数理解析研究所講究録
第 369 巻 1979 年 144-163



# $S^3$の種数2のHeegaard diagramsに対応する基本群の表示について

筑波大 数学系 金戸 武司

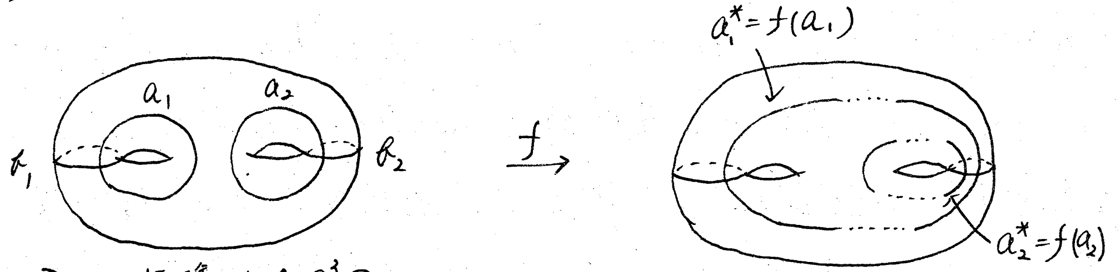
## §1. 序

[1]で，$S^3$のHeegaard diagramsに対応する基本群の表示についての一性質として，relatorsの相互代入による簡略化の可能性について，一般の種数に関する報告をした。その結びに於いて，そこで得た結果を更に強い形に直せないかという問題を提起した。これについて，種数が3以上の場合は反例があり，種数が2の場合のみが問題として残った。(c.f. [2]) 。 この報告では，この問題が種数2のHeegaard diagramsのあるClassについて，肯定的に解けることを示す。

## §2. 定義と結果

$S^3$の種数2のHeegaard diagramsの次のようなClass $\mathcal{D}_1$ を考える。Tを種数2のsolid torusとし，$D_0$を標準的な$S^3$の種数2のHeegaard diagram

とする。（下左図参照）




$D_0$：標準的な$S^3$の Heegaard diagram

$D$：$f$により変形された Heegaard diagram $f(D_0)$

$\mathcal{D}_1 := \{ D = f(D_0) \mid f : \partial T \to \partial T$ は orientation preserving homeomorphism でかつ拡張された homeomorphism $F : T \to T$ s.t. $F|\partial T = f$ をもつ$\}$とする。（以下，このような$f$を「$f$は条件$(*)$を満たす」と言うことにする。）$\mathcal{D}_1$に属する Heegaard diagram による基本群の reduced な表示について，

(1) relators の word としての一般形を与え，（定理1）その応用として，(2) 表示は"代入"による簡略化が可能であること（定理2，その系）を示す。

便宜上，Heegaard diagrams に代えて，基本群の reduced な表示を考える上では本質的に同じことであるから，Heegaard sewings を考えることにする。即ち，$\mathcal{D}_1$ に代えて，Heegaard sewings の class $\mathcal{S}_1 := \{ \varphi = f\varphi_0 \mid f$ は条件$(*)$を満たす$\}$，ここに，$\varphi_0$ は $S^3$の種数2の標準的な Heegaard sewing とする。即ち，

$\varphi_0(b_1)=a_1$, $\varphi_0(b_2)=a_2$ を満たす。[3], [4] の記号で表わせば, $\varphi_0=\mu_1\mu_2$ である。)を考える。Heegaard sewing $\varphi$ に対応する基本群の reduced な表示を $\pi_1(\varphi)$ で表わし, relators における i) 巡回置換 ($b_1\cdots b_k\to b_kb_1\cdots b_{k-1}$) 及び ii) 逆 ($b_1\cdots b_k\to b_k^{-1}\cdots b_1^{-1}$) の操作による違いは無視することにし, それを「≡」と書くことにする。($\pi_1(\varphi)$, ≡ の正確な定義は, [1], [2] を参考。)

定理 1. $\mathcal{S}_1\ni{}^\forall\varphi=f\varphi_0$ による基本群の reduced な表示 $\pi_1(f\varphi_0)\equiv\langle a_1,a_2;\ r_1,r_2\rangle$ の relator $r_i$ ($i=1,2$) の一般形は次の通りである。

$$r_i\equiv a_1a_2^{\varepsilon_1}\cdots a_1a_2^{\varepsilon_k}\quad\cdots\ \text{type I}$$

$$\text{又は, } a_1^{\varepsilon_1}a_2\cdots a_1^{\varepsilon_k}a_2\quad\cdots\ \text{type II}$$

s.t. i) $\varepsilon_j\neq 0$ ($j=1,\cdots,k$) (但し, $k=0$ のときは, $r_i=a_1$ 又は $a_2$.)

ii) イ) $|\varepsilon_s-\varepsilon_t|\leqq 1$ for $1\leqq{}^\forall s,{}^\forall t\leqq k$

かつ ロ) $k>1$ のとき, $\varepsilon_s\neq\varepsilon_t$ となる $1\leqq s,t\leqq k$ が存在する。

iii) $k>1$ のとき, $(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_k)\xrightarrow{d}({}_1\varepsilon_1,\cdots,{}_1\varepsilon_{l_1})\xrightarrow{d}\cdots\xrightarrow{d}({}_m\varepsilon_{l_m})$ で, 各組は i), ii) を満たし, $l_j\geqq 2$ for $1\leqq{}^\forall j\leqq m-1$, かつ, $l_m=1$。

ここに, 組 $(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_k)$ に対する operation $d$ は,

次のように定める。組 $(\varepsilon_1, \cdots \varepsilon_k)$ は, i), ii) を満たし, $k>1$ だから, $\varepsilon_j$ $(j=1, \cdots k)$ は丁度, 2つの値を取る。絶対値の大きいものにより, 組 $(\varepsilon_1, \cdots \varepsilon_k)$ を絶対値の小さいものの幾つかのブロックに分けられる。(但し, $\varepsilon_k$ と $\varepsilon_1$ は巡回的に継っているとみなす。) 各ブロックに含まれる $\varepsilon_j$ の個数を数え上げ, それに「1」を加えた値を, (右向きの) 順に並べて新しい組 $({}_1\varepsilon_1, \cdots, {}_1\varepsilon_{l_1})$ を得る。これを,
$(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_k) \xrightarrow{d} ({}_1\varepsilon_1, \cdots, {}_1\varepsilon_{l_1})$ と書く。

例. 1) $r_1 = a_1 a_2^2 a_1 a_2^2 a_1 a_2^3 a_1 a_2^2 a_1 a_2^3$ のとき,
$(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_5) = (2, 2, 3, 2, 3)$ で i), ii) を満たし,
更に, $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_5) \xrightarrow{d} (3, 2) \xrightarrow{d} (2)$ で, iii) を満たす。

