数理解析研究所講究録
第368巻 1979年 224-240

位相群のΠ_n空間へのUnitary表現の特性関数について

鹿児島大学教養部　　酒井幸吉

任意の位相群G上にQuasi-positive definite関数及びQuasi-negative definite関数を導入し，これらの関数とGのΠ_n空間へのCyclic unitary表現の特性関数との関連についてのべる．

はじめに本文中で断りなく使用する記号を宣言しておく．Gの単位元はe，一般の元はg又はhで表わす．G上の連続関数全体の集合をC(G)とする．$\varphi(g)\in C(G)$に対して，$\varphi^*(g)$は$\varphi^*(g)=\overline{\varphi(g^{-1})}$ はよってきまる関数．線形空間の部分集合Aが生成する線形部分空間を$ls\{A\}$と略記する．$\mathbb{C}$，$\mathbb{R}$はそれぞれ複素数体，実数体を表わす．nはいつも任意に固定されたnon-negative integerとする．

§1　GのΠ_n空間へのCyclic unitary表現

まずΠ_n空間の定義からはじめる．いま非退化Hermitian sesqui-linear form $\langle , \rangle$をもつ線形空間$\mathfrak{H}$にて，これの極大負定値部

分空間（$\langle , \rangle$ に関する）の次元が n のとき，$\{\mathfrak{H}, \langle , \rangle\}$ は pre Π_n 空間であるという．この空間の極大負定値部分空間を $\mathfrak{N}$（次元は n），その直交補空間 $\mathfrak{N}^\perp$ を $\mathfrak{P}$ とすると，$\mathfrak{P}$ は正定値部分空間となり $\mathfrak{H}$ は $\mathfrak{N}$ と $\mathfrak{P}$ の直交直和に分解できる：

(1) $\mathfrak{H} = \mathfrak{N} (+) \mathfrak{P}$ （$\mathfrak{H}$ の基本分解という）．

$\mathfrak{H}$ から $\mathfrak{N}$，$\mathfrak{P}$ への射影作用素をそれぞれ N，P とし，$J = P - N$ とおくと，基本分解 (1) に対応して $\mathfrak{H}$ に正定値内積 $(,)_J$ が

(2) $(x, y)_J = \langle Jx, y \rangle$ （$x, y \in \mathfrak{H}$）

で定義できる．$\mathfrak{H}$ には $(,)_J$ より定まるノルムによって位相を与える．いま $\{\mathfrak{H}, (,)_J\}$ が Hilbert 空間になるとき，$\{\mathfrak{H}, \langle , \rangle\}$ は Π_n 空間（Pontrjagin space with negative rank n）という．なお Π_0 空間は Hilbert 空間と考えてよい．任意の pre Π_n 空間は完備化によって，Π_n 空間の中に至る所稠密に埋め込むことができる．[2]，[4] に Π_n 空間についての詳しい解説がある．

さて (pre) Π_n 空間 $\mathfrak{H}$ 上の線形作用 T が全単射で $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$ （$x, y \in \mathfrak{H}$）をみたすとき unitary 作用素であるという．G の (pre) Π_n 空間 $\mathfrak{H}$ への unitary 表現 $\{U_g, \mathfrak{H}\}$ とは，G から $\mathfrak{H}$ 上の unitary 作用素群への準同型 $g \mapsto U_g$ で任意の $x, y \in \mathfrak{H}$ によって定まる G 上の関数 $\langle U_g x, y \rangle$ が連続であるものをいう．この表現 $\{U_g, \mathfrak{H}\}$ を単に一つの文字 U で表わし，その表現空間 $\mathfrak{H}$ を $\mathfrak{H}^U$ とかくことにする．G の Π_n 空間への unitary 表現全体の集合

を $\mathbb{U}_n(G)$ とする．$U\in\mathbb{U}_n(G)$ とし，$f\in\mathfrak{H}^U$ が $\{U_g f : g\in G\}^{\perp}=\{0\}$ をみたすとき，f は U-cyclic であるといい，この様な vector の集合を $cv(U)$ とかく．$cv(U)\neq\phi$ (empty) のとき U は cyclic であるという．$\mathbb{U}_n(G)$ の要素で cyclic なものの全体を $\mathbb{C}\mathbb{U}_n(G)$ で表わす．いま $U\in\mathbb{C}\mathbb{U}_n(G)$，$f\in cv(U)$ に対して，関数 $\varphi(g)=\langle U_g f, f\rangle\in C(G)$ を U の f によって定まる特性関数と呼ぶ．Hilbert 空間への cyclic unitary 表現の場合と同様に次の定理が成立する (cf.[8])．

<u>定理 1</u>　$U^j\in\mathbb{C}\mathbb{U}_n(G)$ の $f_j\in cv(U^j)$ によって定まる特性関数を φ_j $(j=1,2)$ とする．$\varphi_1=\varphi_2$ ならば，$\mathfrak{H}^{U^1}$ から $\mathfrak{H}^{U^2}$ 上への isometric 同型 T で $U_g^2 T=TU_g^1$ かつ $Tf_1=f_2$ なるものが存在する．▨

Π_n 空間 $\mathfrak{H}$ 上の unitary 作用素 T は，Hilbert 空間 $\{\mathfrak{H}, (\ ,\ )_J\}$ (cf.(2)) 上の有界作用素になり，そのノルムを $\|T\|_J$ とかく．一般に $U\in\mathbb{U}_n(G)$ は一様有界 (i.e. $\sup_{g\in G}\|U_g\|_J<\infty$) ではない．このことに関連して次の定理が成立する (cf. [8])．

