数理解析研究所講究録
第369巻 1979年 110-121

Knotsの Enumerationの話題から

神戸大 理学部 中西 康剛

結び目の不変量として、Alexander不変量は良く知られているが、この稿では Alexander多項式に反映しない部分から少し述べたい。

3次元球面 S^3 に埋められた結び目 K の補空間を X、X の無限巡回被覆空間を $\tilde{X}_\infty$ で示すことにする。$\tilde{X}_\infty$ の被覆変換群の生成元を t として、自然に $H_1(\tilde{X}_\infty)$ に、$\mathbb{Z}\langle t\rangle$-加群の構造がはいる。

この時、$H_1(\tilde{X}_\infty)$ の $\mathbb{Z}\langle t\rangle$-加群としての表現行列を Alexander 行列と呼ぶ。

<u>定義</u>．結び目 K の正方Alexander行列のなかで、その次数が最小のものを、K の<u>極小Alexander行列</u>と呼ぶことにする。そのひとつを $M_K(t)$ で、また、その次数を $m(K)$ で示すことにする。

但し、$M_K(t) \sim (1)$ の時は、$m(K) = 1$ とする。

ここで、～ は 表現行列の間の同値関係を示している。

§1. まず、$m(K)$ について、bridge index $b(K)$, unknotting number $u(K)$、minimal genus $g(K)$ との間に、次の不等式が成り立つ。

命題 1.1 (1) $b(K)-1 \geqq m(K)$

(2) $u(K) \geqq m(K)$

(3) $2 \cdot g(K) \geqq m(K)$

証. (1) Foxの free derivative [3] により、$\pi_1(X)$ の生成元の数より 1 小さい次数のAlexander行列が得られる。故に、$b(K)$ でなくとも、生成元の最小数でも成立する。

(2) surgerical method [14,15] により 次数 $u(K)$ の Alexander行列が得られる。

(3) 次数 $2 \cdot g(K)$ の Seifert行列 V が存在し、$V - t \cdot V^T$ は、Alexander行列である。

例. pretzel knot K of type $(a_1, \ldots, a_{2n+1})$ ここで、$^\exists p$; odd $(\neq \pm 1)$, $\frac{a_i - 1}{2} \equiv \frac{p-1}{2} \pmod{p}$ である時、$m(K) = 2n$ となる。命題 1.1より $b(K) \geqq 2n+1$ であり、逆に、投影図より明らかに、$b(K) \leqq 2n+1$ 。故に $b(K) = 2n+1$。ここで、$\{a_i\}$のうち、n個が $+3$ $(n+1)$個が -3 (又はその逆)の時、投影図より、$u(K) \leqq 2n$ であり、また命題 1.1 より $u(K) \geqq 2n$。故に、

$u(K)=2n$。これは、次の問題の特殊な場合の答えである。

問題. pretzel link L of type $(a_1,\dots,a_n)$ に対して、$b(L)=\#\{a_i \mid |a_i|\neq 1\}$ が成り立つか。

なお、${}^{\exists}i\neq{}^{\exists}j$ に対して $a_i;a_j$;evenの時は、次の理由で成り立つ。Lは、$\#\{a_i \mid a_i;\text{even}\}$ コの components を有し、各 component は、その component に属する strands のうち、odd な $(\neq\pm1)$ ものの個数と同数個の 2-bridgel knots の composite になっていることから、$b(L)\geq\#\{a_i \mid |a_i|\neq1\}$ が言え、また、投影図より、$b(L)\leqq\#\{a_i \mid |a_i|\neq1\}$ は明らかである。

（なお、例にあげた knot は primeである。金信[5]）

ところで、リボン結び目Rに対して、これを単純な絡み輪にするのに必要なfissionsの最小数を $r(R)$ で示すことにすると、Rの標準的な投影図で、$r(R)$ コの帯を有するのがある。

問題. リボン結び目 R の標準的な投影図において、帯の交叉の上下の入れ替えは、Alexander不変量（711 $m(R)$）を変えないか。

これが、肯定的に解決されるなら、次の不等式が成り立つ。

問題. $2\cdot r(R)\geqq m(R)$?