2) $r_1 = a_1 a_2^2 a_1 a_2^2 a_1 a_2^2 a_1 a_2^3 a_1 a_2^2 a_1 a_2^3$ のとき,
$(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_6) = (2, 2, 2, 3, 2, 3)$ で, i), ii) を満たすが, $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_6) \xrightarrow{d} (4, 2)$ となり, $(4, 2)$ は ii) を満たさない。したがって, この $r_1$ は iii) を満たさない。

Remark 1. iii) の条件は, 組 $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_k)$, $(-\varepsilon_1, \cdots, -\varepsilon_k)$, $(\varepsilon_k, \cdots, \varepsilon_1)$ について同値である。又, ${}^\forall\varepsilon_j \neq 1$ ならば, $(\varepsilon_1 - 1, \cdots, \varepsilon_k - 1)$ と, ${}^\forall\varepsilon_j \neq -1$ ならば, $(\varepsilon_1 + 1, \cdots, \varepsilon_k + 1)$ とも同値である。

定理2. $f_i \in \mathfrak{F}_2^{\pm}$ ($i=1,\cdots,m$, $\mathfrak{F}_2^{\pm}$ は Suzuki の generators c.f. 後述. 命題1.) は $\pi_1(f_m\cdots f_1\varphi_0)$ の minimal representation i.e. $\pi_1(f_m\cdots f_1\varphi_0)\equiv\pi_1(g_{m'}\cdots g_1\varphi_0)$ ($g_j\in\mathfrak{F}_2^{\pm}$, $j=1,\cdots,m'$) ならば, $m\leq m'$ とする。このとき,

$$\pi_1(f_m\cdots f_1\varphi_0) \overset{S_4}{\searrow} \pi_1(f_m\cdots f_2\varphi_0)$$

が成り立つ。ここに, $S_4$ (=代入) は, $\langle a_1,a_2; r_1,r_2\rangle$ において, $r_1\equiv r_1' r_2$ のとき, $\langle a_1,a_2;r_1,r_2\rangle \overset{S_4}{\searrow}\langle a_1,a_2;r_1',r_2\rangle$ と書くの意。(c.f. [1], [2])

Remark 2. $m=1$ のときは, $\pi_1(f_1\varphi_0)\overset{S_4}{\searrow}\pi_1(\varphi_0)$ の意とし, 定理2に含めるものとする。

系. $\mathcal{S}_1 \ni {}^{\forall}\varphi = f\varphi_0$ に対し, $\pi_1(\varphi)$ は strongly simply trivial, i.e. $\pi_1(\varphi)\overset{S_4}{\searrow}\langle a_1,a_2;r_1,r_2\rangle$ ($\overset{S_1}{\searrow}\langle a_1,a_2;\bar{r}_1,\bar{r}_2\rangle$, もし, $r_1$, $r_2$ が not reduced のとき。$S_1$ は cyclic reduction c.f. [1], [2]. $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$ は reduced.) $\overset{S_4}{\searrow}\cdots\overset{S_4(\text{or } S_1)}{\searrow}\langle a_1,a_2;a_1,a_2\rangle$.

系の証明. [3] or [4] により, $f$ の $g_j\in\mathfrak{F}_2^{\pm}$ ($j=1,\cdots,m'$) による分解 $f\sim g_{m'}\cdots g_1$ ($\sim$ は isotopic) が存在する。reduced な表示は isotopy invariant だから, $\pi_1(\varphi)\equiv\pi_1(g_{m'}\cdots g_1\varphi_0)$。よって, 定理2のような $f_i\in\mathfrak{F}_2^{\pm}$ ($i=1,\cdots,m$) が存在し, $\pi_1(\varphi)$ の

minimal representation を与える。よって，定理2より，

$$\pi_1(\varphi) \equiv \pi_1(f_m \cdots f_1 \varphi_0) \overset{S_4}{\searrow} \pi_1(f_m \cdots f_2 \varphi_0)$$

，$m \neq 1$ ならば，右辺に対して，再び定理2の条件を満たす $h_i \in \mathcal{G}_2^{\pm}$ $(i=1, \cdots, m_1)$ がとれ，$\pi_1(f_m \cdots f_2 \varphi_0)$ の minimal representation を与えるから，再び定理2が適用でき，$\pi_1(f_m \cdots f_2 \varphi_0) \equiv \pi_1(h_{m_1} \cdots h_1 \varphi_0) \overset{S_4}{\searrow} \pi_1(h_{m_1} \cdots h_2 \varphi_0)$，以下，これを繰り返せば，$\pi_1(\varphi) \overset{S_4}{\searrow} \cdots \overset{S_4}{\searrow} \pi_1(\varphi_0) \equiv \langle a_1, a_2 ; a_1, a_2 \rangle$（なぜなら，§3の命題1より $\varphi_0(b_1) = a_1^{-1} \equiv a_1$，$\varphi(b_2) = a_2^{-1} \equiv a_2$，かつ定義より $\pi_1(\varphi_0) \equiv \langle a_1, a_2 ; \varphi_0(b_1), \varphi_0(b_2) \rangle$）を得る。

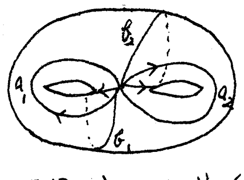
Note. 系の証明から，実際は，strongly simply trivial を示す変換 $S_4$（代入），$S_1$（cyclic reduction）の系列として，$S_1$を用いない$S_4$のみのものが得られることがわかる。

§3. 定理の証明.

[3] or [4] により，(*)を満たす homeomorphisms の isotopy classes のなす群は5個の classes で生成され，その representative homeomorphisms の induced $\pi_1$-isomorphisms は次の通りである。

命題1. $\dot{\rho}, \dot{\omega}_1, \dot{\tau}_1, \dot{\theta}_{12}, \dot{\xi}_{12}$ を[3]又は[4]で定められた$\partial T$上の self-homeomorphisms とし，$\pi_1(\partial T)$ の生成系を下図のようにとる。又，$\mathcal{G}_2^{\pm} = \{\dot{\rho}, \dot{\omega}_1, \dot{\omega}_1^{-1},$

$\dot{\tau}_1, \dot{\tau}_1^{-1}, \dot{\theta}_{12}, \dot{\theta}_{12}^{-1}, \dot{\xi}_{12}, \dot{\xi}_{12}^{-1}\}$ と書くことにする。




$\pi_1(\partial T)$ の生成系

table I)

1) $\dot{\rho}_{\#} = \dot{\rho}_{\#}^{-1} : \begin{cases} a_1 \to a_2 \\ a_2 \to a_1 \\ b_1 \to b_2 \\ b_2 \to b_1 \end{cases}$

2) $\dot{\omega}_{1\#} : \begin{cases} a_1 \to a_1^{-1} b_1^{-1} a_1^{-1} b_1 a_1 \\ b_1 \to a_1^{-1} b_1^{-1} a_1 \end{cases}$