<u>定理 2</u>　$U\in\mathbb{C}\mathbb{U}_n(G)$ が一様有界であるための条件は U が有界な特性関数をもつことである．▨

<u>注意 1</u>　$U\in\mathbb{U}_n(G)$ とし，$\mathfrak{H}^U$ は n 次元 U-不変負定値部分空間 $\mathfrak{N}$ をもつとする．このとき $\mathfrak{P}=\mathfrak{N}^{\perp}$ も U-不変であり，$\mathfrak{H}^U$ の基本分解 $\mathfrak{H}^U=\mathfrak{N}(+)\mathfrak{P}$ に対応して定まる正定値内積を $(\ ,\ )_J$ (cf. (2)) とすると，U は Hilbert 空間 $\{\mathfrak{H}^U, (\ ,\ )_J\}$ への unitary 表現とみなすことができる．故にこの様な U は一様有界になる．

一方 G が amenable のとき，$U \in \mathfrak{U}_n(G)$ が一様有界ならば，$\mathfrak{H}^U$ は必ず n 次 U-不変負定値部分空間をもつ（cf. [7]）. ▨

§2 Hermitian kernels of finite negative rank

Π_n 空間への cyclic unitary 表現の特性関数を特徴づけるため，標記にあるものを導入する．いま任意の Hermite 行列 H に対して，その負の固有値の個数を $r_-(H)$ で表わすことにする．

<u>定義 1</u>　$G \times G$ 上の連続関数 $K(g,h)$ が次の性質 (a), (b) をもつとき Hermitian kernel of negative rank n であるという：

(a)　$\overline{K(g,h)} = K(h,g)$

(b)　任意の有限個の元 $g_i \in G$ $(1 \le i \le m)$ によって定まる Hermit 行列 $K[g_1, g_2, \cdots, g_m] := (K(g_i, g_j))$ に対して

$$r_-(K[g_1, g_2, \cdots, g_m]) \le n \qquad \cdots (*)$$

であり，しかも $(*)$ にて等号が成立することがある．

この様な $K(g,h)$ の集合を $HK_n(G)$ とかく． ▨

いま $K(g,h) \in HK_n(G)$ を任意に与える．$h \in G$ を固定してえられる関数 $g \mapsto K(h,g)$ と K_h とかき，$C(G)$ の部分空間 $ls\{K_h : h \in G\}$ を $\mathfrak{H}[K]$ とする．$\mathfrak{H}[K]$ の元 $f_1 = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i K_{g_i}$，$f_2 = \sum_{j=1}^{q} \mu_j K_{h_j}$ $(\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C})$ に対して，$\langle f_1, f_2 \rangle_K = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \lambda_i \overline{\mu_j} K(g_i, h_j)$ とおくと，$\langle\ ,\ \rangle_K$ は $\mathfrak{H}[K]$ 上の非退化 Hermitian sesqui-linear form になる．特に次が成立する：

(3) $\langle K_g, K_h \rangle_K = K(g, h)$.

更に次の補題が成立する．

<u>補題 1</u> $\{\mathfrak{H}[K], \langle\,,\,\rangle_K\}$ は pre Π_n 空間である．この完備化を $\{\mathfrak{H}(K), \langle\,,\,\rangle_K\}$ とすると，写像 $G \ni g \mapsto K_g \in \mathfrak{H}(K)$ は弱連続（i.e. 任意の $x \in \mathfrak{H}(K)$ に対して G 上の関数 $g \mapsto \langle K_g, x \rangle_K$ は連続）である． ▨

逆に次も成立する．

<u>補題 2</u> G から Π_n 空間 $\mathfrak{H}$ への写像 $g \mapsto \eta(g)$ に対して，$G \times G$ 上の関数 $K(g, h) := \langle \eta(g), \eta(h) \rangle$ は連続であるとする．$\mathfrak{H}$ の部分空間 $ls\{\eta(g) : g \in G\}$ に含まれる極大負定値部分空間の次元を m $(m \leq n)$ とすると $K(g, h) \in HK_m(G)$ である．特に $\{\eta(g) : g \in G\}^{\perp} = \{0\}$ ならば $K(g, h) \in HK_n(G)$ になる． ▨

§ 3 Quasi-positive definite 関数

<u>定義 2</u> $\varphi(g) \in C(G)$ に対して，$G \times G$ 上の関数 $K(g, h) = \varphi(h^{-1}g)$ が $HK_n(G)$ に属するとき，$\varphi(g)$ は Quasi-positive definite function of rank n であるという．この様な関数全体の集合を $P_n(G)$ で表わすことにする． ▨

$P_0(G)$ は G 上の連続な positive definite 関数の集合に外ならない．いま $U \in \mathbb{C}\mathbb{U}_n(G)$ の $f \in cv(U)$ によって定まる特性関数を $\varphi_f(g)$ とすると，補題 2 より $K(g, h) = \varphi_f(h^{-1}g) = \langle U_g f, U_h f \rangle \in HK_n(G)$．すなわち，$\varphi_f(g) \in P_n(G)$ である．

