数理解析研究所講究録
第 370 巻 1979 年 30-43

電気回路網の安定性について

早大 理工 松本 隆　　横浜市大 文理 一楽重雄
徳大 工 ツ上 博　　加州大バークレー L.O. Chua

抵抗 n-port

n_R 個の抵抗と n 個の端子対(port と呼ぶ)からなる電気回路網を(抵抗)n-port という。v_R 及び v_p を,各々,抵抗及び port の電圧とし,i_R 及び i_p を,各々,抵抗及び port の電流とする。$v=(v_R, v_p)$, $i=(i_R, i_p)$ とすると,$(v, i) \in \Lambda \cap K \triangleq \Sigma$ を満たさなければならない,但し,Λ は抵抗特性を表わす.$\mathbb{R}^b \times \mathbb{R}^b$ の $2b-n_R$ 次元 C^1 多様体,K は Kirchhoff space で,b 次元線形部分空間である.$(b = n_R + n)$. Σ を n-port N の configuration space という。

面白い例をいくつかあげてみる。図1(a)は抵抗ふたつと port ひとつからなる回路で,1-port と呼ばれる。R_1 と R_2 の特性を与えた時,Σ はどの様なものになるか,また port から見た時,どの様な電圧・電流特性を持つか考えてみる.図1(b)の左側は R_1, R_2 の8つの組合せが示されている。$i_{Rk} = f_{Rk}$ あるいは $v_{Rk} = g_{Rk}(i_{Rk})$, $k=1,2$, である。

Σを描くことは技術的にそれ程易しくないので，Σの(v_p, i_p)－空間への射影，すなわち，portから見た電圧・電流特性を示したのが図1(b)の右側である．図2はnoratorと呼ばれるもので，$v_p - i_p$特性は全空間$\mathbb{R}^2$となる。図3はnullatorと呼ばれ，$v_p - i_p$特性は原点のみである。図4では，R_1及びR_2の特性が(b)及び(c)で与えられていると$v_p - i_p$特性は(d)の様になる。図5で$i_{pk} = f_{Rk}(v_{Rk})$, $k=1, 2$, とすると，$v_p - i_p$特性は$v_p = f_{R_1}(\rho)$, $i_p = f_{R_2}(\rho)$, $\rho = v_{R_1} = v_{R_2}$, なるパラメター表示になる。逆に言えば，$v_p - i_p$特性が$v_p = f_1(\rho)$, $i_p = f_2(\rho)$, ρはパラメータ，で表現される1-portは，R_1, R_2の特性を各々$v_{Rk} = f_k(v_{Rk})$とする事により図5(a)の回路で実現される。尚この場合Σはself intersectionを持たず，任意のC^1関数f_{Rk}, $k=1,2$, に対して，1次元C^1多様体となる．図6では，R_1, R_2を(a),(b)の様に与えると$v_p - i_p$特性は同図(d)の様になる。

<u>定義</u>　Σがn次元C^1多様体の時，Nを正則(regular) n-portという．

$\dim \Lambda = 2b - n_R$, $\dim K = b$であるから$\Lambda \pitchfork K$であればNは正則である。$\Lambda \pitchfork K$をチェックするには次の様にすればよい。Nのひとつの木を$\mathcal{T}$とし，$\mathcal{L}$を補木とする。B

及び Q を各々，$\mathcal{T}$ に関する基本ループ行列及び基本カットセット行列とすると，

$$B=[1 \,\vdots\, B_{\mathcal{T}}],\quad Q=[-B_{\mathcal{T}}^{T} \,\vdots\, 1] \tag{1}$$