$\dot{\omega}_{1\,\#}^{-1} : \begin{cases} a_1 \to b_1^{-1} a_1^{-1} b_1 \\ b_1 \to b_1^{-1} a_1^{-1} b_1^{-1} a_1 b_1 \end{cases}$

3) $\dot{\tau}_{1\#} \{ a_1 \to b_1^{-1} a_1$ , $\dot{\tau}_{1\,\#}^{-1} : \{ a_1 \to b_1 a_1$

4) $\dot{\theta}_{12\#} : \begin{cases} a_1 \to a_1 b_2^{-1} a_2^{-1} b_2 \\ b_2 \to a_2 b_2 b_1 a_2^{-1} \end{cases}$ , $\dot{\theta}_{12\,\#}^{-1} : \begin{cases} a_1 \to b_1 a_1 a_2 b_1^{-1} \\ b_2 \to b_2 a_1^{-1} b_1^{-1} a_1 \end{cases}$

5) $\dot{\xi}_{12\#} : \begin{cases} a_1 \to b_1 a_1 b_2^{-1} b_1^{-1} \\ a_2 \to b_2 a_2 b_1^{-1} b_2^{-1} \end{cases}$ , $\dot{\xi}_{12\,\#}^{-1} : \begin{cases} a_1 \to b_1^{-1} a_1 b_1 b_2 \\ a_2 \to b_2^{-1} a_2 b_2 b_1 \end{cases}$

6) $\varphi_{0\#} : \begin{cases} a_i \to a_i^{-1} b_i a_i \\ b_i \to a_i^{-1} \end{cases}$ $(i=1,2)$

$f_{\#}(a_1) = a_1$ のような自明なものは上の table I から省いた。

table II) とくに、$b_1 = b_2 = 1$ とすると、

1)' $\dot{\rho}^{\pm}_{\#} : \begin{cases} a_1 \to a_2 \\ a_2 \to a_1 \end{cases}$

2)' $\dot{\omega}_{1\,\#}^{\pm} : \{ a_1 \to a_1^{-1}$

3)' $\dot{\tau}_{1\#}^{\pm} = 1$

4)' $\dot{\theta}_{12\#} : \{ a_1 \to a_1 a_2^{-1}$

$\dot{\theta}_{12\,\#}^{-1} : \{ a_1 \to a_1 a_2$

5)' $\dot{\xi}_{12\,\#}^{\pm} = 1$

table I と同じく，自明なものは省った。

Remark 3. $\mathcal{S}_1 \ni {}^\forall\varphi = f\varphi_0$ に対し，$f \sim f_m \cdots f_1$ ($f_i \in \mathcal{V}_2^{\pm}$，$i=1,\cdots,m$) とする。$f_{m\#}\cdots f_{1\#}\varphi_{0\#}(b_1) = A_1(a_1, a_2, b_1, b_2)$，$f_{m\#}\cdots f_{1\#}\varphi_{0\#}(b_2) = A_2(a_1, a_2, b_1, b_2)$ (ここに，$A_1(a_1, a_2, b_1, b_2)$，$A_2(a_1, a_2, b_1, b_2)$ は文字 $a_1, a_2, b_1, b_2$ による word) とすると，$r_1' = A_1(a_1, a_2, 1, 1)$，$r_2' = A_2(a_1, a_2, 1, 1)$ は $a_1, a_2$ による word でその cyclically reduced words $r_1 = \overline{r_1'}$，$r_2 = \overline{r_2'}$ により，reduced な表示 $\pi_1(\varphi) \equiv \langle a_1, a_2 ; r_1, r_2 \rangle$ をうるが，$\mathcal{V}_2^{\pm} \ni {}^\forall g$ に対し $b_1 = 1$ かつ $b_2 = 1$ と，$g_\#(b_1) = 1$ かつ $g_\#(b_2) = 1$ は同値であるから，table II を用いて，$r_1' \equiv f_{m\#}\cdots f_{1\#}(a_1)$，$r_2' \equiv f_{m\#}\cdots f_{1\#}(a_2)$ として，得られる。以下，table II を用いる。

定理 1 の証明

[3] 又は [4] より $f \sim f_n \cdots f_1$ となる $f_i \in \mathcal{V}_2^{\pm}$ ($i=1,\cdots n$) が存在する。合成の長さ $n$ についての帰納法で示す。

Step 1. $n=0$ のとき，$f \sim 1$ だから，$\pi_1(f\varphi_0) \equiv \pi_1(\varphi_0) \equiv \langle a_1, a_2 ; \overline{\varphi_{0\#}(b_1)}, \overline{\varphi_{0\#}(b_2)} \rangle \equiv \langle a_1, a_2 ; a_1, a_2 \rangle$.

(ここに，「—」は reduced の意) で成立。

Step 2. $n-1$ ($\geqq 0$) のとき成り立つと仮定して，$n$ のときについて示す。仮定より，$\hat{f} = f_{n-1}\cdots f_1$ (但し，$n=1$ のとき，$\hat{f} = 1$) とすると，$\pi_1(\hat{f}\varphi_0) \equiv \langle a_1, a_2 ; \hat{r}_1, \hat{r}_2 \rangle$

は，次の条件を満たす。

$$\hat{r}_1 = a_1 a_2^{\varepsilon_1} \cdots a_1 a_2^{\varepsilon_k} \quad \cdots \ type\ \mathrm{I}$$

$$\text{又は}\ a_1^{\varepsilon_1} a_2 \cdots a_1^{\varepsilon_k} a_2 \quad \cdots \ type\ \mathrm{II}$$

で，　i) $\varepsilon_j \neq 0$ $(j = 1, \cdots, k)$ （但し，$k=0$ のとき，$\hat{r}_1 = a_1$ or $a_2$）

ii) イ) $|\varepsilon_s - \varepsilon_t| \leq 1$ for $1 \leq {}^\forall s, {}^\forall t \leq k$

かつ ロ) $k > 1$ のとき，$\varepsilon_s \neq \varepsilon_t$ となる $1 \leq s, t \leq k$ が存在する。

iii) $k > 1$ のとき，$(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_k) \xrightarrow{d} ({}_1\varepsilon_1, \cdots, {}_1\varepsilon_{l_1}) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d}$ $({}_m\varepsilon_{l_m})$，各組は i), ii) を満たし，$l_j \geqq 2$ $(j \neq m)$，$l_m = 1$。

である。さて，$\pi_1(f\varphi_0) \equiv \pi_1(f_n \hat{f} \varphi_0) \equiv \langle a_1, a_2 ; \overline{f_{n\#}(\hat{r}_1)}, \overline{f_{n\#}(\hat{r}_2)} \rangle \equiv \langle a_1, a_2 ; r_1, r_2 \rangle$ であるから，命題1 の table II より，$f_n = \dot{\rho}, \dot{\omega}_1, \dot{\theta}_{12}, \dot{\theta}_{12}^{-1}$ の場合のみ考えればよい。以下，$\hat{r}_1$ の type に分けて考える。