一方 $\varphi(g)\in P_n(G)$ を任意に与え，$K(g,h):=\varphi(h^{-1}g)\in HK_n(G)$ とする．このとき $K_{g_0}(g^{-1}h)=K_{gg_0}(h)$，$K(gg_1,gg_2)=K(g_1,g_2)$ なる関係が成立するから，pre Π_n 空間 $\mathfrak{H}[K]$ への G の unitary 表現 $g\to U_g'$ を $U_g'f(h)=f(g^{-1}h)$ $(f\in\mathfrak{H}[K])$ によって定義できる．この表現 U' の Π_n 空間 $\mathfrak{H}(K)$ (cf. 補題 1) 上への拡張を U とすると，これは cyclic になる．実際 $f_0=K_e$ とすると，$U_gf_0=K_g$ だから $\mathfrak{H}(K)$ の作り方より，f_0 は U-cyclic である．しかも U の f_0 によって定まる特性関数は $\varphi(g)$ になる：

$$\langle U_gf_0,f_0\rangle_K=\langle K_g,K_e\rangle_K\overset{(3)}{=}K(g,e)=\varphi(g).$$

すなわち $\varphi(g)$ を特性関数にもつ $U\in C\mathbb{U}_n(G)$ が存在する．更に定理 1 より，この様な U は unitary 同値なものを除き一意的にきまる．これを $U(\varphi)$ とかくことにする．以上まとめて

<u>定理 3</u>　$\varphi(g)\in P_n(G)\Leftrightarrow U(\varphi)\in C\mathbb{U}_n(G)$ 及び $f\in cv(U(\varphi))$ が存在して $\varphi(g)$ は $\varphi(g)=\langle U(\varphi)_gf,f\rangle$ と表わされる．

しかも任意の $\varphi(g)\in P_n(G)$ に対して，上の $U(\varphi)$ は unitary 同値なものを除き一意的にきまる．▨

<u>注意 2</u>　(A)　$\varphi_i(g)\in P_{n_i}(G)$ $(i=1,2)$ とすると，適当な整数 m $(0\le m\le n_1+n_2)$ が存在して，和 $\varphi(g)=\varphi_1(g)+\varphi_2(g)$ は $P_m(G)$ に属す．

(B)　一般に $U\in\mathbb{U}_n(G)$，$f\in\mathfrak{H}^U$ に対して，$\varphi(g)=\langle U_gf,f\rangle\in P_m(G)$．ここで m $(\le n)$ は $\mathfrak{H}^U$ の部分空間 $ls\{U_gf: g\in G\}$ に含まれる極大負定値部分空間の次元に等しい．▨

任意の $\mathfrak{U}\in\mathfrak{U}_n(G)$ に対して $\mathcal{E}(\mathfrak{U}):=\{x\in\mathfrak{H}^{\mathfrak{U}}: \mathfrak{U}_g x=x\ (\forall g\in G)\}$ とおくと，$\mathfrak{U}$ が cyclic ならば $\mathcal{E}(\mathfrak{U})$ は高々１次元である．このことに注意して $\mathbb{C}\mathfrak{U}_{n+1}(G)$ の次の様ないくつかの部分集合を定義する:

$$\mathbb{C}\mathfrak{U}_{n+1}(G,\check{\mathcal{E}})=\{\mathfrak{U}\in\mathbb{C}\mathfrak{U}_{n+1}(G):\mathcal{E}(\mathfrak{U})=\{0\}\},$$

$$\mathbb{C}\mathfrak{U}_{n+1}(G,\mathcal{E})=\mathbb{C}\mathfrak{U}_{n+1}(G)\setminus\mathbb{C}\mathfrak{U}_{n+1}(G,\check{\mathcal{E}}).$$

$\mathbb{C}\mathfrak{U}_{n+1}(G,\mathcal{E})$ に属する $\mathfrak{U}$ で，$\mathcal{E}(\mathfrak{U})$ が non-positive, negative definite, neutral になるものの全体をそれぞれ $\mathbb{C}\mathfrak{U}^{N}_{n+1}(G,\mathcal{E})$, $\mathbb{C}\mathfrak{U}^{(-)}_{n+1}(G,\mathcal{E})$, $\mathbb{C}\mathfrak{U}^{(0)}_{n+1}(G,\mathcal{E})$ で表わす．更に $\mathbb{C}\mathfrak{U}^{(0)}_{n+1}(G,\mathcal{E})$ を次の二つに分ける:

$$\mathbb{C}\mathfrak{U}^{(+0)}_{n+1}(G,\mathcal{E})=\{\mathfrak{U}\in\mathbb{C}\mathfrak{U}^{(0)}_{n+1}(G,\mathcal{E}):\ \mathfrak{H}^{\mathfrak{U}}\text{ は }\mathcal{E}(\mathfrak{U})\text{ を含む }\mathfrak{U}\text{不変な２次元}\Pi_1\text{部分空間をもつ}\},$$

$$\mathbb{C}\mathfrak{U}^{(z)}_{n+1}(G,\mathcal{E})=\mathbb{C}\mathfrak{U}^{(0)}_{n+1}(G,\mathcal{E})\setminus\mathbb{C}\mathfrak{U}^{(+0)}_{n+1}(G,\mathcal{E}).$$

従って $\mathbb{C}\mathfrak{U}^{N}_{n+1}(G,\mathcal{E})=\mathbb{C}\mathfrak{U}^{(-)}_{n+1}(G,\mathcal{E})\cup\mathbb{C}\mathfrak{U}^{(0)}_{n+1}(G,\mathcal{E})$ (disjoint union)

$$=\mathbb{C}\mathfrak{U}^{(-)}_{n+1}(G,\mathcal{E})\cup\mathbb{C}\mathfrak{U}^{(+0)}_{n+1}(G,\mathcal{E})\cup\mathbb{C}\mathfrak{U}^{(z)}_{n+1}(G,\mathcal{E})\ \text{(disjoint union)}.$$

