数理解析研究所講究録
第 369 巻 1979 年 184-188

Algebraic links の Alexander polynomials による分類

早大 理工　山本 慎

1. $f: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ を $f(0)=0$，原点を孤立特異点とする複素2変数の多項式とし，f は既約な成分 $f_1, \cdots f_r$ により，$f = f_1 \cdots f_r$ と分解されているとする．$V = f^{-1}(0)$ とすると，V と十分小さな3次元球面 S^3 との共通部分 $L = V \cap S^3$ は，$K_i = f_i^{-1}(0) \cap S^3$ $(1 \leqq i \leqq r)$ を成分とする link となり，algebraic link とよばれる．f が既約なとき L は algebraic knot とよばれ，その knot type は，f の Puiseux characteristic pairs を $\{(n_k, m_k)\}_{k=1}^{g}$ とすると，type $\{(\lambda_k, m_k)\}_{k=1}^{g}$ の iterated torus knot になる．ただしここで

$$\lambda_1 = n_1$$

$$\lambda_k = n_k - m_k n_{k-1} + \lambda_{k-1} m_{k-1} m_k \qquad 2 \leqq k \leqq r$$

である．

2. $X = S^3 - L$ とすると，$H_1(X;\mathbb{Z})$ は $\{t_i\}_{i=1}^{r}$ で生成される，free abelian group G_r となる．ここで，t_i は L の成分 K_j と linking number が δ_{ij} なるものとする．$\tilde{X}$，$\tilde{\tilde{X}}$ を

それぞれ，X の universal abelian covering，infinite cyclic covering とすると，$H_1(\tilde{X};\mathbb{Z})$ は Λ_r-module，$H_1(\tilde{\tilde{X}};\mathbb{Z})$ は Λ_1-module となる．Λ_i は integral group ring $\mathbb{Z}G_i$ である．L の Alexander polynomial $\Delta(L;t_1,\cdots,t_r)$，reduced Alexander polynomial $\Delta(L;t)$ は，それぞれ，$H_1(\tilde{X};\mathbb{Z})$，$H_1(\tilde{\tilde{X}};\mathbb{Z})$ の characteristic polynomial として定義される．

Algebraic links については，$r=1$ のとき Buraw [1] をはじめとしてその一般形が求められており，$r\geqq 2$ のときは，Sumners-Woods [4] によりそれが与えられている．

3. 定理（Lê [2]）　Algebraic knots K，K' の Alexander polynomial が等しければ，K，K' の knot type は等しい．

f が $f=f_1\cdots f_r$ と既約分解されるとき，L の link type は，各成分 K_i の knot type と $V_i=f_i^{-1}(0)$ の tangent cone により決定される．

4. 定理（Zariski [6]，Lejeune [3]）　Algebraic link の link type は，各成分の knot type とすべての成分の対の linking numbers により決定される

Algebraic link L の各成分 K_i ($1 \leqq i \leqq r$) は type $\{(\lambda_{ik}, m_{ik})\}_{k=1}^{g_i}$ の iterated torus knot とする． L の Alexander polynomial $\Delta(L; t_1, \cdots, t_r)$ で， $t_j = 1$ ($j \neq i$)， $t_i = t$ としたものを $\Delta^i(L; t)$ とすると，Sumners - Woods [4] により $\Delta^i(L; t)$ は 1 の累乗根を根とする． 従って，$\Delta^i(L; t)$ は円周等分多項式として，

$$\Delta^i(L; t) = \prod_{\alpha \in A_i} (r_\alpha(t))^{\omega_\alpha}$$

と表わされる．ここで ω_α はある正の整数，$r_\alpha(t)$ は 1 の原始 α 乗根を根とする円周等分多項式，A は 1 の原始 α 乗根が $\Delta^i(L; t)$ の根となるような α すべての集合である．このとき次が成りたつ．

5. 補題　　$a_i = \max\{\alpha \in A_i\}$，　$a = \max\{a_1, \cdots, a_r\}$ とすると，ある i ($1 \leqq i \leqq r$) に対して

$$a = \lambda_{i, g_i} m_{i, g_i}$$

であり，さらに，ある j ($\neq i$) に対して $a = a_j$ となるなら $a_j = \lambda_{j, g_j} m_{j, g_j}$ である．

次に，$\Delta^{ij}(L; t)$ を $\Delta(L; t_1, \cdots, t_r)$ において $t_i = t_j = t$ とし，$t_h = 1$ ($h \neq i, j$) としたものとすると，$\Delta^i(L; t)$ と同様 $\Delta^{ij}(L; t)$ も根は 1 の累乗根であり，円周等分多項式として，

$$\Delta^{ij}(L;t)=\prod_{\beta\in B_{ij}}(r_\beta(t))^{\omega_\beta}$$

と表わされる．ただし，B_{ij} は 1 の原始 β 乗根が $\Delta^{ij}(L;t)$ の根となるすべての β の集合である．$(i\neq j)$

6.補題　$a=a_i$ のとき，$\beta_{ij}=\max\{\beta\in B_{ij}\}$ $(i\neq j)$ とすると，L の成分 k_i，k_j の linking number l_{ij} は，

$$l_{ij}=\beta_{ij}-a_i$$

により与えられる．

さて，l，l' を links $l=k_1\cup\cdots\cup k_r$ $(r\geqq 2)$，$l'=k_1\cup\cdots\cup k_{r-1}$ とし，$\Delta(l;t_1,\cdots,t_r)$，$\Delta(l';t_1,\cdots,t_{r-1})$ によりそれらの Alexander polynomials を表わすものとすると，Torres により次が示されている．

7.定理（Torres [5]）　$r=2$ のとき $\Delta(l;t_1,1)=\Delta(l';t)(t^{l_{12}}-1)/(t-1)$，$|l_{12}|=\Delta(l;1,1)$ であり，$r\geqq 3$ のとき $\Delta(l;t_1,\cdots,t_{r-1},1)=\Delta(l';t_1,\cdots,t_{r-1})(t_1^{l_{1r}}\cdots t_{r-1}^{l_{r-1,r}}-1)$ となる．（l_{ij} は k_i と k_j の linking number である．）

補題5，6，定理7により，algebraic link L の Alexander polynomial $\Delta(L;t_1,\cdots,t_r)$ から，すべての i，j $(i\neq j,1\leqq i,j\leqq r)$

に対して，成分 K_i，K_j の linking numbers l_{ij} および，各成分 K_i $(1 \leq i \leq r)$ の Alexander polynomial $\Delta(K_i ; t)$ を一意的に求めることができる．従って，定理 3，4 から，次の定理を得る．

7.定理　Algebraic links は Alexander polynomials により分類される．

References

[1] W. Burau : Kennzeichnung der Schlauchknoten. Abh. Math. Sem. Hamburg., 9, 125 - 133 (1932).

[2] Lê Dũng Tráng : Sur les noeuds algebriques. Comp. Math., 25, 281 - 321 (1972).

[3] M. Lejeune : Sur l'equivalence des singularites des courbes algebroides planes. Coefficients de Newton, Centre de Math. de l'Ecole Polytechnique, 1969.

[4] D.W. Sumners and J.M. Woods : The monodromy of reducible plane curves. Inv. Math. 40, 107 - 141 (1977).

[5] G. Torres : On the Alexander polynomial. Ann. Math. 57, 57-89 (1953).

[6] O. Zariski : General theory of saturation and saturated local rings, II. Amer. J. Math., 93 (1971).