（1）$k = 0$ のとき，i.e. $\hat{r}_1 = a_1$ 又は $a_2$ のとき，table II より，$r_1 \equiv a_1, a_2$，又は $a_1 a_2^{\pm}$ で成立。

（2）$k \geqq 1$ のとき，

（I）type I のとき，i.e. $\hat{r}_1 = a_1 a_2^{\varepsilon_1} \cdots a_1 a_2^{\varepsilon_k}$ のとき，

(a) $f_n = \dot{\rho}, \dot{\omega}_1$ のとき，性質 i), ii), iii) は巡回置換及び逆によって不変だから，成立。（但し，$\dot{\rho}$ では type I から type II へ変わる。）

(b) $f_n = \dot{\theta}_{12}$ のとき，table II より $f_{n\#}$ : $\begin{cases} a_1 \to a_1 a_2^{-1} \\ a_2 \to a_2 \end{cases}$

だから, $r_i = a_1 a_2^{\varepsilon_1 - 1} \cdots a_1 a_2^{\varepsilon_k - 1}$. したがって, $^\forall \varepsilon_j \neq 1$ のとき, $(\varepsilon_1 - 1, \cdots, \varepsilon_k - 1)$ は i), ii) を満たし, 更に, Remark 1 より iii) も満たす。又, もし $^\exists \varepsilon_{j_0} = 1$ $(1 \leq j_0 \leq k)$ ならば $k = 1$ のときは明らかだから, $k > 1$ とすると, i), ii) より $\varepsilon_j = 1, 2$, 即ち, $\varepsilon_j - 1 = 0, 1$ である。iii) における $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_k) \xrightarrow{d} ({}_1\varepsilon_1, \cdots, {}_1\varepsilon_{l_1})$ を, $\varepsilon_k = 2$ として(必要なら巡回置換を施す。), $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_k)$ の左端から, 1 の個数を数えて得られたものとすると, $r_i = a_1 a_2^{\varepsilon_1 - 1} \cdots a_1 a_2^{\varepsilon_k - 1} = a_1^{{}_1\varepsilon_1} a_2 \cdots a_1^{{}_1\varepsilon_{l_1}} a_2$ (なぜなら, $\cdots a_1 a_2^1 (\underbrace{a_1 a_2^0 \cdots a_1 a_2^0}_{a_2^0 \text{が} \varepsilon \text{個}}) a_1 a_2^1 \cdots = \cdots a_1 a_2 a_1^{\varepsilon + 1} a_2 \cdots$ であり, これは operation $d$ に対応するから。) を得る。ところで, iii) より組 $({}_1\varepsilon_1, \cdots, {}_1\varepsilon_{l_1})$ は条件 i), ii), iii) をみたす。

(c) $f_n = \dot{\theta}_{12}^{-1}$ のとき, table II より, $f_{n\#} : \begin{cases} a_1 \to a_1 a_2 \\ a_2 \to a_2 \end{cases}$ だから, $r_i = a_1 a_2^{\varepsilon_1 + 1} \cdots a_1 a_2^{\varepsilon_k + 1}$. $^\forall \varepsilon_j \neq -1$ ならば, $(\varepsilon_1 + 1, \cdots, \varepsilon_k + 1)$ は条件 i), ii), iii) を満たす。$^\exists \varepsilon_{j_0} = -1$ $(1 \leq j_0 \leq k)$ ならば, $k = 1$ のときは $r_i = a_1 a_2^{\varepsilon_{j_0} + 1} = a_1$ で明らか。$k > 1$ とする。i), ii) より $\varepsilon_j = -1, -2$, 即ち, $\varepsilon_j + 1 = 0, -1$ だから (b) におけると同様にして, $r_i \equiv a_1 a_2^{\varepsilon_1 + 1} \cdots a_1 a_2^{\varepsilon_k + 1} \equiv a_1^{{}_1\varepsilon_1} a_2^{-1} \cdots a_1^{{}_1\varepsilon_{l_1}} a_2^{-1} \equiv a_1^{-{}_1\varepsilon_{l_1}} a_2 \cdots a_1^{-{}_1\varepsilon_1} a_2$ であり, 組 $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_k)$ が iii) を満たすことと Remark 1 より, 組 $(-{}_1\varepsilon_{l_1}, \cdots, -{}_1\varepsilon_1)$ は, i), ii), iii) を満たす。

(II) type II，即ち，$\dot{r}_i = a_1^{\varepsilon_1} a_2 \cdots a_1^{\varepsilon_k} a_2$ のとき。

(a) $f_n = \dot{\rho}, \dot{\omega}_1$ のときは，前と同様にして成立。

(b) $f_n = \dot{\theta}_{12}$ のとき，table II より $f_{n+1}: \begin{cases} a_1 \to a_1 a_2^{-1} \\ a_2 \to a_2 \end{cases}$

だから，$r_i = \{(a_1 a_2^{-1})^{\varepsilon_1} a_2\} \cdots \{(a_1 a_2^{-1})^{\varepsilon_k} a_2\}$。

① $^\forall \varepsilon_j > 0$ とすると，$r_i = \{(a_1 a_2^{-1})^{\varepsilon_1 - 1} a_1\} \cdots \{(a_1 a_2^{-1})^{\varepsilon_k - 1} a_1\}$ であるが，(イ) $^\exists \varepsilon_{j_0} = 1$ $(1 \leq j_0 \leq k)$ のとき，$k = 1$ ならば，$r_i = (a_1 a_2^{-1})^{\varepsilon_{j_0}} a_2 = a_1$ で明らか。$k > 1$ とする。

i), ii) より $\varepsilon_j = 1, 2$，即ち，$\varepsilon_j - 1 = 0, 1$，よって，

$$
\begin{aligned}
r_i &= (a_1^{\varepsilon_1 - 1} a_2^{-\varepsilon_1 + 1} a_1) \cdots (a_1^{\varepsilon_k - 1} a_2^{-\varepsilon_k + 1} a_1) && \text{巡回置換} \\
&\equiv a_1^{\varepsilon_1} a_2^{-\varepsilon_1 + 1} a_1^{\varepsilon_2} a_2^{-\varepsilon_2 + 1} \cdots a_1^{\varepsilon_k} a_2^{-\varepsilon_k + 1} && (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_k) \xrightarrow{d} (1^{\varepsilon_1}, \cdots, 1^{\varepsilon_{\ell}}) \text{ の定義より} \\
&\equiv a_1^{1^{\varepsilon_1} + 1} a_2^{-1} \cdots a_1^{1^{\varepsilon_{\ell}} + 1} a_2^{-1} && \text{逆と巡回置換} \\
&\equiv a_1^{-1^{\varepsilon_{\ell}} - 1} a_2 \cdots a_1^{-1^{\varepsilon_1} - 1} a_2
\end{aligned}
$$

組 $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_k)$ が iii) を満たすこと及び Remark 1 より，組 $(-1^{\varepsilon_{\ell}} - 1, \cdots, -1^{\varepsilon_1} - 1)$ も i), ii), iii) を満たす。