上に定義した $\mathbb{C}\mathfrak{U}_{n+1}(G)$ の各部分集合に対応して，$P_{n+1}(G)$ の部分集合 $P_{n+1}(G,\check{\mathcal{E}})$, $P_{n+1}(G,\mathcal{E})$, $P^{N}_{n+1}(G,\mathcal{E})$, $P^{(-)}_{n+1}(G,\mathcal{E})$, $P^{(0)}_{n+1}(G,\mathcal{E})$, $P^{(+0)}_{n+1}(G,\mathcal{E})$, $P^{(z)}_{n+1}(G,\mathcal{E})$ は，$\varphi(g)\in P_{n+1}(G)$ で $\mathfrak{U}(\varphi)$ がそれぞれ $\mathbb{C}\mathfrak{U}_{n+1}(G,\check{\mathcal{E}})$, $\mathbb{C}\mathfrak{U}_{n+1}(G,\mathcal{E})$, $\mathbb{C}\mathfrak{U}^{N}_{n+1}(G,\mathcal{E})$, $\mathbb{C}\mathfrak{U}^{(-)}_{n+1}(G,\mathcal{E})$, $\mathbb{C}\mathfrak{U}^{(0)}_{n+1}(G,\mathcal{E})$, $\mathbb{C}\mathfrak{U}^{(+0)}_{n+1}(G,\mathcal{E})$, $\mathbb{C}\mathfrak{U}^{(z)}_{n+1}(G,\mathcal{E})$ に属するものの全体とする．

また G 上の non-zero real character (i.e. G 上の実数値関数 $r(g)\in C(G)$, $r(g)\neq 0$ で $r(gh)=r(g)+r(h)$ をみたすもの) の集合を $A(G)$ とする．以上の記号のもとに次の二つの補題が成立する．

補題 3　$\mathbb{U}\in\mathbb{CU}^{(-)}_{n+1}(G,\varepsilon)\Leftrightarrow\mathbb{U}=\mathbb{V}\,(+)\,\varepsilon^-$ なる形に分解できる．ただし $\mathbb{V}\in\mathbb{CU}_n(G,\check{\varepsilon})$，$\varepsilon^-\in\mathbb{CU}_1(G,\varepsilon)$ は1次元 Π_1 空間への trivial 表現である．この様な $\mathbb{U}$ に対して

$$cv(\mathbb{U})=\{x+\omega:\ x\in\mathfrak{H}^{\varepsilon^-},x\neq0,\ \omega\in cv(\mathbb{V})\}.$$ ▨

補題 4　$\mathbb{U}\in\mathbb{CU}^{(+0)}_{n+1}(G,\varepsilon)\Leftrightarrow\mathbb{U}=\mathbb{V}\,(+)\,\mathbb{W}$ なる形に分解できる．ただし $\mathbb{V}\in\mathbb{CU}_n(G,\check{\varepsilon})$，$\mathbb{W}$ は $r(g)\in A(G)$ を用いて次の様に定義される：　$\mathbb{W}_g\xi=\xi$，$\mathbb{W}_g\eta=\sqrt{-1}\,r(g)\xi+\eta$．　ここで $\{\xi,\eta\}$ は $\mathfrak{H}^{\mathbb{W}}$ (=2次元 Π_1 空間)のベースで $\langle\xi,\xi\rangle=\langle\eta,\eta\rangle=0$，$\langle\xi,\eta\rangle=1$ をみたすものである．この様な $\mathbb{U}$ に対して

$$cv(\mathbb{U})=\{\alpha\xi+\beta\eta+\omega:\ \alpha,\beta\in\mathbb{C},\alpha\beta\neq0,\ \omega\in cv(\mathbb{V})\}$$ ▨

上の二つの補題と定理3より次の結果をえる．

定理4　$P^{(-)}_{n+1}(G,\varepsilon)=\{p(g)-c:\ p(g)\in P_n(G,\check{\varepsilon}),\ c\in\mathbb{R},\ c>0\}$

$P^{(+0)}_{n+1}(G,\varepsilon)=\{\sqrt{-1}\,r(g)+p(g)+c:\ r(g)\in A(G),\ p(g)\in P_n(G,\check{\varepsilon}),\ c\in\mathbb{R}\}$ ▨

注意 3　$p_i(g)\in P_n(G,\check{\varepsilon})$，$r_i(g)\in A(G)$，$c_i\in\mathbb{R}$ $(i=1,2)$ とする．もし $p_1(g)+c_1=p_2(g)+c_2$ ならば，$p_1(g)=p_2(g)$，$c_1=c_2$ である．実際 $c=c_1-c_2>0$ と仮定すると，定理4より $p_1(g)=p_2(g)-c$ は $P^{(-)}_{n+1}(G,\varepsilon)$ に属する．これは矛盾である（$\because P_n(G)\cap P_{n+1}(G)=\phi$）．従って $p_1(g)=p_2(g)$，$c_1=c_2$ である．同様に，$\sqrt{-1}\,r_1(g)+p_1(g)+c_1=\sqrt{-1}\,r_2(g)+p_2(g)+c_2$ ならば，$r_1(g)=r_2(g)$，$p_1(g)=p_2(g)$，$c_1=c_2$ であることが結論できる． ▨

§4 Quasi-negative definite 関数

$P_{n+1}^{N}(G,\varepsilon)$ に属する関数を統一的に特徴づけるために標記のものを導入する。$\varphi(g)\in C(G)$ に対して $G\times G$ 上の関数 $K^{\varphi}(g,h)$ を

$$(4)\qquad K^{\varphi}(g,h)=\varphi(h^{-1}g)-\varphi(g)-\overline{\varphi(h)}$$

によって定めることにする。

<u>定義 3</u>　$\varphi(g)\in C(G)$ が $\varphi(e)=0$ かつ $K^{\varphi}(g,h)\in HK_n(G)$ のとき Quasi-negative definite function of rank n であるという。この様な関数の集合を $N_n(G)$ とかく。 ▨