次に、$M_K(t)$ の次数以外の性質を考える。

定義. $M_K(t)$ が splittable とは、ある正方行列 A, B 及び単純行列 O に対し、$M_K(t)\sim\begin{pmatrix}A & O^T\\ O & B\end{pmatrix}$ が

成り立つことである。但し、$\begin{pmatrix} A & O^T \\ O & B \end{pmatrix}$ の次数は m(K) とする。

§2. enumerationの話題のひとつに、primeか否かの判定法があるが、以下、$M_K(t)$ を用いて示そう。

定義. 絡み輪（又は結び目）L が composite とは、次の条件を満足する2次元球面 S^2 が S^3 にとれることである。$S^3 - S^2$ の components を B_1, B_2 で、$L \cap B_i$ を L_i で示す時、(B_i, L_i) が $(B^1 \times B^2, B^1 \times (0))$ と同相でない。

L が prime とは、compositeでない時をいう。

注意. 橋爪[4]では、prime の条件では、non-separable をつけているが、ここでは仮定しない。すなわち 2-components の trivial link も prime と取扱う。

この節では、次の記号を用いる。

$K(p,q)$： normal form (p,q) の 2-bridge結び目

$\Delta_K(t)$： Kの Alexander 多項式

D_p ： p次の 2面体群

Fox の free derivativeより、次の命題を得る。

命題 2.1 $b(K) = 2$ ならば $m(K) = 1$, $M_K(t) \sim (\Delta_K(t))$ また、自然数 c_i、整数 L, N が存在して、$\Delta_K(t) \doteq \sum_{i=L}^{N} (-1)^i c_i t^i$。

（$m(K) = 1$ は $\Delta_K(t) \neq 1$ を示している。）

composite $K=K_1\#K_2$ に対して同様に計算して次を得る。

命題 2.2 (1) $M_K(t) \sim \begin{pmatrix} M_{K_1}(t) & 0 \\ 0 & M_{K_2}(t) \end{pmatrix}$.

(2) $m(K) \leqq m(K_1)+m(K_2)$.

注意. $m(K(3,1))=m(K(7,2))=1$ だが.

$m(K(3,1)\#K(7,2))=1$ であり、(2)の等号は必ずしも成立しない。

Schubert[16] により次の事実が良く知られている。

命題 2.3 $b(K_1\#K_2)=b(K_1)+b(K_2)-1$.

故に.

命題 2.4 $b(K)=3$ かつ K が composite ならば、$K(p,q)$ と $K(r,s)$ が存在して、$K=K(p,q)\#K(r,s)$ である。

一般に 2-bridge 結び目の composite に対して、次の命題が成立する。

命題 2.5 $K=\#K(p_i,q_i)$, m: ある meridian の class,

$\varphi : \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(X)/\langle m; m^2=1\rangle \left(= \underset{Z_2}{*} D_{p_i}\right) \xrightarrow[h^*]{} D_p$.

$h: i \longmapsto \begin{cases} p_i & (h^*(D_{p_i})=Z_2 \text{の時}) \\ 0 & (h^*(D_{p_i})=D_p \text{の時}) \end{cases}$ と定め、

$D_pM(K)$ を $\mathrm{Ker}\,\varphi$ に対応する $X(=S^3-K)$ の被覆空間とすると、

$H_1(D_pM(K)) \cong Z \oplus \left(\overset{\frac{p-1}{2}}{\oplus} (\oplus Z_{h(i)}) \right)$。但し、$Z_p=Z/pZ$。

以上の議論より、次の命題を得る。

命題 2.6　結び目Kは、次の条件のいずれかを満たせば prime である。

(1)　$b(K)=1,3,4$　かつ　$m(K)=0$.

(2)　$b(K)-m(K)=1$　かつ　$M_K(t)$ が non-splittable .

(3)　$b(K)=3$　かつ　$m(K)\leqq 2$　かつ「$M_K(t)\sim\begin{pmatrix}\Delta_{K_1}(t) & 0\\ 0 & \Delta_{K_2}(t)\end{pmatrix}$ となるような $K_i=K(p_i,q_i)$ $(i=1,2)$ が存在しない。」

(4)　$b(K)=3$　かつ　$m(K)\leqq 2$　かつ「$M_K(t)\sim\begin{pmatrix}\Delta_{K_1}(t) & 0\\ 0 & \Delta_{K_2}(t)\end{pmatrix}$ となるような $K_i=K(p_i,q_i)$ $(i=1,2)$ の対に対して、$\{H_1(D_pM(K))\}\neq\{H_1(D_pM(K_1\# K_2))\}$ である。」

ここで、$D_pM(K)$ は、$X\,(=S^3-K)$ の D_p-被覆空間を示す。

ところで、次の事実は、容易に確かめられる。

命題 2.7　結び目の表において、交叉数が10以下のものは、高々 3-bridge である。

このことから、交叉数が10以下の結び目に対し、命題 2.6 を次のように適用する。

(2)　$0_1\sim 7_7$, $8_{1\sim 4,\,6\sim 9,\,11\sim 14}$, $9_{1\sim 15,\,17\sim 21,\,23,\,26,\,27,\,31}$, $10_{1\sim 45}$