の形で与えられる。Λ は $2b-n_R$ 次元 C^1 多様体であるから，各点 $(v_0, i_0)\in\Lambda$ に対して，近傍 $U\subset\mathbb{R}^b\times\mathbb{R}^b$ と C^1 関数 $f: U\longrightarrow\mathbb{R}^{n_R}$ があって

$$\Lambda\cap U=f^{-1}(0) \tag{2}$$

$$\mathrm{rank}\,(Df)_{(v,i)}=n_R,\quad (v,i)\in\Lambda\subset U$$

が成立する。$K=\mathrm{Ker}\,B\times\mathrm{Ker}\,Q$ だから，$\Sigma\cap U$ は $Bv=0$, $Qi=0$, $f(v,i)=0$ で与えられる。今，

$$\mathcal{F}(v,i)=\left[D_{v_{\mathcal{T}}}f-(D_{v_{\mathcal{L}}}f)B_{\mathcal{T}} \,\vdots\, D_{i_{\mathcal{L}}}f+(D_{i_{\mathcal{T}}}f)B_{\mathcal{T}}^{T}\right]_{(v,i)} \tag{3}$$

とおくと，

$$\Lambda \pitchfork K \iff \begin{array}{l}\text{各点 } (v,i)\in\Sigma \text{ に対して}\\ \mathrm{rank}\,\mathcal{F}(v,i)=n_R\end{array}$$

となる。但し $v=(v_{\mathcal{L}}, v_{\mathcal{T}})$, $i=(i_{\mathcal{L}}, i_{\mathcal{T}})$.

抵抗特性 Λ が

$$\Lambda=\{(v,i)\mid(v_R,i_R)\in\Lambda_R\} \tag{4}$$

で与えられる場合も数多くある。この時，(2) の f は (v_p, i_p) に依存しない。今 $U_R=U\cap\mathbb{R}^{n_R}\times\mathbb{R}^{n_R}$, $f_R(v_R,i_R)=f(v_R,i_R)$ とおく。又，$\pi_R': \mathbb{R}^b\times\mathbb{R}^b\longrightarrow\mathbb{R}^{n_R}\times\mathbb{R}^{n_R}$ を射影

$$\pi_R'(v, i) = (v_R, i_R) \tag{5}$$

で定義し，

$$\pi_R = \pi_R' \circ \iota \tag{6}$$

とおく。但し，$\iota : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^b \times \mathbb{R}^b$ は inclusion である。次に電圧，電流を

$$v = (v_{R\mathcal{L}}, v_{P\mathcal{L}}, v_{R\sigma}, v_{P\sigma}), \quad i = (i_{R\mathcal{L}}, i_{P\mathcal{L}}, i_{R\sigma}, i_{P\sigma})$$

と分割し，(1) の B_σ も

$$B_\sigma = \begin{bmatrix} B_{RR} & B_{RP} \\ B_{PR} & B_{PP} \end{bmatrix}$$

と分割する。Λ が (4) で与えられる時，次が成立する：

$$\Lambda \pitchfork K \iff \begin{array}{l} \text{各点 } (v_R, i_R) \in \pi_R(\Sigma) \text{ に対して} \\ \operatorname{rank} \mathcal{F}_R(v_R, i_R) = n_R \end{array}$$

但し，

$$\mathcal{F}_R(v_R, i_R) = \left[\begin{array}{c:c} D_{v_{R\sigma}} f_R - (D_{v_{R\mathcal{L}}} f_R) B_{RR} & -(D_{v_{R\mathcal{L}}} f_R) B_{RP} \\ D_{i_{R\mathcal{L}}} f_R + (D_{i_{R\sigma}} f_R) B_{RR}^T & (D_{i_{R\sigma}} f_R) B_{PR}^T \end{array} \right].$$

先にあげた例では，図1の場合，(vi) を除いて全て，$\Lambda \pitchfork K$ である。図2，3，4，6 では $\Lambda \not\pitchfork K$，図5では $\Lambda \pitchfork K$ となる。

安定性

抵抗特性 Λ は，種々の物理的パラメター（例えば温度）に

依存する。ここではΛが少し変ってもΣが定性的に変るか変らないかを考える。実際に用いられる回路では，Λは常に小さな摂動を受けているので，それと共にΣが急激に変っては困る。また，回路網の計算機シミュレーションに於ても計算誤差は摂動と考えられるので，数値的に安定な数学モデルでないと困る。

