数理解析研究所講究録
第 369 巻 1979 年 47-62

2-Knots の Unknotting Number

神戸大 理　鈴木 晋一
神戸大 理　細川 藤次
大阪大 理　前田 亨

$\mathbb{R}^n$および$\mathbb{S}^n$でそれぞれn次元ユークリッド空間，n次元球面を表わす．$\mathbb{R}^n$または$\mathbb{S}^n$における(n-2)次元球面$\mathbb{S}^{n-2}$の位置の問題は、n=3のとき「古典的な結び目」の理論として広く知られており，n≧5のときは「高次元の結び目」の理論として近年大きな発展をした．ところで古典的結び目理論にあっては，結び目射影図と呼ばれる平面図と補空間$\mathbb{R}^3-K$ $(K\cong\mathbb{S}^1)$の基本群が重要である．従って図形的に導入される多くの不変量を持ち，代数的には有限表示を持つ(非可換)無限群の理論が基本的である。一方高次元結び目理論にあっては，一般の位置の議論およびホモロジー代数の手法が本質的役割を演ずる。この2つの結び目問題の谷間にあるのが$\mathbb{S}^2$の$\mathbb{R}^4$(または$\mathbb{S}^4$)における位置の問題であって，両方の理論から多くの結果の拡張がなされているが，まだ十分とは言えない。実際，

結び目射影図ほど完全で取扱い易い図が得られないこと，補空間の基本群だけでは不十分で2次元ホモトピー群が本質的に必要なこと，一般の位置の理論でうまく処理できない部分が多いこと，2次元ホモロジー群がself-dualとなること等々特有のむずかしさがあることが原因と考えられる。

ところで一方，2次元多様体が完全に分類されていることから，$\mathbb{S}^2$を一般の2次元多様体にまで拡げて位置の問題を見直すことは容易であり，Seifert多様体（後に定義がある）がコンパクト3次元多様体で，多少その構造の一般論が存在するという特徴もある。本稿では，これらの点を利用して2つの不変数を導入し，それらとかかわる基本的話題を整理してみようというのが目的である。すべてPL圏で考察する。

§1. 曲面の合成

曲面で，連結・向き付け可能な2次元閉多様体を表わす。曲面Fに対し，g(F)でその種数(genus)を表わす。$\mathbb{R}^4$, $\mathbb{S}^4$には向きを1つ（例えば右手系）固定しておく。曲面の$\mathbb{R}^4$, $\mathbb{S}^4$の中への埋蔵を考察するのであるが，曲面にも常に向きを与え，局所平坦な埋蔵のみを考える。また煩雑を避けて，$\mathbb{S}^4$でのみ議論するが，$\mathbb{R}^4$でも同様な結果が得られる。

1.1 定義：$\mathbb{S}^4$における2つの曲面FとF′が同じ結び目型で

あるとは、向きを保存する同相写像 $\psi: \mathbb{S}^4 \to \mathbb{S}^4$ が存在して次の条件を満すときをいう

(i) $\psi(F) = F'$, (従って $g(F) = g(F')$ である。)

(ii) $\psi|_F : F \to F'$ も向きを保存する。

$\mathbb{S}^4$ における曲面 F の結び目型を $[F]$ で表わす. $\mathbb{S}^4$ の中の標準的2次元球面 $\mathbb{S}^2$ と同じ結び目型の曲面は自明(trivial)と呼ばれ, 平凡型 $[\mathbb{S}^2]$ を構成する.

1.2 定義: F_1 と F_2 を $\mathbb{S}^4$ 内の曲面とし, B_1^4 と B_2^4 を $\mathbb{S}^4$ 内の4次元球体で次の条件を満すものとする: 対 $(B_i^4, B_i^4 \cap F_i)$ は標準的球体の対 (D^4, D^2) と対で同相である $(i = 1, 2)$。このとき、F_1 と F_2 の合成 $F_1 \# F_2$ は、$\mathbb{S}^4$ 内の新しい曲面 F であって、次のようにして構成されたものとする: $\mathbb{S}^4 - \mathrm{Int}\, B_1^4$ と $\mathbb{S}^4 - \mathrm{Int}\, B_2^4$ とを、それらの境界の間の向きを逆転する同相写像 $\zeta : \partial(\mathbb{S}^4 - \mathrm{Int}\, B_1^4) \to \partial(\mathbb{S}^4 - \mathrm{Int}\, B_2^4)$ によって貼り合せる。このとき $\zeta\partial(F_1 - \mathrm{Int}\, B_1^4) = \partial(F_2 - \mathrm{Int}\, B_2^4)$ であって $\zeta|_{F_1 - \mathrm{Int}\, B_1^4}$ もまた向きを逆転する同相写像となるものとする。