$\varphi(g)\in N_n(G)$ ならば $\varphi^{*}(g)=\varphi(g)$ である。なお $N_0(G)$ は negative definite (or conditional positive definite) 関数と呼ばれるもののうち e で zero となるものの集合である (cf. [1], [3])。

<u>注意 4</u>　$\varphi(g)=\sqrt{-1}\,r(g)$ $(r(g)\in A(G))$ とおくと $K^{\varphi}=0$ となるから, $\varphi(g)\in N_0(G)$ である。逆に $\varphi(g)\in N_0(G)$, $\varphi(g)\neq 0$, $K^{\varphi}=0$ ならば, $\varphi(g)$ は $\sqrt{-1}\,r(g)$ $(r(g)\in A(G))$ なる形である。 ▨

任意の $V\in \mathbb{V}_n(G)$ に対して, これの弱連続 1-cocycle (i.e. G から $\mathfrak{h}^{V}$ への弱連続写像 $g\mapsto \eta(g)$ で $\eta(hg)=V_h\eta(g)+\eta(h)$ をみたすもの) の全体を $Z^1(G,V)$ とし, $B^1(G,V)=\{\partial v(g)=V_g v-v : v\in \mathfrak{h}^{V}\}(\subseteq Z^1(G,V))$ とおく。更に

$$Z^1_t(G,V):=\{\eta(g)\in Z^1(G,V) : \{\eta(g) : g\in G\}^{\perp}=\{0\}\},$$

$$B^1_t(G,V):=B^1(G,V)\cap Z^1_t(G,V).$$

$N_n(G)$ と $\mathbb{V}_n(G)$ は次の定理によって関連づけることができる。

定理 5　$\varphi(g)\in C(G)$ に対して $K^{\varphi}\neq 0$ とする．このとき $\varphi(g)\in N_n(G)$ であるための条件は $V\in \mathbb{U}_n(G)$ 及び $\eta(g)\in Z_t^1(G,V)$ が存在して次の関係(5)が成立することである：

$$(5)\qquad \langle \eta(g),\eta(h)\rangle = \varphi(h^{-1}g)-\varphi(g)-\overline{\varphi(h)}\ (=K^{\varphi}(g,h)).$$

十分性は $\eta(e)=0$ なることと補題 2 より明らか．逆に $\varphi(g)\in N_n(G)$，$K^{\varphi}\neq 0$ とすると，次の関係が成立する (cf. §2)：

$$(6)\qquad K^{\varphi}_{g_0}(g^{-1}h)-K^{\varphi}_{g_0}(g^{-1})=K^{\varphi}_{gg_0}(h)-K^{\varphi}_{g}(h)$$

この関係より pre Π_n 空間 $\mathfrak{H}[K^{\varphi}]$ への G の unitary 表現 $g\to V_g'$ を

$$V_g'f(h)=f(g^{-1}h)-f(g^{-1})\qquad (f\in \mathfrak{H}[K^{\varphi}])$$

と定義できる．この表現 V' の Π_n 空間 $\mathfrak{H}(K^{\varphi})$ への拡張を V とする．更に $G\ni g\mapsto \eta(g)=K^{\varphi}_g\in \mathfrak{H}(K^{\varphi})$ によって $\eta(g)$ をきめると，(6) 及び補題 1 より $\eta(g)\in Z_t^1(G,V)$ なることが判る．しかも (3), (4) から (5) が従う．よって定理 5 の必要性が判る．

注意 5　(A)　$\varphi(g)\in N_n(G)$ に対して，(5) をみたす $V\in \mathbb{U}_n(G)$ 及び $\eta(g)\in Z_t^1(G,V)$ は unitary 同値なものを除き一意的にきまる (cf. [9])．この V, $\eta(g)$ を V^{φ}, $\eta_{\varphi}(g)$ で表わすことにする．

(B)　$V\in \mathbb{U}_n(G)$ とする．$\eta(g)\in Z_t^1(G,V)$ を任意に与えたとき，(5) をみたす $\varphi(g)\in C(G)$ が存在するかどうかは明らかではない．もし実数値連続関数 $\psi(g)$ で

$$\mathrm{Im}\langle \eta(h),V_h\eta(g)\rangle=\psi(hg)-\psi(g)-\psi(h)$$

をみたすものがあれば，$\varphi(g)=\sqrt{-1}\,\psi(g)-\frac{1}{2}\mathrm{Re}\langle \eta(g),\eta(g)\rangle$

は (5) をみたす (cf. [9]). ▨

$\varphi(g)\in N_n(G)$ に対応する $\eta_\varphi(g)\in Z_t^1(G,V^\varphi)$ に着目して，$N_n(G)$ を次の二つに分ける:

$$N_n^{(B)}(G)=\{\varphi(g)\in N_n(G):\eta_\varphi(g)\in B_t^1(G,V^\varphi)\},$$
$$N_n^{(Z)}(G)=N_n(G)\setminus N_n^{(B)}(G),$$

ただし $n=0$ の場合 $\sqrt{-1}A(G)\subset N_0^{(B)}(G)$ と考える (cf. 注意4).

$N_n^{(B)}(G)$ に属する関数の形を知るため，次の二つの補題あげる.