(ロ) $^\forall \varepsilon_j \neq 1$ のとき，$^\forall \varepsilon_j \geq 2$ であり，したがって，

$$
\begin{aligned}
r_i &\equiv \{a_1^2 a_2^{-1} (a_1 a_2^{-1})^{\varepsilon_1 - 2}\} \cdots \{a_1^2 a_2^{-1} (a_1 a_2^{-1})^{\varepsilon_k - 2}\} \\
&\equiv \{(a_2 a_1^{-1})^{\varepsilon_k - 2} a_2 a_1^{-2}\} \cdots \{(a_2 a_1^{-1})^{\varepsilon_1 - 2} a_2 a_1^{-2}\} \\
&\equiv \{(a_1^{-1} a_2)^{\varepsilon_k - 2} a_1^{-2} a_2\} \cdots \{(a_1^{-1} a_2)^{\varepsilon_1 - 2} a_1^{-2} a_2\}
\end{aligned}
$$

であるから，$a_1^{\bar{\varepsilon}_1} a_2 \cdots a_1^{\bar{\varepsilon}_{\bar{k}}} a_2$ の形で表わすと $(\bar{\varepsilon}_1, \cdots, \bar{\varepsilon}_{\bar{k}}) = (\underbrace{-1, \cdots, -1}_{\varepsilon_k - 2}, -2, \cdots, \underbrace{-1, \cdots, -1}_{\varepsilon_1 - 2}, -2)$ となり，i), ii) を満たす。更に，$(\bar{\varepsilon}_1, \cdots, \bar{\varepsilon}_{\bar{k}}) \xrightarrow{d} (\varepsilon_k - 1, \cdots, \varepsilon_1 - 1)$ だから，

組 $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_k)$ が iii) を満たすこと及び Remark 1 より,
組 $(\bar{\varepsilon}_1, \cdots, \bar{\varepsilon}_k)$ も iii) を満たす。

② $\forall \varepsilon_j < 0$ とすると, $r_1 = \{(a_2 a_1^{-1})^{-\varepsilon_1} a_2\} \cdots \{(a_2 a_1^{-1})^{-\varepsilon_k} a_2\}$
$\equiv \{a_2^2 a_1^{-1}(a_2 a_1^{-1})^{-\varepsilon_1 - 1}\} \cdots \{a_2^2 a_1^{-1}(a_2 a_1^{-1})^{-\varepsilon_k - 1}\}$
$\equiv \{(a_1 a_2^{-1})^{-\varepsilon_k - 1} a_1 a_2^{-2}\} \cdots \{(a_1 a_2^{-1})^{-\varepsilon_1 - 1} a_1 a_2^{-2}\}$ である
から, $a_1 a_2^{\bar{\varepsilon}_1} \cdots a_1 a_2^{\bar{\varepsilon}_k}$ の形で表わすと, $(\bar{\varepsilon}_1, \cdots, \bar{\varepsilon}_k) =$
$(\underbrace{-1, \cdots, -1}_{-\varepsilon_k - 1}, -2, \cdots, \underbrace{-1, \cdots, -1}_{-\varepsilon_1 - 1}, -2)$. よって, 前 (①の(ロ)) と
同様に, i), ii), iii) を満たすことがわかる。

(c) $f_n = \dot{\theta}_{12}^{-1}$ のとき, table II より $f_{n\#} : \begin{cases} a_1 \to a_1 a_2 \\ a_2 \to a_2 \end{cases}$
だから, $r_i = \{(a_1 a_2)^{\varepsilon_1} a_2\} \cdots \{(a_1 a_2)^{\varepsilon_k} a_2\}$。よって,

$$r_i \equiv \{(a_2 a_1)^{\varepsilon_1} a_2\} \cdots \{(a_2 a_1)^{\varepsilon_k} a_2\} \quad \cdots ①'$$
$$\equiv \{(a_1 a_2)^{-\varepsilon_k} a_2^{-1}\} \cdots \{(a_1 a_2)^{-\varepsilon_1} a_2^{-1}\} \quad \cdots ②'$$

に注意すれば, $\forall \varepsilon_j > 0$ のとき, $r_i$ を①′とみなせば, (b) の
①と, $\forall \varepsilon_j < 0$ のとき, ②′とみなせば, (b) の②と同様
にして, 成り立つことが示される。

定理2の証明

$m$ についての帰納法で示す。 $\pi_1(f_m \cdots f_1 \varphi_0) \equiv \langle a_1, a_2 ; r_1, r_2 \rangle$ とする。

<u>Step I</u> $m = 1$ のとき, $f_1 = \dot{\theta}_{12}^{\pm}$ (なぜなら, $f_1 \in \mathcal{G}_2^{\pm}$ は $\pi_1(f_1 \varphi_0)$ の minimal representation だから。) だから, table II より, $\pi_1(f_1 \varphi_0) \equiv \langle a_1, a_2 ; a_1 a_2^{\pm}, a_2 \rangle \overset{S_4}{\searrow}$

$\langle a_1, a_2 ; a_1, a_2 \rangle \equiv \pi_1(\varphi_0)$ で成立。

Step II. $m-1\ (\geqq 1)$ 以下のとき，成り立つと仮定して，$m$ のときについて示す．$f_1, \cdots, f_m \in \mathcal{G}_2^{\pm}$ は $\pi_1(f_m \cdots f_1 \varphi_0)$ の minimal representation だから，$f_1, \cdots, f_{m-1} \in \mathcal{G}_2^{\pm}$ も $\pi_1(f_{m-1} \cdots f_1 \varphi_0)$ の minimal representation （なぜなら，一般に $\pi_1(\varphi_1) \equiv \pi_1(\varphi_2)$ ならば $\pi_1(f\varphi_1) \equiv \pi_1(f\varphi_2)$，ここに $f$ は任意の homeomorphism。）よって，仮定から，$\pi_1(f_{m-1} \cdots f_1 \varphi_0) \searrow^{S_4} \pi_1(f_{m-1} \cdots f_2 \varphi_0) \cdots$ ① である．今，$\pi_1(f_{m-1} \cdots f_1 \varphi_0) \equiv \langle a_1, a_2 ; r_1', r_2' \rangle$，$\pi_1(f_{m-1} \cdots f_2 \varphi_0) \equiv \langle a_1, a_2 ; \hat{r}_1, \hat{r}_2 \rangle$ とし，①の代入 $S_4$ は $r_2'$ の $r_1'$ への代入（これを $r_1' > r_2'$ と書くことにする。）としてよい。このとき，$r_2' \equiv \hat{r}_2$ である。table II より，$f_m = \dot{\tau}_1^{\pm}, \dot{\xi}_{12}^{\pm}, \dot{\rho}^{\pm}, \dot{\omega}_1^{\pm}$ のときは明らかだから，$f_m = \dot{\theta}_{12}^{\pm}$ のときについて考えれば十分。定理1により，$r_1', r_2'$ の word としての type に分けて考える。