上の条件を満す B_1^4, B_2^4 は常に存在し、ζ もまた常に存在する。Newman-Gugenheim ([2]) のいわゆる homogeneity theorem より、合成 $\#$ は up to 結び目型で well-defined であり、結合律を満し、かつ可換な演算となる。従って、曲面の結び目型の間の合成 $\#$ が自然に定義される:

$$[F] = [F_1] \# [F_2] = [F_1 \# F_2].$$

$[F_1] \# [F_2]$ を $[F]$ の<u>分解</u>と呼ぶことにしよう。

次の定理が、2-Knots（種数0の曲面）の場合と同じように成立する。

1.3. <u>定理</u>：（Mazur[7], Suzuki[10, §10]）$\mathbb{S}^4$ 内の曲面のすべての結び目型の集合 $\mathcal{F}$ は、合成 # のもとで可換な半群となる。特に平凡型 $[\mathbb{S}^2]$ は unit である。

2次元球面 $\mathbb{S}^2$ の $\mathbb{S}^4$ 内のすべての結び目型の集合 $\mathcal{K}_2$ もまた、合成 # のもとで可換な半群となり、自然な包含写像 $\mathcal{K}_2 \subset \mathcal{F}$ は単射である。▨

1.4 <u>定義</u>：$[F] \in \mathcal{F}$ が<u>素</u>(prime）であるとは、$[F] \neq [\mathbb{S}^2]$ であって、任意の分解 $[F] = [F_1] \# [F_2]$ について $[F_1]$ と $[F_2]$ の少くとも1方が $[\mathbb{S}^2]$ となるときをいう。

1.5 <u>問題</u>：(i) $[F] \in \mathcal{F}$, $[F] \neq [\mathbb{S}^2]$, に対して素な分解

$$[F] = [F_1] \# \cdots\cdots \# [F_u], \quad [F_i] \text{ が素 } (i=1, \cdots, u)$$

が存在するか？

(ii) もし上の (i) が肯定的ならば、その素分解は一意か？

この極く自然な問題に対して、残念ながら今のところあまり有力な手掛りが無い。$\mathcal{K}_2$ に制限しても未解決である。3次元閉多様体の Kneser-Milnor の素分解定理や Schubert [8] の古典的結び目の素分解定理の証明方法も無力である。

§2. 曲面の結び目種数

次に挙げるよく知られた結果が基本的である。

2.1 <u>命題</u>：(Gluck [1], cf. [4], [10] etc.) 任意の曲面 $F \subset S^4$ に対して、コンパクト、連結、有向な3次元多様体 $V^3 \subset S^4$ が存在して、$\partial V^3 = F$ となる。このような3次元多様体 V^3 を F の <u>Seifert 多様体</u>と呼ぶ。

2.2 <u>定義</u>：(Hosokawa-Kawauchi [3]) 曲面 $F \subset S^4$ が <u>unknotted</u> とは、F の Seifert 多様体 V^3 として種数 $g(F)$ のハンドル体であるものが存在するときをいう。一般に<u>種数 n のハンドル体</u>とは、$D^2 \times S^1$ の n 個のコピーの境界連結和と同相な3次元多様体のことである。この定義は、次の定理によって正当性が保障される。

2.3 <u>命題</u>：(Hosokawa-Kawauchi [3, Cor.1.6]) F と F′ を S^4 内の unknotted な曲面とする。もし $g(F)=g(F')$ ならば $[F]=[F']$ である。

特に unknotted な曲面 $F \subset S^4$ は3次元球面 $S^3 \subset S^4$ の内部に同位変形で押し込められることがわかるから、次の命題が容易に証明される。

2.4 <u>命題</u>：曲面 $F \subset S^4$ が unknotted ならば、補空間の基本群 $\pi_1(S^4 - F)$ は無限巡回群である。▨

