数理解析研究所講究録
第 369 巻 1979 年 63-70

knots の Union の一般化

北大 理　酒井 健

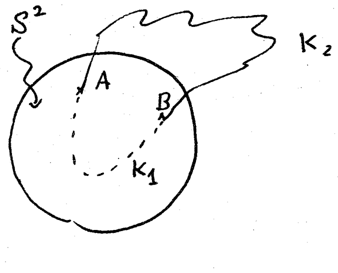
Kinoshita-Terasaka [1] において導入された knots の Union を拡張し，unknotting number 1 をもつ knot の primeness の問題との関係を述べる。

K_1, K_2 を S^3 の 2 つ (tame な) knots とする。integer $n (\geq 0)$ に対して，記号 $K_1 \boxplus_n K_2$ は，次の様にして構成された knot の集合を表わす：

K_1 と K_2 の connected sum を $\overline{K}$ とし，decompose する 2-sphere を S^2 とする：

$$\overline{K} = K_1 \underset{S^2}{\#} K_2$$

$\overline{K} \cap S^2 = \{A, B\}$ とおく。



Γ を S^3 に embed された arc で，次の条件をみたすものとする：

(i) $\Gamma \cap \overline{K} = \partial\Gamma \cap \overline{K} = \{a, b\}$ (= 2 points) $\subset \overline{K} - \{A, B\}$.

(ii) Γ と S^2 は general position にあり，$\#(\Gamma \cap S^2) = n$ である。

そこで，$\Gamma\cap S^2$ の n 個の点に，Γ 上でみて，a の方から順に番号をつけ，$a_1, \cdots, a_n$ とする。

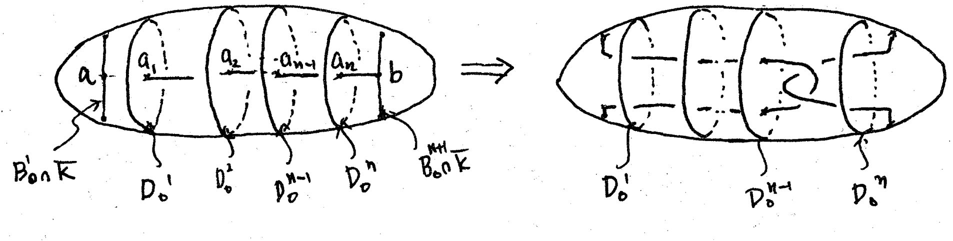
次に，Γ の regular n.b.d. B_0 を，次の条件をみたすようにえらぶ：

(iii) $B_0\cap S^2$ の各 connected component は 2-disc で，$\Gamma\cap S^2$ の点を，各々 1点ずつ含む。

D_0^i を，$B_0\cap S^2$ の conn. comp. で，a_i を含むものとすると，B_0 は，$D_0^1\cup\cdots\cup D_0^n$ によって，$(n+1)$ 個の 3-cell に分割されるが，それらを，a を含むものから順に，$B_0^1, \cdots, B_0^{n+1}$ とすると，

(iv) $B_0\cap\bar{K}=(B_0^1\cap\bar{K})\cup(B_0^{n+1}\cap\bar{K})$ で，$(B_0^1, B_0^1\cap\bar{K})$，$(B_0^{n+1}, B_0^{n+1}\cap\bar{K})$ は，ともに，trivial cell-pair (i.e. $\cong(B^2\times B^1, 0\times B^1)$) である。

すると，B_0 は，抽象的には下図左の如くみえる。そこで，$\bar{K}$ から $\bar{K}\cap B_0$ を取り除き，下図右の 2本の arc で置き換えて，$\bar{K}$ から得られる knot を K_Γ (単に K) とかく。



上の条件をみたすあらゆる Γ から，上の様にして得られた knot K の集合が $K_1\oplus_n K_2$ である。

とくに，$K_1\oplus_1 K_2$ が，Kinoshita-Terasaka [1] の意味での Union である。

我々が、$K_1 \circledast_n K_2$ を考える理由は、次の事実に基づく：

まず、次の命題 $U(n)$ $(n \geq 0)$ を考える：

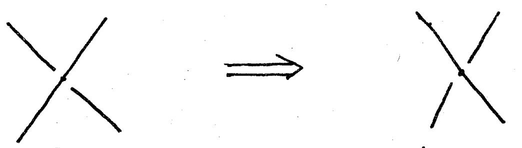
$U(n)$ ： K_1 と K_2 を、non-trivial knot とすると、$\forall K \in K_1 \circledast_n K_2$ に対して、K は non-trivial knot である。