Case 1. $r_1' \equiv a_1 a_2^{\varepsilon_1} \cdots a_1 a_2^{\varepsilon_k}$ (type I) とすると，$r_1' > r_2'$ 及び homology group $(= \langle a_1, a_2 ; r_1', r_2' \rangle$ のアーベル化群$) = 0$ より，$k \geqq 1$ である。以下，$r_2'$ の word の形により場合に分けて考える。

(イ) $r_2' = a_1 \cdots a_2^{\pm}$ の形のとき，必要なら $r_1'$ に巡回置換

を施すことにより，$r_2' = a_1 a_2^{\varepsilon_1} \cdots a_1 a_2^{\varepsilon_{k'-1}} a_1 a_2^{\varepsilon_{k'}-\varepsilon}$（ここに，$|\varepsilon| < |\varepsilon_{k'}|$，$\varepsilon\varepsilon_{k'} \geqq 0$）としてよい。即ち，$r_1' = (a_1 a_2^{\varepsilon_1} \cdots a_1 a_2^{\varepsilon_{k'}-\varepsilon}) a_2^{\varepsilon} a_1 a_2^{\varepsilon_{k'+1}} \cdots a_1 a_2^{\varepsilon_k} = r_2' a_2^{\varepsilon} a_1 a_2^{\varepsilon_{k'+1}} \cdots a_1 a_2^{\varepsilon_k}$。

したがって，$f_m = \dot{\theta}_{12}^{\pm}$ のとき，table II より $f_{m\#} : \begin{cases} a_1 \to a_1 a_2^{\mp} \\ a_2 \to a_2 \end{cases}$ だから，$r_1 = f_{m\#}(r_1') = (a_1 a_2^{\varepsilon_1 \mp 1} \cdots a_1 a_2^{\varepsilon_{k'}-\varepsilon\mp 1}) a_2^{\varepsilon} a_1 a_2^{\varepsilon_{k'+1}\mp 1} \cdots a_1 a_2^{\varepsilon_k \mp 1}$ である。したがって，$\langle a_1, a_2 ; r_1, r_2 \rangle \overset{S_4}{\searrow} \langle a_1, a_2 ; a_2^{\varepsilon} a_1 a_2^{\varepsilon_{k'+1}\mp 1} \cdots a_1 a_2^{\varepsilon_k \mp 1}, r_2 \rangle = \langle a_1, a_2 ; f_{m\#}(\hat{r}_1), f_{m\#}(\hat{r}_2) \rangle \equiv \pi_1(f_m \cdots f_2 \varphi_0)$ で成立。

(イ)$'$ $r_2' = a_2^{\pm} \cdots a_1$ の形のとき，$r_1'$ が type I だから，巡回置換により，$r_2' \equiv \cdots a_1 a_2^{\pm}$ として代入 $S_4$ を行っても同じことだから，(イ) 又は (ハ)$'$（後述）に帰着される。

(ロ) $r_2' = a_1$ のとき，homology group $= 0$ より，$k=1$ かつ $\varepsilon_1 = \pm 1$，したがって，$\pi_1(f_{m-1} \cdots f_1 \varphi_0) \equiv \langle a_1, a_2 ; a_1 a_2^{\pm 1}, a_1 \rangle \equiv \pi_1(\dot{\rho}\, \dot{\theta}_{12}^{\mp} \varphi_0)$ だから，$m=3$ で，$f_1 = \dot{\theta}_{12}^{\mp}$，$f_2 = \dot{\rho}$。又，$f_1, f_2, f_3 \in \mathfrak{J}_2^{\pm}$ は $\pi_1(f_3 f_2 f_1 \varphi_0)$ の minimal representation だから，$f_3 = \dot{\theta}_{12}^{\mp}$（複号同順）のみ可。（なぜなら，$\pi_1(\dot{\rho}\,\dot{\rho}\,\dot{\theta}_{12}^{\mp} \varphi_0) \equiv \pi_1(\dot{\theta}_{12}^{\mp} \varphi_0)$，$\pi_1(\dot{\omega}_1 \dot{\rho}\, \dot{\theta}_{12}^{\mp} \varphi_0) \equiv \pi_1(\dot{\rho}\, \dot{\theta}_{12}^{\pm} \varphi_0) \equiv \pi_1(\dot{\theta}_{12}^{\pm} \dot{\rho}\, \dot{\theta}_{12}^{\mp} \varphi_0)$。），よって，$\pi_1(f_3 f_2 f_1 \varphi_0) \equiv \langle a_1, a_2 ; a_1 a_2^{\pm 2}, a_1 a_2^{\pm} \rangle \overset{S_4}{\searrow} \langle a_1, a_2 ; a_2^{\pm}, a_1 a_2^{\pm} \rangle \equiv \langle a_1, a_2 ; a_1 a_2^{\pm}, a_2 \rangle \equiv \pi_1(\dot{\theta}_{12}^{\mp} \varphi_0) \equiv \pi_1(\dot{\theta}_{12}^{\mp} \dot{\rho}\, \varphi_0) \equiv \pi_1(f_2 f_1 \varphi_0)$ である。

(ロ)' $r_2' = a_1 \cdots a_1$ の形のとき，homology group $=0$ より $\cdots \ni a_2^{\pm}$ である。(イ)と同様に，$r_2' = a_1 a_2^{\varepsilon_1} \cdots a_1 a_2^{\varepsilon_{k'}} a_1$，$r_1' = r_2' a_2^{\varepsilon_{k'+1}} \cdots a_1 a_2^{\varepsilon_k}$ としてよい。ここに，$1 \leq k' < k$ …(A) である。実際にはこの場合が生じないことを，$m-1$ についての帰納法で示す。$m-1=1$ のとき，$\pi_1(f_1 \varphi_0) \equiv \langle a_1, a_2 ; a_1 a_2^{\pm}, a_2 \rangle$ だから，明らかに生じない。$m-2\,(\geq 1)$ 以下で生じないものとする。$m-1$ のときについて考える。もし，生じたとすると，$\pi_1(f_{m-1} \cdots f_1 \varphi_0) \equiv \langle a_1, a_2 ; r_1', r_2' \rangle \overset{S_4}{\searrow} \langle a_1, a_2 ; \hat{r}_1, r_2' \rangle \equiv \pi_1(f_{m-1} \cdots f_2 \varphi_0)$ (ここに，$\hat{r}_1 = a_2^{\varepsilon_{k'+1}} \cdots a_1 a_2^{\varepsilon_k}$)。ところが，右辺の minimal representation の長さは $(m-2)$ 以下でかつ (A) より 2 以上，よって，step 2 の仮定より $\hat{r}_1 > r_2'$ 又は $r_2' > \hat{r}_1$。(ロ)'の帰納法の仮定から前者は生じない．後者についても，定理1 を $r_2'$ に適用すると，$a_1^2$ の項を含むことから，$\varepsilon_1 = \cdots = \varepsilon_{k'} = \pm 1$，又 $r_1'$ において，もし，$k-k'=1$ ならば $\hat{r}_1 = a_2^{\varepsilon_k}$，よって，homology group $=0$ より $\varepsilon_k = \pm 1$，即ち，$\varepsilon_1 = \cdots = \varepsilon_k = \pm 1$ となり，(A) より $k>1$ だから，条件 ii) $\exists\, \varepsilon_{j_0} = \pm 2$ $(k'+1 \leq j_0 \leq k)$ に反する。$k-k'>1$ とする。$\hat{r}_1 \equiv a_1 a_2^{\varepsilon_{k'+2}} \cdots a_1 a_2^{\varepsilon_k + \varepsilon_{k'+1}}$ だから，もし，$j_0 = k$ 又は $k'+1$ ならば $|\varepsilon_k + \varepsilon_{k'+1}| \geq 3$ で，又，$k'+1 < j_0 < k$ ならば，$|\varepsilon_{j_0}| = 2$，$|\varepsilon_k + \varepsilon_{k'+1}| \geq 2$ でいずれ