ここで Seifert 多様体の方に目を移そう。D を円板とするとき、$N(D)$ によって $D \times [-1, 1]$ と同相な3次元多様体を表わ

し、D は $D\times\{0\}$ に対応するものとする。

よく知られるように (cf. Seifert-Threlfall [9] etc.)、コンパクトで連結で向き付け可能な3次元多様体 $\mathbb{V}^3$ は、次のように表わされる：$\mathbb{V}^3 = T\cup N(D_1)\cup\cdots\cup N(D_k)$；但しTはハンドル体であって、$D_i$ は円板で、$i\neq j$ のとき $N(D_i)\cap N(D_j)=\phi$ であり、$N(D_i)\cap T = \partial N(D_i)\cap\partial T$ は $N(D_i)$ の $\partial D_i\times[-1,1]$ の部分となる。もし $\partial\mathbb{V}^3$ が連結であれば、T の種数を n とするとき、$g(\partial\mathbb{V}^3)=n-k$ が成立するのはもちろんである。上のような $\mathbb{V}^3$ の表現を $\mathbb{V}^3$ の<u>Heegaard 分解</u>と呼び、各 $N(D_i)$ は<u>指数</u>2のハンドルと呼ばれる。この<u>分解の種数</u>は、ハンドル体Tの種数をもって定義され、$\mathbb{V}^3$ の Heegaard 分解の最小の種数を $Hg(\mathbb{V}^3)$ と書き、$\mathbb{V}^3$ の<u>Heegaard種数</u>と呼ぶ。

2.5. <u>定義</u>：曲面 $F\subset S^4$ が<u>結び目種数</u> k である，これを $Kg(F)=k$ で表わす，とは、F の Seifert 多様体 $\mathbb{V}^3$ で Heegaard 分解 $\mathbb{V}^3 = T\cup N(D_1)\cup\cdots\cup N(D_k)$ を持つものが存在し、F の任意の Seifert 多様体 $\mathbb{V}'^3$ とその任意の Heegaard分解 $\mathbb{V}'^3 = T'\cup N(D'_1)\cup\cdots\cup N(D'_h)$ について $k\leqq h$ が成立するときをいう。すなわち、F の Seifert 多様体の Heegaard 分解において、指数2のハンドルの最小個数と考えればよい。結び目種数はもちろん結び目型の不変数だから、[F] の<u>結び目種数</u>が定義され、これを $Kg[F]$ で表わす。

2.6 命題：曲面 $F \subset S^4$ が unknotted $\Longleftrightarrow$ $K_g(F)=0$.

2.7 問題： $[F]=[F_1]\#[F_2]$ とすると、次の等式が成立するか？ $$K_g[F] = K_g[F_1]+K_g[F_2].$$

この問題の答が肯定的ならば、もちろん問題 **1.5** (i) の答も肯定的である。

§3 曲面の unknotting number

命題 **2.1** と 定義 **2.2** と Seifert 多様体の Hegaard 分解の存在から、次の定理が得られる。

3.1 定理：(Hosokawa-Kawauchi [3, Th.2.3]) 任意の曲面 $F \subset S^4$ に対し、有限個の 1-ハンドル $B_1, \cdots, B_u$ が存在し、$B_1, \cdots, B_u$ によって F に hyperboloidal 変換を施して得られる曲面，これを $h^1(F; B_1, \cdots, B_u)$ と書く（定義は [3]），は種数 $g(F)+u$ の unknotted 曲面となる。▨

この定理を基にして、表題の不変数を導入する。

3.2 定義：曲面 $F \subset S^4$ の unknotting number $u(F)$ を，$h^1(F; B_1, \cdots, B_u)$ が unknotted となるような F に対する 1-ハンドル $B_1, \cdots, B_u$ の最小個数として定義する。$u(F)$ ももちろん F の結び目型の不変数だから，$[F]$ の unknotting number が定義され、これを $u[F]$ で表わす。

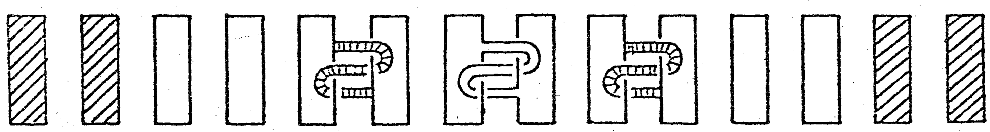
定義から次の命題は明らかであろう。

3.3 <u>命題</u>：任意の曲面 $F \subset \mathbb{S}^4$ について次が成り立つ：

$$0 \leq u(F) \leq Kg(F) < \infty .$$

3.4 <u>定理</u>：任意に与えられた整数 n と u, $n \geq 0$, $u \geq 0$, に対して、曲面 $F \subset \mathbb{S}^4$ が存在し、$g(F)=n$, $u(F)=u$ となる。