補題5　$V\in\mathbb{V}_n(G)$, $\partial v(g)\in B^1(G,V)$ とし，$p(g)=\langle V_g v, v\rangle$ とおく. このとき $\eta(g)=\partial v(g)$ に対して (5) をたす $\varphi(g)$ は存在し，次の形で与えられる:

$$\varphi(g)=\sqrt{-1}\,r(g)+p(g)-p(e),$$

ただし $r(g)=0$ 又は $r(g)\in A(G)$ である. ▨

補題6　$V\in\mathbb{V}_n(G)$, $\eta(g)=\partial v(g)\in B^1(G,V)$ とすると,

$\eta(g)\in B_t^1(G,V)\Leftrightarrow V\in\mathbb{CV}_n(G,\check{\mathcal{E}})$ かつ $v\in cv(V)$. ▨

これらの補題及び注意3より次の結果をえる.

定理6　$\varphi(g)\in N_n^{(B)}(G)\Leftrightarrow\varphi(g)$ は次の (7) 又は (8) で表わされる:

(7)　$\varphi(g)=p(g)-p(e)$,　$(p(g)\in P_n(G,\check{\mathcal{E}}))$,

(8)　$\varphi(g)=\sqrt{-1}\,r(g)+p(g)-p(e)$,　$(r(g)\in A(G),\ p(g)\in P_n(G,\check{\mathcal{E}}))$.

(7), (8) の右辺にある $p(g)$, $r(g)$ は $\varphi(g)$ により一意的にきまる. ▨

次の§での記述を簡単にするため，(7), (8) で与えられる関数 $\varphi(g)$ の集合をそれぞれ $N_n^{(-)}(G)$, $N_n^{(+0)}(G)$ とかく. 従って

$$N_n(G) = N_n^{(-)}(G) \cup N_n^{(+0)}(G) \cup N_n^{(z)}(G) \quad (\text{disjoint union}).$$

注意6　$n=0$ の場合 $N_0^{(-)}(G), N_0^{(+0)}(G), N_n^{(z)}(G)$ は次の様に特徴づけることもできる (cf. [9]). いま $\varphi(g) \in N_0(G)$ とすると,

$\varphi(g) \in N_0^{(-)}(G) \Leftrightarrow$ $\varphi(g)$ は有界,

$\varphi(g) \in N_0^{(+0)}(G) \Leftrightarrow$ $\mathrm{Re}\,\varphi(g)$ は有界, $\mathrm{Im}\,\varphi(g)$ は非有界,

$\varphi(g) \in N_0^{(z)}(G) \Leftrightarrow$ $\mathrm{Re}\,\varphi(g)$ は非有界. ▨

§5　$N_n(G)$, $\mathbb{C}\mathfrak{V}_{n+1}^N(G,\mathcal{E})$ 及び $P_{n+1}^N(G,\mathcal{E})$ の関係

いま $\mathfrak{V} \in \mathbb{C}\mathfrak{V}_{n+1}^{(0)}(G,\mathcal{E})$ (cf. §3), $\eta \in CV(\mathfrak{V})$ とする. このとき neutral vector $\xi \in \mathcal{E}(\mathfrak{V})$ を $\langle \xi, \eta \rangle = 1$ をみたすように選ぶ. $\mathfrak{h}(\xi,\eta:c) := ls\{\xi,\eta\}$ (ただし $c = \langle \eta,\eta \rangle$) とおくと, これは Π_1 部分空間であり, $\mathfrak{h}^{\mathfrak{V}}$ を $\mathfrak{h}^{\mathfrak{V}} = \mathfrak{h}(\xi,\eta:c) \dotplus \mathfrak{h}_0$ ($\mathfrak{h}_0 = \Pi_n$ 部分空間) と分解しておく. この分解に対応して, $\mathfrak{V}$ は次の様に表わすことができる:

$$\mathfrak{V}_g \xi = \xi$$

$$\mathfrak{V}_g w = \langle \mathfrak{V}_g w, \eta \rangle \xi + \mathbb{V}_g w = \langle w, \eta(g^{-1}) \rangle \xi + \mathbb{V}_g w, \quad (w \in \mathfrak{h}_0)$$

$$\mathfrak{V}_g \eta = \varphi(g)\xi + \eta + \eta(g).$$

ここで $\{\mathbb{V}_g, \mathfrak{h}_0\} \in \mathfrak{V}_n(G)$, $\varphi(g) \in C(G)$, $\eta(g) \in Z_t^1(G,\mathbb{V})$ である. しかも $\varphi^*(g) = \varphi(g)$, $\varphi(e) = 0$ かつ次の関係が成立する:

$$\varphi(hg) = \varphi(h) + \varphi(g) + \langle \eta(g), \eta(h^{-1}) \rangle.$$

従って, 定理5より $\varphi(g) \in N_n(G)$ となる. 更に $\mathfrak{V}$ の η によっ

て定まる特性関数は　$\varphi(g)+C$　である.