すると、次のことが容易にわかる。

<u>Prop.</u> $\forall n$ に対し、$U(n)$ が正しい。

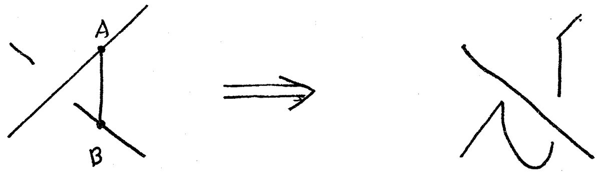
$\Longleftrightarrow$ unknotting number 1 をもつ knot は prime である。

proof) $\Rightarrow$). $\overline{K}$ を unknotting number 1 の knot とし、non-trivial な knots K_1, K_2 があって、$\overline{K} = K_1 \#_{S^2} K_2$ となったとする。$\overline{K}$ の regular projection を選んで、ある crossing point で、上下道を入れ換えて、trivial knot になったとする：



$\overline{K}$　　　　trivial knot.

overcrossing point $\overset{A}{\frown}$ と undercrossing point $\overset{B}{\frown}$ を vertical に結ぶ arc を Γ とする：



$\overline{K}$　　　　trivial

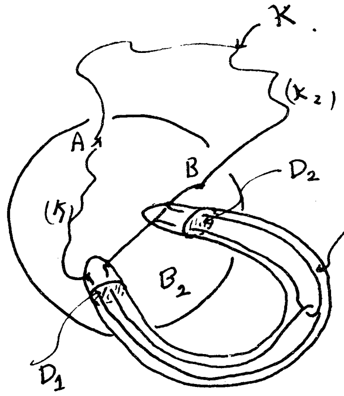
Γ と S^2 とは、general position にあるとしてよい。$\#(S^2 \cap \Gamma) = n$ とすれば、trivial knot $\in K_1 \circledast_n K_2$ となって、矛盾。

逆も、ほとんど明らかである。□

そこで、$U(n)$について、知られていることを、次にのべる。

Th.0. (Schubert)

$U(0)$は正しい。□



Th.1. (Kinoshita–Terasaka)

$U(1)$は正しい。□

筆者は、次の事を証明した。

Th.2. $U(2)$は正しい。

以下に、証明のoutlineを示す。

$n=2$であるから、$\partial\Gamma=\{a,b\}\subset K_1$とする。(上図)

$B_0^2=B_1$, S^2に関して、K_1を含む3-cellをB_2, $B_1\cup B_2=V$とおく。

Vはsolid torus。$D_0^i=D_i$ $(i=1,2)$とおく。

lemma.0. $K\in K_1 の_2 K_2$に対し、上のVを考えた時、次の(i)〜(iii)をみたす(W, D)が存在するなら、K_1はtrivial knotである。

(i) D: disc in S^3 s.t. $\partial D=K$.

(ii) W: solid torus in S^3 s.t. $V\subset\mathring{W}$ かつ $V\not\simeq 0$ in W

($V\not\simeq 0$ は homotopic to 0 でないことを意味する).

(iii) $D\subset\mathring{W}$ □

(証明は、Wのuniversal coverを考える。(略)).

このlemmaを用いて、次のことがわかる。

lemma.1. trivial knot $\in K_1 の_2 K_2$で、VがS^3の中でknotしてい

る（ V の core が knot している ）なら，K_1 は trivial knot である。

よって，Th. 2. の証明において，V が unknotted の時のみ示せばよい。

Th. 2. の証明.

K_1, K_2 : non-trivial，$K \in K_1 \#_2 K_2$ が trivial knot，上の V が unknot と仮定して，矛盾を導く。この時，

lemma 2. 次の様な disc D が存在する.

(i) $\partial D = K$.

(ii) $D \cap \partial V = l \cup c_1 \cup \cdots \cup c_n$ で，l は A と B を結ぶ simple arc，c_i は simple closed curve.

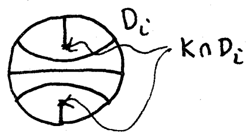
(iii) c_i は innermost on D で，c_i が D 上で bound する disc を d_i とすると，$d_i \subset \overline{V^c}$.（$d_i$ は V の外側で張っている）

(iv) c_i は，次の2つの場合のいずれか.

(イ) c_i は V の longitude (i.e. $c_i \not\sim 0$ on ∂V).

