参照）

Reference

[1] L.Baggett; Representations of the Mautner group I, Pacific J.Math., 77,(1978),7-22.

[2] G.W.Mackey; Induced representations of locally compact groups I, Annals Math.,55,(1952),101-139.

[3] _________; Induced representations of groups and quantum mechanics; New York-Amsterdam; W.A.Benjamin,(1968).

[4] E.Effros; Transformation groups and C*-algebras, Ann.of Math.,81, (1965),38-55.

[5] L.Pukanszky; Characters of connected Lie groups, Acta.Math.,133, (1974),81-137.

[6] S.Kawakami; Irreducible representations of certain semidirect product groups,(Preprint).

[7] _________; On the decompositions of some facter representations, (Preprint).