一方 $\varphi(g)\in N_n(G)$ 及び $C\in\mathbb{R}$ を任意に与える. $\mathcal{V}=\mathcal{V}^{\varphi}\in\mathfrak{U}_n(G)$, $\eta(g)=\eta_{\varphi}(g)\in Z_t^1(G,\mathcal{V}^{\varphi})$ (cf. 注意 5 (A)) とおき, $\mathfrak{H}(\xi,\eta:C)$ は2次元 Π_1 空間で $\langle\xi,\xi\rangle=0$, $\langle\xi,\eta\rangle=1$, $\langle\eta,\eta\rangle=C$ をみたすベース $\{\xi,\eta\}$ をもつものとする. 更に Π_{n+1} 空間 $\mathfrak{H}_C$ を $\mathfrak{H}_C=\mathfrak{H}(\xi,\eta:C)(+)\mathfrak{H}^{\mathcal{V}}$ と定める. このとき, G の unitary 表現 $\mathcal{U}^{(\varphi,C)}=\{\mathcal{U}_g,\mathfrak{H}_C\}$ を

$$\mathcal{U}_g\xi=\xi,\qquad \mathcal{U}_g w=\langle w,\eta(g^{-1})\rangle\xi+\mathcal{V}_g w\quad(w\in\mathfrak{H}^{\mathcal{V}}),$$
$$\mathcal{U}_g\eta=\varphi(g)\xi+\eta+\eta(g)$$

と定義できる. 任意の $C\in\mathbb{R}$, $\varphi(g)\in N_n^{(+0)}(G)\cup N_n^{(z)}(G)$ に対して, $\mathcal{U}^{(\varphi,C)}$ は cyclic であり, $\eta\in cv(\mathcal{U}^{(\varphi,C)})$ となる. すなわち, この場合 $\mathcal{U}^{(\varphi,C)}\in\mathbb{C}\mathfrak{U}_{n+1}^{(0)}(G,\varepsilon)$ である. しかも $\mathcal{U}^{(\varphi,C)}$ の η によって定まる特性関数は　$\varphi(g)+C$　となる.

より詳しく次の定理が成立する (cf [9. §§6-7]).

<u>定理 7</u>　$\mathbb{C}\mathfrak{U}_{n+1}^{(+0)}(G,\varepsilon)=\{\mathcal{U}^{(\varphi,C)}:\varphi(g)\in N_n^{(+0)}(G),\ C\in\mathbb{R}\}$,

$\mathbb{C}\mathfrak{U}_{n+1}^{(z)}(G,\varepsilon)=\{\mathcal{U}^{(\varphi,C)}:\varphi(g)\in N_n^{(z)}(G),\ C\in\mathbb{R}\}$. ▨

<u>定理 8</u>　$P_{n+1}^{(+0)}(G,\varepsilon)=\{\varphi(g)+C:\varphi(g)\in N_n^{(+0)}(G),\ C\in\mathbb{R}\}$,

$P_{n+1}^{(z)}(G,\varepsilon)=\{\varphi(g)+C:\varphi(g)\in N_n^{(z)}(G),\ C\in\mathbb{R}\}$.

特に　$N_n^{(+0)}(G)\subset P_{n+1}^{(+0)}(G,\varepsilon)$, $N_n^{(z)}(G)\subset P_{n+1}^{(z)}(G,\varepsilon)$. ▨

<u>注意 7</u>　$\varphi(g)\in N_n^{(-)}(G)$ の場合, 任意の $C\in\mathbb{R}$ に対して $\mathcal{U}^{(\varphi,C)}$ は $\mathcal{U}^{(\varphi,C)}=\mathcal{V}(+)\mathcal{E}^+$ と分解できる. ただし $\mathcal{V}\in\mathbb{C}\mathfrak{U}_{n+1}^{(-)}(G,\varepsilon)$, $\mathcal{E}^+$ は1次元 Π_0 空間への G の trival 表現である. 従って $\varepsilon(\mathcal{U}^{(\varphi,C)})$

は2次元となり，$U^{(\varphi,c)}$ は cyclic ではない． ▨

上の注意にもかかわらず，$P_{n+1}^{(-)}(G,\varepsilon)$ に属する関数は $N_n^{(-)}(G)$ に属する関数を用いて表わすことができる．いま $\varphi(g)\in N_n^{(-)}(G)$ とすると，定理6より $\varphi(g)=p(g)-p(e)$，$(p(g)\in P_n(G,\check{\varepsilon}))$ なる形で表示され，$p(g)$ したがって $p(e)$ は $\varphi(g)$ に対して一意的にきまる．このことより $\varphi(g)\in N_n(G)$ に対して，$\mu(\varphi)\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ を

$$(9)\quad \mu(\varphi)=\begin{cases} p(e) & (\varphi(g)=p(g)-p(e),\ p(g)\in P_n(G,\check{\varepsilon})) \\ +\infty & (\varphi(g)\in N_n(G)\setminus N_n^{(-)}(G)) \end{cases}$$

と定める．このとき定理4と(7)を比較すると次の定理をえる．

<u>定理9</u>　$P_{n+1}^{(-)}(G,\varepsilon)=\{\varphi(g)+c : \varphi(g)\in N_n^{(-)}(G),\ c\in\mathbb{R},\ c<\mu(\varphi)\}$． ▨

<u>注意8</u>　(A)　$\varphi(g)\in N_n^{(-)}(G)$ とすると，次が成立する．

$$\mu(\varphi)>0 \Rightarrow \varphi(g)\in P_{n+1}^{(-)}(G,\varepsilon)$$

$$\mu(\varphi)=0 \Rightarrow \varphi(g)\in P_n(G,\check{\varepsilon})$$

$$\mu(\varphi)<0 \Rightarrow \varphi(g)\in P_n(G,\varepsilon).$$

(B)　定理8-9と(9)より，$N_n(G)$ と $P_{n+1}^{N}(G,\varepsilon)$ は次で結ばれる．

$$(10)\quad P_{n+1}^{N}(G,\varepsilon)=\{\varphi(g)+c : \varphi(g)\in N_n(G),\ c\in\mathbb{R},\ c<\mu(\varphi)\}.$$ ▨

上の(10)より $\mathbb{C}\mathbb{U}_{n+1}^{N}(G,\varepsilon)$ に属する表現は $N_n(G)$ に属する関数によって完全にきまると考えてよい．