さて，Λが少し動くという事実を定式化する。Mを$\mathbb{R}^n$のC^1多様体とし，$C^1(M;\mathbb{R}^n)$をMから$\mathbb{R}^n$へのC^1関数の全体とする。$F \in C^1(M;\mathbb{R}^n)$とし，

$$\mathcal{U}(F;\varepsilon(\cdot)) = \left\{ G : M \to \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{array}{l} G \in C^1(M, \mathbb{R}^n) \\ \|F(x) - G(x)\| + \|(dF)_x - (dG)_x\| \\ < \varepsilon(x), \quad x \in M \end{array} \right\}$$

を考える。但し，$\varepsilon : M \longrightarrow \mathbb{R}^+$は任意の正値連続関数。$C^1(M;\mathbb{R}^n)$の強$C^1$位相は上の様な集合から生成される。この位相に関して$Emb^1(M;\mathbb{R}^n)$は開なので，次の様な定義をする。

<u>定義</u>　$i_M : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$をinclusionとし，$\mathcal{V}(i_M)$を十分小さな$i_M$の近傍で，$\mathcal{V}(i_M)$の全ての要素が$M$の$C^1$ embeddingである様にする。この時，Λの摂動$\hat{\Lambda}$を$\hat{\Lambda} = G(\Lambda)$，$G \in \mathcal{V}(i_M)$，で定義する。

次の結果では，技術的理由から，Λが閉である事を仮定す

る。電気回路ではΛは殆んど全ての場合閉である。

結果　Λが閉である抵抗 n-port N を考える。$\Lambda\cap K\neq\emptyset$ とする。

(i) もし$\Lambda\pitchfork K$であれば，Nは正則，そして，次の意味で安定：Λの十分小さな任意の摂動$\hat{\Lambda}$に対して，$\hat{\Sigma}=\hat{\Lambda}\cap K$は$n$次元$C^1$多様体であり続ける。実際，$\Sigma$と$\hat{\Sigma}$は$C^1$ diffeo。

(ii) もし$\Lambda\not\pitchfork K$であれば，Nは次の意味で不安定：

(a)　Σがn次元多様体でない場合，Λの摂動$\hat{\Lambda}$があって，$\hat{\Sigma}$はn次元多様体となる。

(b)　Σがn次元多様体である場合，Λの摂動$\hat{\Lambda}$があって，$\hat{\Sigma}$は$(n+k)$次元多様体を含む，$k>0$。

上の結果によれば，安定なn-portは正則なものに限られる。

(ii)(a)を示す際，回路では$\Lambda\cap K=\emptyset$は意味がないので注意を要する。電圧，電流が抵抗特性とキルヒホフの法則を同時に満たさないからである。だから，$\Lambda\not\pitchfork$ の時，Λを少し動かして $\hat{\Lambda}\pitchfork K$ とする場合，$\hat{\Lambda}\cap K\neq\emptyset$ を保証しなければならない。そのため，(v,i) を nontransversal intersection とし，その点での $T_{(v,i)}\Lambda$ と $T_{(v,i)}K$ を考える。$T_{(v,i)}\Lambda$ を少し回転させると $A(T_{(v,i)}\Lambda)\pitchfork T_{(v,i)}K$ とできる。但しAは回転を表わす行列。Λを

(v, i)の近くで少し回転させ，他は動かさない様にして得られたものをΛ_1とする。点(v, i)はΛ_1とKのtransversal intersectionになったが，未だ他にもnontransversal intersectionが残っているかも知れないし，また，Λを少し動かす事によって，新しいnontransversal intersectionができてしまったかも知れない。そこで，Λ_1を少し動かした$\tilde{\Lambda}$をとり$\tilde{\Lambda} \pitchfork K$とできる事を用いる。$\Lambda_1$と$K$は点$(v, i)$でnon empty, transversal intersectionをもつから少し動かしてもnon empty intersectionを持ち続ける。従って$\tilde{\Lambda} \cap K \neq \emptyset$.