(4)　$10_{67,\,98,\,114,\,123,\,159}$

(3)　その他

定理 2.8　結び目の表において、交叉数が10以下のものは、すべて、prime である。

付記　結び目が．prime か否かの判定法について、筆者の知る所は次の通りである。

(1) 2-bridgeであること（Schubert[16]）

(2) 非自明な中心化群を結び目の群が有すること（？）

(3) 交叉数が9以下のものについて（岡村[9]）

(4) pretzel 結び目について（金信[5]）

(5) $H_1(D_pM(K))$ の比較から（Perko[10,11,12]

なお、Perko は、交叉数が11以下の表中の結び目が．prime であること．Conway[2]の表に．重複や脱落のあることに．言及している。

§3．結び目のprimality の判定法を知ることにより、次のようにして、絡み輪のprimality が判定できる。

μ-componentsの絡み輪 L の各component を K_i（$1 \leq i \leq \mu$）で示すことにする。

命題 3.1　各K_iが単純な結び目で．かつ、各 $L-K_i$ が．non-separable の時．L は primeである。

命題 3.2　$\mu = 2$ であり、K_1が単純な結び目．K_2が非単純な結び目である時、(S^3, K_2) に対して．K_1に沿って Dehn surgery を施した結果を (S^3, K^*) で書くとする。

K^*が．composite summand として．K_2の composite summand

を含まないならば、Lは primeである。

命題 3.3　$\mu=3$ であり、Lが non-separable、各K_iが単純な結び目である時、少なくとも2コのiに対して、$L-K_i$が、単純な絡み輪であれば、Lは primeである。

以上、定義より、自明なので、証明は略すが、これを適用して、次を得る。

定理 3.4　絡み輪の表において、交叉数が9以下のものは、すべて、prime である。

付記．　表は、主として、[2],[15]を用いたが、他にも、[1],[6,7,8],[13],[17,18,19]が良く知られている。

参考文献

[1] J. W. Alexander & G. B. Briggs: 'On types of knotted curves' *Ann. of Math.* 28 (1926-27) 562-586

[2] J. H. Conway: 'An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties' 「Computational Problems in abstract algebra」 Proc. Conf. Oxford 1967

[3] R. H. Crowell & R. H. Fox: 「An Introduction to Knot Theory」 Ginn and Co., Boston 1962

[4] Y. Hashizume: 'On the uniqueness of the decomposition of a link' *Osaka Math. J.* *10 & 11* (1958, 59)

[5] T. Kanenobu: 'On pretzel links' 本講究録

[6] C.N. Little: 'On knots, with a census to order 10' *Trans. Conn. Acad. Sci.* *18* (1885) 374-378

[7] C.N. Little: 'Alternate ± knots of order 11' *Trans. Roy. Soc. Edin.* *36* (1890) 253-255

[8] C.N. Little: 'Non-alternate ± knots' *Trans. Roy. Soc. Edin.* *39* (1900) 771-778

[9] M. Okamura: 'On a group theoretical approach to a 2-bridge knot' *Kwansai Gakuin Master Thesis*

[10] K.A. Perko, Jr: 'A weak 2-bridged knots with at most three bridges is prime' *Notices A.M.S.* *26* (1978) A-648

[11] K.A. Perko, Jr: 'On 10-crossing knots' *to appear*

[12] K.A. Perko, Jr: 'Invariants of 11-crossing knots' *to appear*

[13] K. Reidemeister: 「Knotentheorie」 (reprint) Chelsea, New York 1948

[14] D. Rolfsen: 'A surgical view of Alexander's polynomial' 「Geometric Topology」 Lecture Notes in Math. #438, Springer-Verlag 1974 415-423

[15] D.Rolfsen:「Knots and Links」 Publish or Perish Inc. 1976

[16] H.Schubert:'Über eine numersche Knoteninvariante'
Math.Z. 61 (1954) 245-288

[17] P.G.Tait:'On knots I' Tait's Scientific Papers I.
C.U.P., London 1898 273-343

[18] P.G.Tait:'On knots II' 同上

[19] P.G.Tait:'On knots III' 同上

付録　交叉数が10以下の表中の結び目について、$m(K)\geq 2$ のものに対して．$M_K(t)$ を以下述べる。

但し．記号'?'の付いたものは．$m(K)=1$ かも知れない。

また．記号'N'は non-splittable を示している。

8_{18} $\begin{pmatrix} t^2-t+1 & 0 \\ 0 & t^4-4t^3+5t^2-4t+1 \end{pmatrix}$

9_{35} $\begin{pmatrix} 3t-3 & -2t+1 \\ -t+2 & 3t-3 \end{pmatrix}$ N

9_{37} $\begin{pmatrix} 2t-1 & 0 \\ 0 & t^3-5t^2+7t-2 \end{pmatrix}$

9_{38} $\begin{pmatrix} t^2-t+1 & t+1 \\ 0 & 5t^2-9t+5 \end{pmatrix}$?