(ロ) $c_i \sim 0$ on ∂V のときは，c_i は ∂V 上で disc d_i' を bound するが，d_i' は l を内部に含んでいる。

(v) $D \cap D_i \subset D_i$ $(i=1,2)$ は下図の如くである。



(vi) l 又は c_j の subarc γ_1 と，∂D_i $(i=1 \text{ or } 2)$ の subarc γ_2 とでできた closed curve γ が，∂V 上で，$\partial(D_1 \cup D_2)$ とは γ_2 のみで交わ

る disc d を bound する時には、d の内部に必ず A 又は B が含まれている。

$m_i = \#(\ell \cap \partial D_i)$ $(i=1,2)$ とすると、上の (vi) の条件より、$m_1 = m_2$ がわかるから、$m = m_1 = m_2$ とおく。

$P_{ij} = \#(c_j \cap \partial D_i)$ とおくと、同様に $P_{1j} = P_{2j}$ で $\equiv P_j$ とおく。さらに、$P_1 + \cdots + P_\mu = P$ とおく。

$D_0 = D \cap V$ として、$D_0 \cap (D_1 \cup D_2)$ を D_0 で観察する。

$N_0 = \#(\partial D_0 \cap (\partial D_1 \cup \partial D_2))$ とおくと、

$$N_0 = \#(\ell \cap \partial D_1) + \#(\ell \cap \partial D_2) + \sum_{i=1}^{\mu} \#(c_i \cap \partial D_1) + \sum_{i=1}^{\mu} \#(c_i \cap \partial D_2) + 4$$
$$= 2m + 2P + 4.$$

そこで、上の N_0 個の点を結ぶ ∂D_0, $D_0 \cap (D_1 \cup D_2)$ の subarc は

$N_1 = \frac{3}{2} N_0$ 本（N_0 コの各点に3本ずつ集まるから）あるが、これらを $\lambda_1, \ldots, \lambda_{N_1}$ とする。そこで、$O_1, \ldots, O_{N_2}$ を、$D_0 - \bigcup_{i=1}^{N_1} \lambda_i$ の connected components とする。

ここで上の m, P_i について、$m \leq 1$ or ${}^\exists i \leq \mu$ $P_i \leq 2$ なら、K_2 が unknot となって矛盾ゆえ、$m \geq 2$ かつ、${}^\forall i$, $P_i \geq 3$ としてよい。

そこで、上の $\{O_i\}$ に関して場合分けする。

Case 1. 各 O_i が open 2-cell の時。

この時、N_0 個の points を 0-cell, $\lambda_1, \ldots, \lambda_{N_1}$ を 1-cell, $\overline{O}_1, \ldots, \overline{O}_{N_2}$ を 2-cell とする D_0 の cell 分解が与えられたこと

になる。簡単のため，O_i の closure も O_i とかくことにする。
次の言葉を使う：O_i が m-辺形 とは，∂O_i が m 個の 1-cell からなっている時。
そこで，まず次式が成立する：

$$N_0 - N_1 + N_2 = 1 - \mu.$$

これより，

$$N_2 = \frac{1}{2}N_0 + 1 - \mu = m + p + 3 - \mu \qquad (*)$$

次に，$O_1, \cdots, O_{N_2}$ を次の様に分類する。

i) ∂O_i が knot 上の点を含む。

（この様な O_i の個数は，高々 5 個）

ii) ∂O_i が，knot 上の点を含まない。これをさらに分ける。

イ) $O_i \subset B_1$　　　ロ) $O_i \subset B_2$

ハ) の 2-cell が α コ，ロ) の 2-cell が β コとする。

<u>Assertion 1.</u> 上の ii) のイ) の 2-cell は，2辺形，4辺形，6辺形ではありえない。□

このことより，次の2組の式のうち，一方が成り立つ：

$$① \begin{cases} \alpha + \beta + 4 \geq N_2 \\ m + p - 2 \geq 4\alpha \end{cases} \qquad ② \begin{cases} \alpha + \beta + 5 \geq N_2 \\ m + p - 4 \geq 4\alpha \end{cases}$$

<u>Assertion 2</u> ii) の ロ) の 2-cell に，2辺形が含まれていれば，[U(4)] に帰着されて，矛盾が出る。□

よって，ii) の ロ) の 2-cell は，すべて，4辺形以上としてよい。

そこで，更に，次の２つの場合に分ける．

A) ii)の D)の 2-cell に，実際4辺形が含まれる場合．

B) ii)の D)の 2-cell は，すべて6辺形以上の時．

A) の時には次式が成立する．

$$2\beta \le p+m-1-2\mu \quad \cdots \quad (**)A$$

B) の時

$$3\beta \le p+m-1 \quad \cdots \quad (**)B.$$

(*)と{①,②}，{(**)A, (**)B}の，いずれの組み合せ（例えば{(*), ①, (**)A}）からも，矛盾がでて（単純計算）Case 1. の証明がおわる。

Case 2. は，cell-decomposition になっていない場合であるが，cell-分割になっている部分を取り出して，上と同様の議論をする。以上で略証おわり。

$n \geq 3$ については，今の所不明である。

Reference.

[1] Kinoshita-Terasaka: Osaka Math. J. 9 (1957) 131～153

[2] H. Terasaka: Osaka Math. J. 12 (1960) 113～144.

[3] H. Schubert: Sitzungsber. Akad. Wiss. Heidelberg, math.-nat. Kl., 3. Abh. (1949)