(ii)(b)で(v, i)をnontransversal intersectionとする。この時，ある$k > 0$に対して

$$\dim\left(T_{(v,i)}\Lambda + T_{(v,i)}K\right) = 2b - k$$

であるから，

$$\dim\left(T_{(v,i)}\Lambda \cap T_{(v,i)}K\right) = n + k$$

となり，kはnontransversalityから来る余分な次元である。そこで，Λを局所的に$T_{(v,i)}\Lambda$の上におしつぶし，他はそのままにしておけば，望むものが得られる。

<u>回路摂動による正則n-portの構成</u>

与えられたn-port Nで，$\Lambda \pitchfork K$であったとする。Λを少し動かして$\tilde{\Lambda} \pitchfork K$，$\tilde{\Lambda} \cap K \neq \emptyset$，とできる事は，先の結

果と同様に示せる。n-port N に新しい$\hat{n}$個のport をつくって$(n+\hat{n})$-port にする操作を回路摂動と呼ぶ。これに対して Λ の摂動を素子摂動と呼ぶ。ここでは，回路摂動による正則$(n+\hat{n})$-port の構成を考える。

結果 抵抗n-port$N$で，$\Lambda \pitchfork K$，$\Lambda \cap K \neq \emptyset$，となっている場合を考える。任意の木を $\mathcal{T}$ とし，対応する補木を$\mathcal{L}$とする。$\mathcal{T}$の各枝と並列に新しいport をつくり，$\mathcal{L}$の各枝と直列に新しい port をつくり，これを$\hat{N}$ と呼ぶ。この時 $\hat{N}$ は$(n+b)$-port で，$\hat{\Lambda} \cap \hat{K} \neq \emptyset$，$\hat{\Lambda} \pitchfork \hat{K}$，従って，$\hat{N}$ は正則，そして安定である。

（注意） 新しい port をつくると，ΛもKも変わる。

証明 $\mathcal{T}$と並列につくったport の枝を$\mathcal{T}_1$，$\mathcal{L}$ と直列につくったport の枝を$\mathcal{L}_1$とする。$\hat{\mathcal{T}} = \mathcal{L} \cup \mathcal{T}_1$ は $\hat{N}$ の木となり，$\hat{\mathcal{L}} = \mathcal{T} \cup \mathcal{L}_1$は$\hat{N}$の$\hat{\mathcal{T}}$に関する補木となる。$\hat{N}$の変数を

$$\hat{v} = (v_{\mathcal{T}}, v_{\mathcal{L}_1}, v_{\mathcal{L}}, v_{\mathcal{T}_1}), \quad \hat{i} = (i_{\mathcal{T}}, i_{\mathcal{T}_1}, i_{\mathcal{L}}, i_{\mathcal{T}_1})$$

と分割する。$(v_0, i_0) \in \Lambda \cap K \neq \emptyset$ に対して

$$\hat{v}_0 = (v_{0\mathcal{T}}, 0, v_{0\mathcal{L}}, v_{0\mathcal{T}}), \quad \hat{i}_0 = (i_{0\mathcal{T}}, i_{0\mathcal{L}_1}, i_{0\mathcal{L}}, 0)$$

とおくと

$$(\hat{v}_0, \hat{i}_0) \in \hat{K} \tag{7}$$

となる。これは$(\hat{v}_0, \hat{i}_0)$が$\mathcal{T}_1$ を開放，$\mathcal{L}_1$ を短絡した事に相当するからである。又，抵抗は付け加えていないから．

$$\hat{\Lambda} = \{ (\hat{v}, \hat{i}) \mid (v, i) \in \Lambda \} \qquad (8)$$

となり，$(\hat{v}_0, \hat{i}_0) \in \hat{\Lambda}$。 (7)(8) より

$$(\hat{v}_0, \hat{i}_0) \in \hat{\Lambda} \cap \hat{K} \neq \emptyset .$$

を得る。さて，$\hat{N}$ の基本ループ行列 $\hat{B}$ の主要部 $\hat{B}_{\mathcal{T}}$ は次の様に与えられる：

$$\hat{B}_{\mathcal{T}} = \begin{array}{cc} v_{\mathcal{L}} & v_{\mathcal{T}_1} \\ \end{array}$$
$$\hat{B}_{\mathcal{T}} = \left[\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & B_{\mathcal{T}} \end{array} \right] \begin{array}{l} v_{\mathcal{T}} \\ v_{\mathcal{L}_1} \end{array}$$