<u>証明</u> 任意の整数 $u \geq 0$ に対し、$u(S_u)=u$ なる 2次元球面 $S_u \subset \mathbb{S}^4$ が存在することを示せば十分である。次の図1に示した2次元球面 S_1 が、$u=1$ の場合の図である。但しここでは、$\mathbb{R}^4=\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^1$ と考え、第4座標が t の超平面 $\mathbb{R}^3 \times \{t\}$ と S_1 との共通部分 $S_1 \cap \mathbb{R}^3 \times \{t\}$ を順に平面的に書いたものである。



$t=-3$ $t=-2$ $t=-1$ $t=0$ $t=1$ $t=2$ $t=3$

図1： $S_1 \subset \mathbb{R}^4$

$\mathbb{R}^4$ の1点コンパクト化空間として $\mathbb{S}^4$ を考えれば、求める $\mathbb{S}^4$ 内の曲面が得られる。以下この規則によって曲面を表示する。詳しくは [3], [10] 等を参照されたい。$u(S_1)=1$ であることの証明は、[3] の 2.6 と 2.9 にあるが、直接確かめてもそんなにむずかしくない。実際 S_1 は三葉結び目の twisting によって得られる2次元球面だから、$\pi_1(\mathbb{R}^4-S_1)$ は次の表示を持つ：

$$\pi_1(\mathbb{R}^4-S_1) = \langle x, y \mid xyx=yxy \rangle .$$

よって $\pi_1(\mathbb{R}^4-S_1) \not\cong \mathbb{Z}$ だから、命題**2.4** より $u(S_1) \geq 1$ が

結論される。よってうまく 1-ハンドルを1つ付加して、unknotted な種数1の曲面を作ればよいわけである。

このS$_1$を用いて、任意の $u \geqq 2$ に対して求める2次元球面 S_u を、S_1 の u 個のコピーの合成として構成する；$S_u = S_1 \# \cdots \# S_1$。unknotting number の定義から

$$u(S_u) \leqq u(S_1) + \cdots + u(S_1) = u$$

が得られるから、$u(S_u) \geqq u$ を証明すればよいことになる。

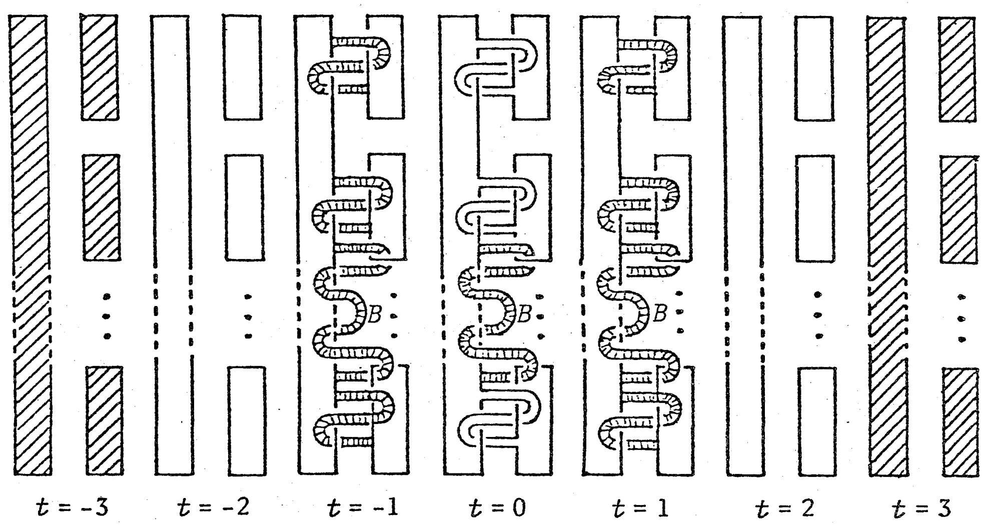


図2：$S_u \subset \mathbb{R}^4$，と 1-ハンドル B

基本群 $G_u = \pi_1(\mathbb{R}^4 - S_u)$ は次の表示を持つ：

$$G_u = \langle x, y_1, \cdots, y_u \mid x y_i x = y_i x y_i \quad (i=1, \cdots, u) \rangle$$