§6　可換群 G 上の $P_1(G)$

この§では G は可換とする．G の unitary character 群を $\hat{G}$，

G 上の連続な non-unitary character (i.e. $\chi(g)\in C(G)$ で，$\chi(gh)=\chi(g)\chi(h)$ をみたし，$\chi^*\neq\chi$ なるもの) の全体を G^* とする．

Naimark [5] によれば，任意の $U\in\mathfrak{U}_n(G)$ に対して，$\mathfrak{H}^U$ はいつも n 次元 U-不変 non-positive 部分空間をもつ．この事実を $n=1$ の場合に適用すると，次の補題をえる (cf. [10])．

<u>補題 7</u>　$\mathbb{C}\mathfrak{U}_1(G)$ は次の様な表現 U^1, U^2 でつくされる：

$$U^1 = \chi_1 \otimes V^1, \quad (\chi_1\in\hat{G},\ V^1\in\mathbb{C}\mathfrak{U}_1^N(G,\varepsilon)),$$

$$U^2 = V^2 \dotplus W, \quad (V^2\in\mathbb{C}\mathfrak{U}_0(G),\ W\in\mathbb{C}\mathfrak{U}_1(G,\varepsilon)),$$

ただし W は $\chi_2\in G^*$ を用いて，$W_g\xi=\chi_2(g)\xi$, $W_g\eta=\chi_2^*(g)\eta$ と定義される．$\{\xi,\eta\}$ は $\mathfrak{H}^W$ (= 2 次元 Π_1 空間) のベースで $\langle\xi,\xi\rangle=\langle\eta,\eta\rangle=0$, $\langle\xi,\eta\rangle=1$ をみすもの．

更に U^1, U^2 の cyclic vector は次で与えられる：

$$cv(U^1) = cv(V^1),$$

$$cv(U^2) = \{\alpha\xi+\beta\eta+w : \alpha,\beta\in\mathbb{C},\ \alpha\beta\neq 0,\ w\in cv(V^2)\}. \qquad \blacksquare$$

この補題と注意 8 (B) より，$P_1(G)$ に属する関数は，unitary character と negative definite 関数，又は non-unitary character と positive definite 関数を用いて表示できる．

<u>定理 10</u>　$\varphi(g)\in P_1(G) \iff \varphi(g)$ は次の (11) 又は (12) と表わされる：

(11)　$\varphi(g) = \chi(g)(\psi(g)+c)$,

ここで　$\chi\in\hat{G}$，$\psi(g)\in N_0(G)$, $c\in\mathbb{R}$, $c<\mu(\psi)$.

(12)　$\varphi(g) = \lambda(\chi(g)+\chi^*(g)) + \mu(\chi(g)-\chi^*(g)) + p(g)$,

ここで $\chi(g)\in G^*$, $p(g)\in P_0(G)$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ で $\lambda^2+\mu^2\neq 0$ なるもの. ▨

注意9 (A) 定理6, 注意6及び定理8より, (11)にある $\varphi(g)$ は次の三つの形で表示されるものに分類できる:

$$\varphi_1(g)=\chi(g)(p(g)-c_1),$$

$$\varphi_2(g)=\chi(g)(\sqrt{-1}\,r(g)+p(g)+c_2),$$

$$\varphi_3(g)=\chi(g)(\psi(g)+c_2),$$

ここで $\chi(g)\in\hat{G}$, $p(g)\in P_0(G,\check{\varepsilon})$, $r(g)\in A(G)$, $\psi(g)\in N_0(G)$ で $\mathrm{Re}\,\psi(g)$ は非有界, $c_1, c_2\in\mathbb{R}$, $c_1>0$ である.

(B) G が局所コンパクトで才2可算公理をみたすとき, G 上の negative definite 関数は "Levy-Khinchin formula" によって統一的に積分表示される(cf.[3],[1]).

(C) この§のはじめにのべた Naimark の結果は, 非可換であっても, G が連結可解群(cf[6])又は連結局所コンパクト amenable 群(cf.[7])の場合にも成立する. 従って, これらの場合にも定理10及び上の(A)は有効である. ▨

References

[1] Berg,C.: Potential theory on locally compact abelian groups, Springer, 1975.

[2] Bognár,J.: Indefinite inner product spaces, Springer, 1974.

[3] Guichardet,A.: Symmetric Hilbert spaces and related topics, Springer, Lecture Notes in Math., Vol. 261(1972).

[4] Iohvidov,I.S. et al.: Spectral theory of operators in spaces with an indefinite metric I, Trudy Moskov Math. Obšč., 5(1956),367-432.

[5] Naimark,M.A.: On commuting unitary operators in spaces with an indefinite metric, Acta Sci. Math., (Szeged), 24(1963),177-189.

[6] ______: Unitary representations of solvable groups in spaces with indefinite metric, Izv. Akad. Nauk SSSR ser. Math., 27(1963), 1181-1185.

[7] Sakai,K.: On J-unitary representations of amenable groups, Sci. Rep. Kagoshima Univ., 26(1977),33-41.

[8] ______: On quasi-positive definite functions and unitary representations of groups in Pontrjagin spaces, J. Math. Kyoto Univ., 19(1979), 71-90.

[9] ______: On quasi-negative definite functions and certain classes of cyclic unitary representations in Π_n-spaces, Sci. Rep. Kagoshima Univ., 28(1979),9-50.

[10] _____: On indecomposable unitary representations of locally compact abelian groups in Π_n-spaces, Ibid., 27(1978),1-20.