次に，$\hat{f}(\hat{v}, \hat{i}) = f(v, i)$，

$$D_{\hat{v}_{\mathcal{T}}} \hat{f} = [D_{v_{\mathcal{L}}} f \mid 0], \quad D_{\hat{v}_{\mathcal{L}}} \hat{f} = [D_{v_{\mathcal{T}}} f \mid 0],$$

$$D_{\hat{i}_{\mathcal{T}}} f = [D_{i_{\mathcal{L}}} f \mid 0], \quad D_{\hat{i}_{\mathcal{L}}} \hat{f} = [D_{i_{\mathcal{T}}} f \mid 0] .$$

である事に注意すると

$$\hat{\mathcal{F}}(\hat{v}, \hat{i}) = [D_{v_{\mathcal{L}}} f \mid D_{v_{\mathcal{T}}} f \mid D_{i_{\mathcal{T}}} f \mid D_{i_{\mathcal{L}}} f] = (Df)(v, i)$$

を得る．従って

$$\mathrm{rank}\ \hat{\mathcal{F}}(\hat{v}, \hat{i}) = n_R$$

となり，$\hat{\Lambda} \pitchfork \hat{K}$ が従う．

Λ が (4) で与えられる場合は，加えるport数は少なくてすむ。

<u>結果</u>　Λ が (4) で与えられており，$\Lambda \pitchfork K$，$\Lambda \cap K \neq \emptyset$，とする。$\mathcal{T}$ をNの任意の木とし，$\mathcal{L}$ を対応する補木とする。$\mathcal{T} = R_{\mathcal{T}} \cup P_{\mathcal{T}}$，$\mathcal{L} = R_{\mathcal{L}} \cup P_{\mathcal{L}}$ と分割する。但し $R_{\mathcal{T}}$ は木

の抵抗枝, P_τ は木の port 枝, 他も同様な意味を持つ。 R_τ の各枝と並列に port をつくり, R_ℓ の各枝と直列に port をつる。こうしてできたものを $\hat{N}$ とすると, これは $(n+n_R)$-port であって, $\hat{\Lambda}\cap\hat{K}\neq\phi$, $\hat{\Lambda}\pitchfork\hat{K}$, 従って $\hat{N}$ は正則, そして安定である。