$$= \left\langle \begin{array}{l} x, y_1, \cdots, y_u, \\ a_{10}, a_{11}, \cdots, a_{u0}, a_{u1} \end{array} \middle| \begin{array}{ll} y_i = a_{i0} x, & a_{i1} = x a_{i0} x^{-1}, \\ x y_i x = y_i x y_i & (i=1, \cdots, u) \end{array} \right\rangle$$

$$= \left\langle x, a_{10}, a_{11}, \cdots, a_{u0}, a_{u1} \;\middle|\; \begin{array}{c} x a_{i0} x^{-1} = a_{i1},\ x a_{i1} x^{-1} = a_{i0}^{-1} a_{i1} \\ (i=1, \cdots, u) \end{array} \right\rangle.$$

a_{i0} も a_{i1} も G_u の交換子群 $G'_u=[G_u, G_u]$ の元であるから、G_u のこの表示から、G'_u は $a_{10}, a_{11}, \cdots, a_{u0}, a_{u1}$ によって生成される階数 $2u$ の自由群であることが結論される。従って $G''_u=[G'_u, G'_u]$ とおけば、G'_u/G''_u は階数 $2u$ の自由アーベル群である。

さて、$B\cong[-1,1]\times D^2$ を S_u に貼り付く 1-ハンドルとしよう。もし必要あれば B を S_u 上でスライドさせることによって attaching 0-次元球面 $\{-1\}\times\{0\}\cup\{1\}\times\{0\}$, $0\in D^2$, は図2の中の $S_u\cap\mathbb{R}^3\times\{0\}$ の左側の大きな矩形上にあるとしてよい。更に S_u の構造から、core $[-1,1]\times\{0\}$ は $\mathbb{R}^3\times\{0\}$ に含まれるように B を $\mathbb{R}^4-S_u$ で変形することができる。B は十分に細いと考えてよいから、図2に一例を示した如く、$\mathbb{R}^3\times\{-1\}$ と $\mathbb{R}^3\times\{1\}$ の間に積み上げられた状態にあるとして一般性を失わない。(例えば [10] の 2.6 の証明を参照されたい。)

この結果、S_u に 1-ハンドル B を付加したとき、得られた曲面 $h^1(S_u;B)$ について、基本群 $\pi_1(\mathbb{R}^4-h^1(S_u;B))$ は表示

$$\left\langle x, a_{10}, a_{11}, \cdots, a_{u0}, a_{u1} \;\middle|\; \begin{array}{l} x a_{i0} x^{-1}=a_{i1}, \quad x a_{i1} x^{-1}=a_{i0}^{-1}a_{i1} \\ \qquad (i=1,\cdots,u) \\ w x w^{-1} x^{-1}=1 \end{array} \right\rangle$$

を持つ。ここで w は $a_{10}, a_{11}, \cdots, a_{u0}, a_{u1}$ の語であって、G_u の交換子群に属する; $w\in G'_u$。(この表示の求め方については、例えば [10] の §3 を参照されたい。)

階数 $2u$ の自由アーベル群 G'_u/G''_u の中で考えれば、w は $\prod_{i=1}^{u} a_{i0}^{m_i} a_{i1}^{n_i}$ と表わされる。従って、G_u/G''_u の中では次を得る:

$$R = wxw^{-1}x^{-1} = \left(\prod_{i=1}^{u} a_{i0}^{m_i} a_{i1}^{n_i}\right) x \left(\prod_{i=1}^{u} a_{i0}^{m_i} a_{i1}^{n_i}\right)^{-1} x^{-1}$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{u} a_{i0}^{m_i} a_{i1}^{n_i}\right)\left(\prod_{i=1}^{u} (x a_{i0}^{-m_i} x^{-1})(x a_{i1}^{-n_i} x^{-1})\right)$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{u} a_{i0}^{m_i} a_{i1}^{n_i}\right)\left(\prod_{i=1}^{u} a_{i1}^{-m_i} \cdot a_{i0}^{n_i} a_{i1}^{-n_i}\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{u} a_{i0}^{m_i+n_i} a_{i1}^{-m_i} .$$