にせよ，$r_2' > \hat{r}_1$ とはならない。よって(ロ)$'$の場合は生じない。

(ハ) $r_2' = a_2^{\pm}$ のとき，homology group $= 0$ より $k = 1$，更に，$f_1, \cdots, f_{m-1} \in \mathcal{U}_2^{\pm}$ 及び $f_1, \cdots, f_m \in \mathcal{U}_2^{\pm}$ はそれぞれ，$\pi_1(f_{m-1} \cdots f_1 \varphi_0)$，$\pi_1(f_m \cdots f_1 \varphi_0)$ の minimal representation だから，$f_1 = \cdots = f_m = \dot{\theta}_{12}^{\pm}$ となり，直接，確かめられる。

(ハ)$'$ $r_2' = a_2^{\pm} \cdots a_2^{\pm}$ の形のとき，homology group $= 0$ より $\cdots \ni a_1$，又，$\hat{r}_1 (= r_1' - r_2') \ni a_1$ としてよい。（もし，$\hat{r}_1 \not\ni a_1$ ならば，$r_1' \equiv a_1 a_2^{\varepsilon_1}$，$r_2' \equiv a_2^{\varepsilon} a_1 a_2^{\varepsilon'}$（$\varepsilon\varepsilon' > 0$，$|\varepsilon + \varepsilon' - \varepsilon_1| = 1$）となり，$r_2' \equiv a_1 a_2^{\varepsilon + \varepsilon'}$ とみなせるから，(イ)に帰着される。）(イ)と同様に，$r_2' = a_2^{\varepsilon_1 - \varepsilon} a_1 a_2^{\varepsilon_2} \cdots a_1 a_2^{\varepsilon_{k'} - \varepsilon'}$（$1 < k' \leq k$，$|\varepsilon| < |\varepsilon_1|$，$\varepsilon\varepsilon_1 \geq 0$，$|\varepsilon'| < |\varepsilon_{k'}|$，$\varepsilon'\varepsilon_{k'} \geq 0$），$r_1' = a_1 a_2^{\varepsilon} r_2' a_2^{\varepsilon'} a_1 a_2^{\varepsilon_{k'+1}} \cdots a_1 a_2^{\varepsilon_k}$ としてよい。更に，$\varepsilon' = 0$ としてよい。（なぜなら，巡回置換により $r_2' \equiv a_2^{\varepsilon_1 - \varepsilon \pm 1} a_1 a_2^{\varepsilon_2} \cdots a_1 a_2^{\varepsilon_{k'} - \varepsilon' \mp 1}$ とみなしても，$r_1'$への代入 $S_4$ の効果は同じだから，これを繰り返せばよい。もし，途中で，$\varepsilon_1 - \varepsilon \pm 1 = 0$ となったら，これは(イ)の場合に帰着される。）又，もし，$\varepsilon \neq 0$ ならば，$f_m = \dot{\theta}_{12}^{\pm}$ に対し，$\pi_1(f_m \cdots f_1 \varphi_0) \equiv \langle a_1, a_2 ; f_{m\#}(r_1'), f_{m\#}(r_2') \rangle \overset{S_4}{\searrow} \langle a_1, a_2 ; f_{m\#}(\hat{r}_1),$

$f_{m\#}(r_2')> \equiv \pi_1(f_m\cdots f_2\varphi_0)$ が直接，確かめられるから，成立。よって，$\varepsilon=0$ とする．この場合は実際には生じないことを示す。もし，生じたとすると，$r_2'=a_2^{\varepsilon_1}\cdots a_1a_2^{\varepsilon_{k'}}$，$r_1'=a_1r_2'a_1a_2^{\varepsilon_{k'+1}}\cdots a_1a_2^{\varepsilon_k}$ である。もし，$k'=k$ ならば $\langle a_1,a_2;r_1',r_2'\rangle \overset{S4}{\searrow} \langle a_1,a_2;a_1,r_2'\rangle$ だから，homology group $=0$ より，$k'(=k)=1$ かつ $\varepsilon_1=\pm1$。ところが (ハ)$'$ の最初に触れたように，$\cdots\ni a_1$ だから，$k\geqq 2$ でなければならず，矛盾を生ずる。よって，$k-k'>1$ とする。定義から $\hat{r}_1\equiv a_1^2a_2^{\varepsilon_{k'+1}}\cdots a_1a_2^{\varepsilon_k}$ となり，Step 2 の仮定より $\hat{r}_1>r_2'$ 又は $r_2'>\hat{r}_1$。ところが，前者は (ロ)$'$ と同様にして（即ち，定理1より $\varepsilon_{k'+1}=\cdots=\varepsilon_k=\pm1$，かつ ${}^{\exists}\varepsilon_{j_0}=\pm2$ 等を用いる．），不可。又，後者も，(ロ)$'$ により生じない。故に，(ハ)$'$ における不都合な場合，即ち，$\varepsilon=\varepsilon'=0$ の場合は生じない。

Case 2．$r_1'=a_1^{\varepsilon_1}a_2\cdots a_1^{\varepsilon_k}a_2$ (type II) のとき，homology group $=0$ より，$k\geqq1$。Case 1 と同様に $r_2'$ の word としての形により場合に分ける。

(イ) $r_2'=a_2\cdots a_1^{\pm}$ の形のとき，前と同様に，$r_2'=a_2a_1^{\varepsilon_2}\cdots a_1^{\varepsilon}$，$r_1'=a_1^{\varepsilon_1}r_2'a_1^{\varepsilon_{k'}-\varepsilon}a_2\cdots a_1^{\varepsilon_k}a_2$ ($|\varepsilon|\leqq|\varepsilon_{k'}|$, $\varepsilon\varepsilon_{k'}>0$，$1<k'\leqq k$) としてよい。${}^{\forall}\varepsilon_j<0$ のとき，代入 $r_1'>r_2'$ は $f_{m\#}=\theta_{12\#}^{\pm}$ による変形でも，$f_{m\#}(r_2')$