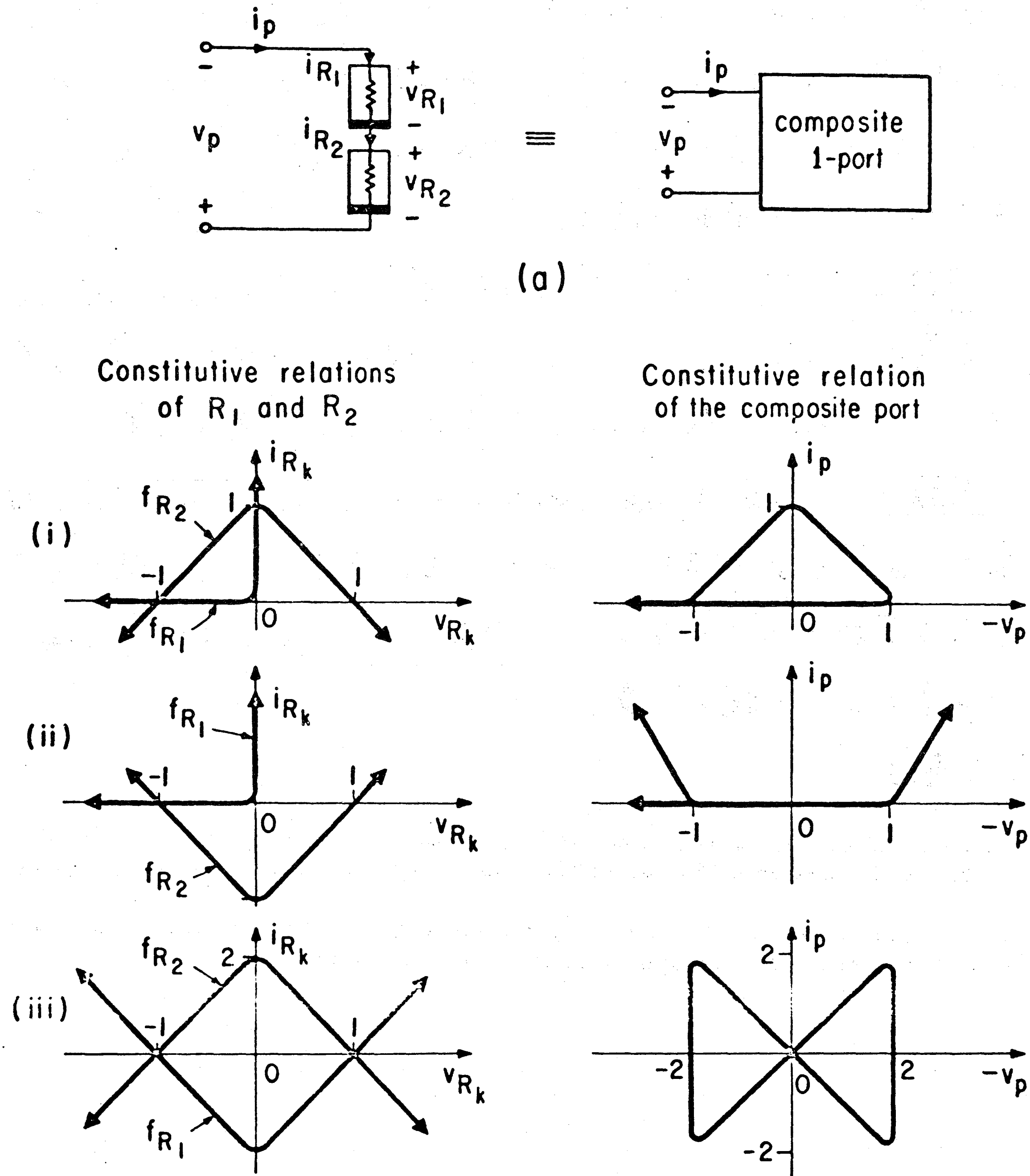
<u>問題 1</u>　$\pi_p' : \mathbb{R}^b\times\mathbb{R}^b\to\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ を $\pi_p'(v,i)=(v_p,i_p)$ で定義し, $\pi_p=\pi_p'\circ\iota$ とおく。但し $\iota:\Sigma\to\mathbb{R}^b\times\mathbb{R}^b$ は inclusion. $\pi_p(\Sigma)$ の安定性を定義し, 調べる事.

<u>問題 2</u>　N_k を n_k-port とする, $k=1,\dots,m$. N_k は全て $\Lambda_k\pitchfork K_k$ を満たすとする。N_k を互につなぎ合わせてできる回路を N とする。$\hat{\Lambda}\pitchfork\hat{K}$ となる十分条件を N_k の性質のみから調べる事.