ここで元 R の G_u/G''_u における正規閉包を調べてみよう。

$$xRx^{-1} = x\left(\prod_{i=1}^{u} a_{i0}^{m_i+n_i} a_{i1}^{-m_i}\right) x^{-1} = \prod_{i=1}^{u} (x a_{i0}^{m_i+n_i} x^{-1})(x a_{i1}^{-m_i} x^{-1})$$

$$= \prod_{i=1}^{u} a_{i1}^{m_i+n_i} \cdot a_{i0}^{m_i} a_{i1}^{-m_i} = \prod_{i=1}^{u} a_{i0}^{m_i} a_{i1}^{n_i} = w;$$

$$x^2 R x^{-2} = x \cdot xRx^{-1} \cdot x^{-1} = xwx^{-1} = wR^{-1} .$$

従って R の G_u/G''_u における正規閉包は、高々2つの元 w と $R = wxw^{-1}x^{-1}$ によって生成されることがわかる。すなわち，$wxw^{-1}x^{-1}$ の形の語1つにつき，G'_u/G''_u においては高々2つの独立な元しか得られないことになる。G'_u/G''_u は階数 $2u$ の自由アーベル群であったから、G_u/G''_u 従って G_u を無限巡回群にする為には、少くとも u 個の $wxw^{-1}x^{-1}=1$ という型の関係式が必要であると結論される。言い換えれば

S_u に 1-ハンドルを付加して unknotted な曲面にする為には少くとも u 個の 1-ハンドルが必要であるということになる。これは，$u(S_u) \geqq u$ を示し，証明は完了した。▨

この定理 **3.4** の系として，結び目種数についても同様の存在定理が得られる：

3.5 <u>系</u>：任意に与えられた整数 $n \geqq 0$ と $u \geqq 0$ に対し，曲面 $F \subset S^4$ が存在し，$g(F) = n$，$Kg(F) = u$ となる。

<u>証明</u>　図1で与えた2次元球面 S_1 については，$Kg(S_1) = 1$ が容易に確認される。定義から，$Kg(S_u) \leqq u$ は明らかで，命題 **3.3** と合せて，$Kg(S_u) = u$ が結論される。▨

定理 **3.4** の証明中に与えた S_u は，$u \geqq 2$ については素ではないので，当然次の疑問が生ずる。

3.6 <u>問題</u>：任意に与えられた整数 $n \geqq 0$ と $u \geqq 0$ に対し，素な曲面 $F \subset S^4$ で，$g(F) = n$，$u(F) = u$ となるものが存在するか？

この問題に対しては，群論的な候補はたくさん持ち合せている（例えば［5］の Example 3.6）のであるが，実際に曲面が素であることの証明がむずかしく，従って **3.6** はまだ解決されていない。前述の命題 **2.4** で，F が2次元球面の場合に，この命題の逆が証明されれば，**3.6** の肯定的解答が得られることは容易に想像されるだろう。

定理3.4 の証明からもう一つ自然な疑問が生ずる。それは問題2.7 に対応する問題が、unknotting number については正しいのではなかろうか…… というものであるが、残念ながらこれは否定的である。

3.7 <u>定理</u>: $[F]=[F_1]\#[F_2]$ であっても、$u[F]=u[F_1]+u[F_2]$ は必ずしも成立しない。

<u>証明</u> 今度も $\mathbb{R}^4$ に図を描く。F_1 と F_2 をそれぞれ次の図3と図4に示した種数1の曲面とする。基本群 $G_1=\pi_1(\mathbb{R}^4-F_1)$ および $G_2=\pi_1(\mathbb{R}^4-F_2)$ はそれぞれ次の表示をもつ:

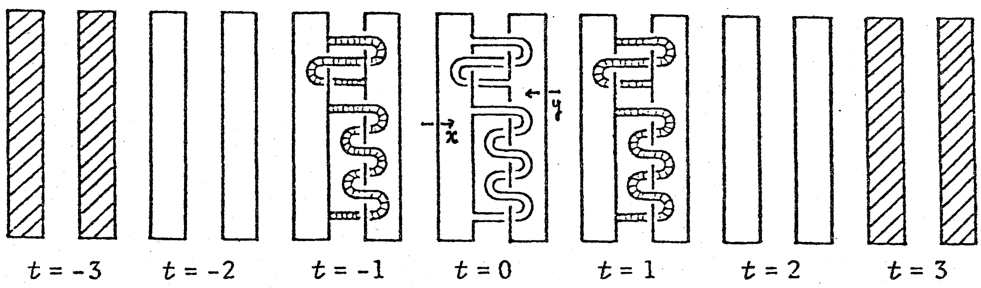


図3 : $F_1 \subset \mathbb{R}^4$

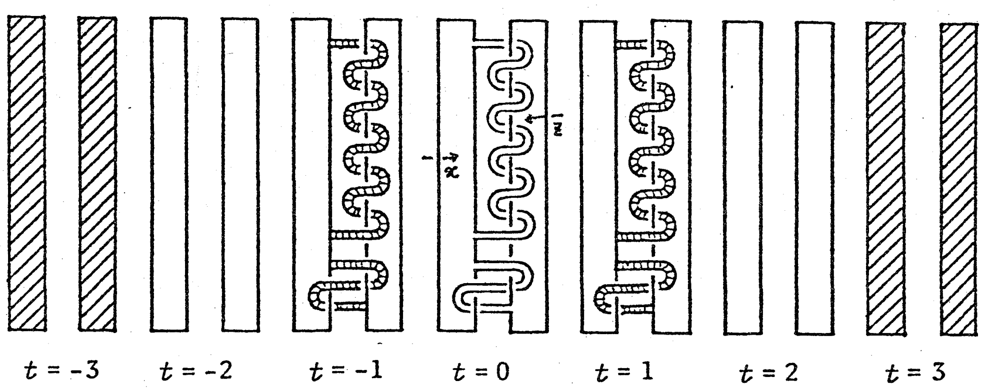


図4 : $F_2 \subset \mathbb{R}^4$

$$G_1 = \langle x, y \mid xyx = yxy,\ xy^3 = y^3x \rangle,$$
$$G_2 = \langle x, z \mid xzx = zxz,\ xz^5 = z^5x \rangle。$$

G_1 と G_2 はそれぞれ 三葉型結び目の 3-twist-spun と 5-twist spun によって得られる 2次元球面の結び目群であるから、$G_1 \not\cong \mathbb{Z} \not\cong G_2$ が結論される（Zeeman [11] 参照）。従って $u(F_1) \geqq 1$ かつ $u(F_2) \geqq 1$ がわかるが、定理3.4 の証明における S_1 の場合と同様にして、$u(F_1) = u(F_2) = 1$ であることは容易に確められる。そこで合成 $F = F_1 \# F_2$ について、$u(F) = 1$ を示そう。次の図5は、$F = F_1 \# F_2$ に 1つの 1-ハンドル B