の両端で新らたな reduction を生じないから，そのまま保たれ，$r_1 = f_{m\#}(r_1') > f_{m\#}(r_2') = r_2$ であるから，$\pi_1(f_m \cdots f_1 \varphi_0) \overset{S_4}{\searrow} \pi_1(f_m \cdots f_2 \varphi_0)$ をうる。$^{\forall}\varepsilon_j < 0$ のときも，$\dot{\theta}_{12\#}(r_2') = a_2(a_1a_2^{-1})^{\varepsilon_2} \cdots (a_1a_2^{-1})^{\varepsilon} \equiv (a_1a_2^{-1})^{\varepsilon_2} \cdots (a_1a_2^{-1})^{\varepsilon-1}a_1$ に注意すれば，同様に $\pi_1(f_m \cdots f_1 \varphi_0) \overset{S_4}{\searrow} \pi_1(f_m \cdots f_2 \varphi_0)$ をうる。

(イ)′ $r_2' = a_1^{\pm} \cdots a_2$ の形のとき，$r_2' = a_1^{\varepsilon}a_2 \cdots a_1^{\varepsilon_{k'}}a_2$，$r_1' = a_1^{\varepsilon_1-\varepsilon} r_2' a_1^{\varepsilon_{k'+1}} \cdots a_1^{\varepsilon_k}a_2$ $(|\varepsilon| \leqq |\varepsilon_1|$ $\varepsilon\varepsilon_1 > 0)$ としてよく，(イ)と同様に直接確かめられる。

(ロ) $r_2' = a_2$ のとき，homology group $= 0$ より，$k = 1$，$\varepsilon_1 = \pm 1$ だから，$r_1' \equiv a_1a_2^{\mp}$ で，case 1 に帰着される。

(ロ)′ $r_2' = a_2 \cdots a_2$ の形のとき，homology group $= 0$ より $\cdots \ni a_1$ である。前と同様にして，$r_2' = a_2a_1^{\varepsilon_2} \cdots a_1^{\varepsilon_{k'}}a_2$ $(1 < k' \leqq k)$，$r_1' = a_1^{\varepsilon_1} r_2' a_1^{\varepsilon_{k'+1}} \cdots a_2$ としてよく，case 1 の(ロ)′と同様に考えれば，この場合が実際には生じないことが示される。

(ハ) $r_2' = a_1^{\pm}$ のとき，homology group $= 0$ より，$k = 1$。$|\varepsilon_1| = 1$ のとき，case 1 の(ロ)に帰着される。$|\varepsilon_1| > 1$ のとき，$r_2' = a_1^{\varepsilon}$ $(\varepsilon = \pm 1)$ とすると，$r_1' \equiv a_1^{\varepsilon}a_1^{\varepsilon_1-\varepsilon}a_2 \equiv a_1^{\varepsilon_1-\varepsilon}a_1^{\varepsilon}a_2$ だから，$\varepsilon > 0$ のとき，前者

と，$\varepsilon<0$ のとき後者とみなせば，直接確められる。

(ハ)′ $r_2'=a_1^{\pm}\cdots a_1^{\pm}$ の形のとき，homology group $=0$ より，$\cdots\ni a_2$ である．又，前と同様に，$r_2'=a_1^{\varepsilon_1-\varepsilon}a_2\cdots a_2\,a_1^{\varepsilon_{k'}-\varepsilon'}$ （$\cdots\ni a_2$ だから，$k'>1$），$r_1'=a_1^{\varepsilon}r_2'\,a_1^{\varepsilon'}\cdots a_1^{\varepsilon_k}a_2$ （$|\varepsilon|<|\varepsilon_1|$，$\varepsilon\varepsilon_1\geqq 0$，$|\varepsilon'|<|\varepsilon_{k'}|$，$\varepsilon'\varepsilon_{k'}\geqq 0$）としてよく，更に，Case 1 の(い)′と同様に考えて，$\varepsilon'=0$ としてよい。もし，$\varepsilon>0$ ならば，$r_2'\equiv a_1^{\varepsilon_1-\varepsilon+1}a_2\cdots a_2\,a_1^{\varepsilon_{k'}-1}$ とみなし，$\varepsilon<0$ ならば，そのままで，直接，$\pi_1(f_m\cdots f_1\varphi_0)\overset{S_4}{\searrow}\pi_1(f_m\cdots f_2\varphi_0)$ が確かめられる。残るは $\varepsilon=0$ の場合であるが，この場合は実際には生じないことを示す。仮定より，$\langle a_1,a_2\,;\,r_1',r_2'\rangle\overset{S_4}{\searrow}\langle a_1,a_2\,;\,\hat{r}_1,r_2'\rangle$ （ここに，$\hat{r}_1=a_2a_1^{\varepsilon_{k'+1}}\cdots a_1^{\varepsilon_k}a_2$）であるが，$k'=k$ のとき，$\hat{r}_1=a_2$ となり，homology $=0$ に反する。$k-k'\geqq 1$ とする。Step 2 の仮定より，$\hat{r}_1>r_2'$ 又は $r_2'>\hat{r}_1$ が成り立つ。ところが，前者は Case 1 の(ロ)′と同様にして不可，後者も Case 2 の(ロ)′で不可であるから，矛盾が生じた。よって，(ハ)′における不都合な場合（i.e. $\varepsilon=\varepsilon'=0$）は生じない。

§4．検討．

すべての $S^3$ の種数2の Heegaard sewings の集合 $\mathcal{S}$ は $\mathcal{S}=\{\varphi=f\varphi_0 g\mid f,g$ は条件(*)を満たす$\}$ で与えら

れる。もちろん，我々の究極の目標は，

問題1.「$\mathcal{S} \ni {}^\forall \varphi$ に対して，$\pi_1(\varphi)$ は strongly simply trivial か。」

であるが，$\mathcal{S}_1$ について解決できた現段階では，次の step として，

問題2.「$\mathcal{S}_2 := \{\varphi = \varphi_0 g \mid g$ は条件 $(*)$ を満たす$\}$ に対して，定理1，2 及び 系 のような議論はできないか。」

は，自然である。この場合，Remark 3. のことが有効でなくなり，したがって，table I しか使えないという困難がある。問題2から問題1はそう遠くないように思われる。

References.

[1] 金戸武司，$S^3$ の Heegaard 分解による $\pi_1$ の表示について，数理研講究録 297 (1977)，69-84.

[2] ———，On presentations of the fundamental group of the 3-sphere associated with Heegaard diagrams, J. Math. Soc. Japan (to appear).

[3] S. Suzuki, On homeomorphisms of a 3-dimensional handlebody, Can. J. Math. 29 (1977), 111-124.

[4] ———，閉曲面の写像類群，数理研講究録 297 (1977)，1-21.