9_{40} $\begin{pmatrix} t^2-3t+1 & 0 \\ 0 & t^4-4t^3+5t^2-4t+1 \end{pmatrix}$

9_{41} $\begin{pmatrix} 3t^2-3t+1 & t^2-1 \\ 0 & t^2-3t+3 \end{pmatrix}$ N

9_{46} $\begin{pmatrix} t-2 & 0 \\ 0 & 2t-1 \end{pmatrix}$

9_{47} $\begin{pmatrix} t^2-1 & 5t-4 \\ t^2-2t & t^4-4t^3+7t^2-4t-1 \end{pmatrix}$ N

9_{48} $\begin{pmatrix} 3t^2-4t+2 & t^2-t+1 \\ t^2-1 & 2t-1 \end{pmatrix}$ N

9_{49} $\begin{pmatrix} t^2-2t+2 & t^2-1 \\ t^2-1 & -2t^2+2t-1 \end{pmatrix}$ N

10_{61} $\begin{pmatrix} t^2-t+1 & 2 \\ 0 & 2t^4-3t^3+t^2-3t+2 \end{pmatrix}$ N

10_{63} $\begin{pmatrix} t^2-t+1 & 2 \\ 0 & 5t^2-9t+5 \end{pmatrix}$ N

10_{69} $\begin{pmatrix} t^2+t-1 & 3t^3-9t^2+5t-1 \\ 2t^2-2t+1 & t^4-2t^3 \end{pmatrix}$?

10_{74} $\begin{pmatrix} t-2 & 0 \\ 0 & 4t^3-8t^2+7t-2 \end{pmatrix}$

10_{75} $\begin{pmatrix} t^3-3t^2+4t-1 & 3 \\ 0 & t^3-4t^2+3t-1 \end{pmatrix}$ N

10_{98} $\begin{pmatrix} t^2-t+1 & 0 \\ 0 & 2t^4-7t^3+9t^2-7t+2 \end{pmatrix}$

10_{99} $\begin{pmatrix} t^4-2t^3+3t^2-2t+1 & 0 \\ 0 & t^4-2t^3+3t^2-2t+1 \end{pmatrix}$

10_{101} $\begin{pmatrix} t^2-t+1 & t-3 \\ -2t+9 & 7t^2-14t+20 \end{pmatrix}$?

$$10_{103} \begin{pmatrix} t^2-2t+2 & 0 \\ 0 & 2t^4-4t^3+5t^2-3t+1 \end{pmatrix}$$

$$10_{115} \begin{pmatrix} t^2-t+1 & 2t \\ 2t-2 & t^4-8t^3+17t^2-12t+1 \end{pmatrix} \quad \text{N}$$

$$10_{122} \begin{pmatrix} t^2-3t+1 & 3 \\ 0 & 2t^4-5t^3+7t^2-5t+2 \end{pmatrix} \quad \text{N}$$

$$10_{123} \begin{pmatrix} t^4-3t^3+3t^2-3t+1 & 0 \\ 0 & t^4-3t^3+3t^2-3t+1 \end{pmatrix}$$

$$10_{140} \begin{pmatrix} t^2-t+1 & 2 \\ 0 & t^2-t+1 \end{pmatrix} \quad \text{N}$$

$$10_{142} \begin{pmatrix} t^2-t+1 & 2 \\ 0 & 2t^4-t^3-t^2-t+2 \end{pmatrix} \quad \text{N}$$

$$10_{144} \begin{pmatrix} t^2-t+1 & 2 \\ 0 & 3t^2-7t+3 \end{pmatrix} \quad \text{N}$$

$$10_{155} \begin{pmatrix} t^3-2t^2+t-1 & 0 \\ 0 & t^3-t^2+2t-1 \end{pmatrix}$$

$$10_{157} \begin{pmatrix} t^3-2t^2+3t-1 & t^4-3t^3+3t^2 \\ t^2-1 & 3t^2-3t+1 \end{pmatrix} \quad \text{N}$$

$$10_{160} \begin{pmatrix} t^3+t^2-1 & t^3+t \\ 3t^2-3t+1 & t^3-2t^2+3t-1 \end{pmatrix} \quad \text{N}$$

$$10_{164} \begin{pmatrix} t^2-t+1 & 0 \\ 0 & t^4-4t^3+7t^2-4t+1 \end{pmatrix}$$

π