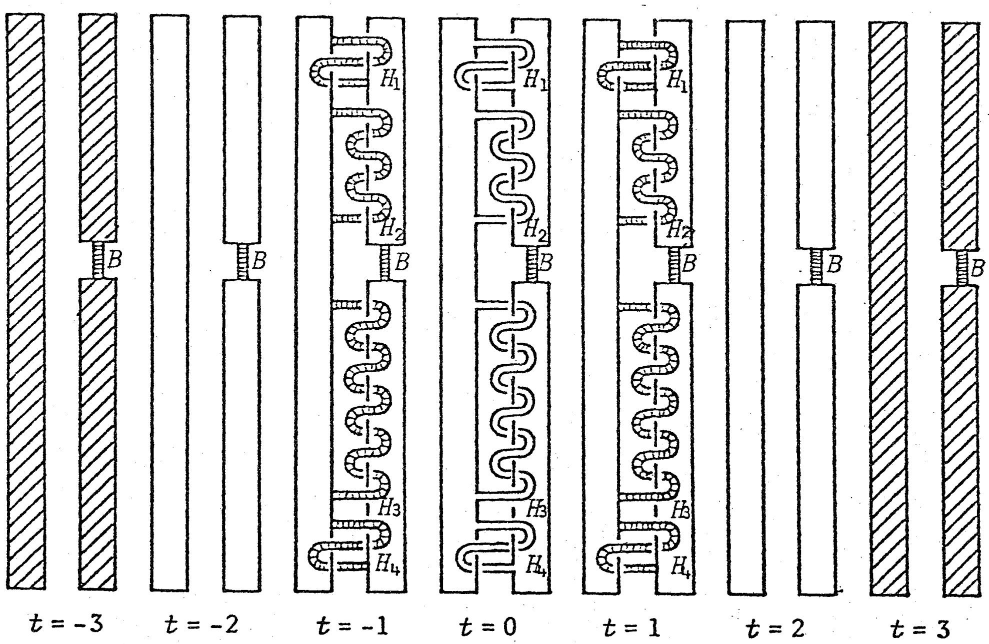


図5：$F = F_1 \# F_2$ と 1-ハンドル B

とを示してある。また F_1 と F_2 のハンドル状の部分にそれ

それ H_1, H_2, H_3, H_4 と、図のように名付ける。種数3の曲面 $F' = h^1(F;B)$ 上で、これら H_1, H_2, H_3, H_4 の attaching 0-spheres を sliding させ、また適当に4次元的上下を交換することによって、図6に示した F' の表現 $F'' \subset \mathbb{R}^4$ を得る。(ただしこの

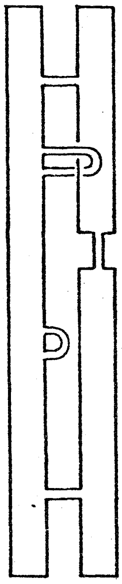


図6：$F'' \cap \mathbb{R}^3 \times \{0\}$

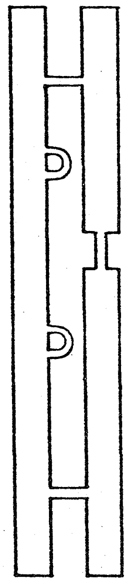


図7：$F''' \cap \mathbb{R}^3 \times \{0\}$

図6および次の図7では、$\mathbb{R}^3 \times \{0\}$ との交叉の図のみを示したので、残りは適当に補って下さい。) F'' を $\mathbb{R}^4$ で同位変形により次の図7の位置に移せることも、定理3.4の曲面 S_1 について $u(S_1) = 1$ を示すのと同じ手法で、容易にわかる。F''' の状態になれば、$u(F''') = u(F') = 1$ は明らかであろう。▨

上の証明では、G_1, G_2 が 2-Knots の群であるにもかかわらず、曲面 F_1, F_2 は種数1であった。一応次の問題を提起

しておこう。

3.8 問題: $[F_1], [F_2] \in \mathcal{K}_2$ とし, $[F] = [F_1] \# [F_2]$ とすると, 等式 $u[F] = u[F_1] + u[F_2]$ が成立するか?

3.9 問題: $u[F] \neq K_g[F]$ なる曲面 $F \subset S^4$ が存在するか?

もちろん上の定理3.7の証明に用いた曲面 $F = F_1 \# F_2$ がこの第一候補であるが, $K_g[F] \neq 1$ がなかなか証明できない。

参考文献

[1] H. Gluck : The embeddings of two-spheres in the four-sphere, Trans.Amer. Math.Soc., 104 (1962), 308-333.

[2] V.K.A.M. Gugenheim : Piecewise linear isotopy and embedding of elements and spheres I, Proc.London Math.Soc., 3 (1953), 29-53.

[3] F. Hosokawa and A. Kawauchi : Proposals for unknotted surfaces in four-spaces, Osaka J. Math., 16 (1979), 233-248.

[4] A. Kawauchi and T. Shibuya : Descriptions on surfaces in four-space, mimeographed notes, 1976, Kobe Univ.

[5] T. Maeda : Knot groups as commutator extension (in Japanese), Master Thesis, Kwansei Gakuin Univ., 1977.

[6] ———— : On a composition of knot groups II — Algebraic bridge index, Math.Sem.Notes Kobe Univ., 5 (1977), 457-464.

[7] B. Mazur : On the structure of certain semi-groups of spherical knot class, Pub.Math.I.H.E.S., 3 (1959), 5-17.

[8] H. Schubert : Die eindeutige Zerlegbarkeit eines Knots in Primknoten, S.B.-Heidelberger Akad.Wiss.Math.Natur.Kl., 3 (1949), 57-104.

[9] H. Seifert and W. Threlfall : Lehrbuch der Topologie, Teubner, Leipzig, 1934. reprint Chelsea, New York, 1947.

[10] S. Suzuki : Knotting problems of 2-spheres in 4-sphere, Math.Sem.Notes Kobe Univ., 4 (1975), 241-371.

[11] E.C. Zeeman : Twisting spun knots, Trans.Amer.Math.Soc., 115 (1965), 471-495.