[文献]

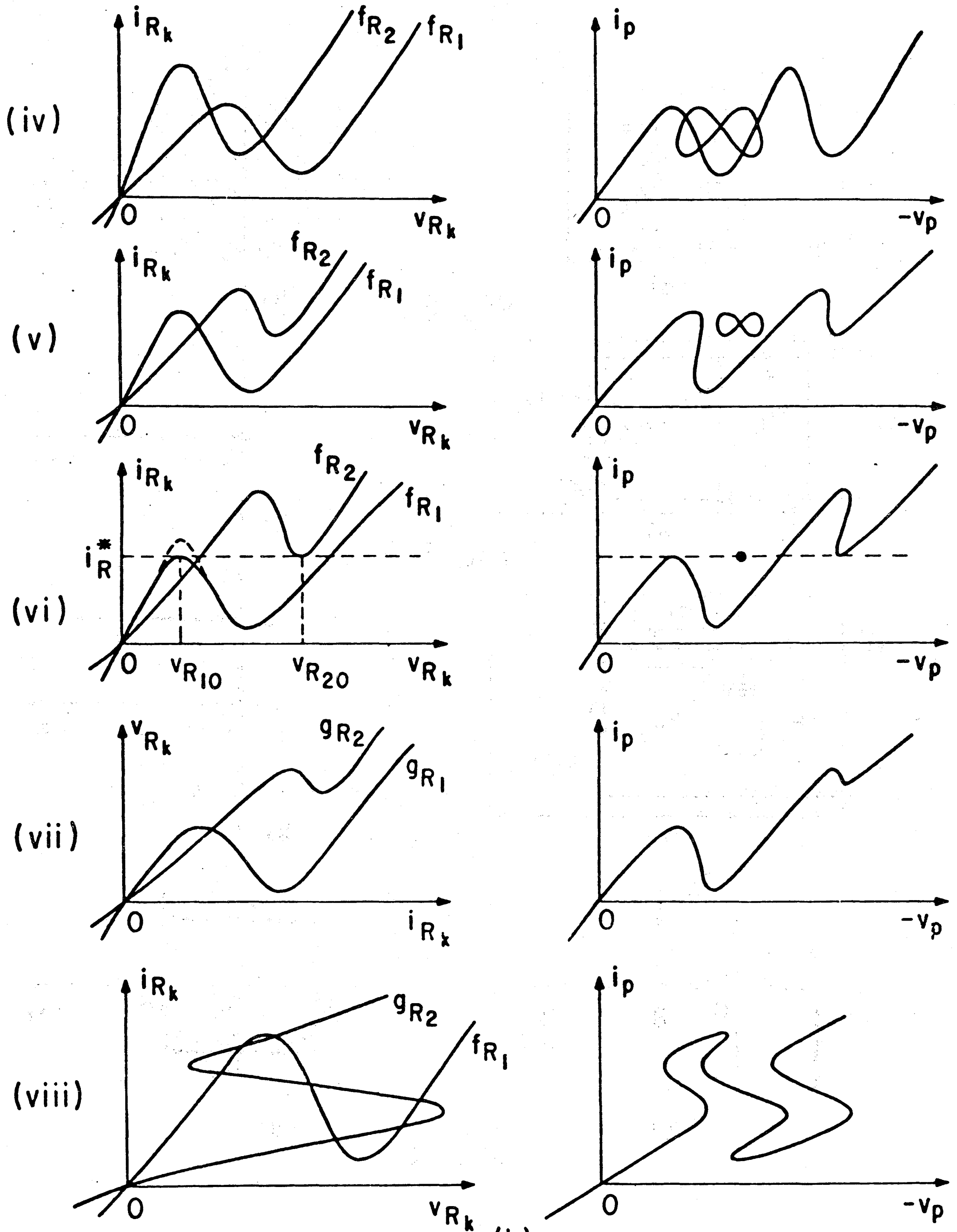
[1] L. O. Chua, T. Matsumoto and S. Ichiraku, Geometric Properties of Nonlinear Resistive n-Ports, IEEE Trans. Circuits and Systems, to appear

[2] T. Matsumoto, L. O. Chua, H. Kawakami and S. Ichiraku, Geometric Properties of Nonlinear Dynamic Networks, preprint



composite 1-port
(a)
Constitutive relations of R1 and R2
Constitutive relation of the composite port
(i)
(ii)
(iii)

Fig. 1



(b)

Fig. 1

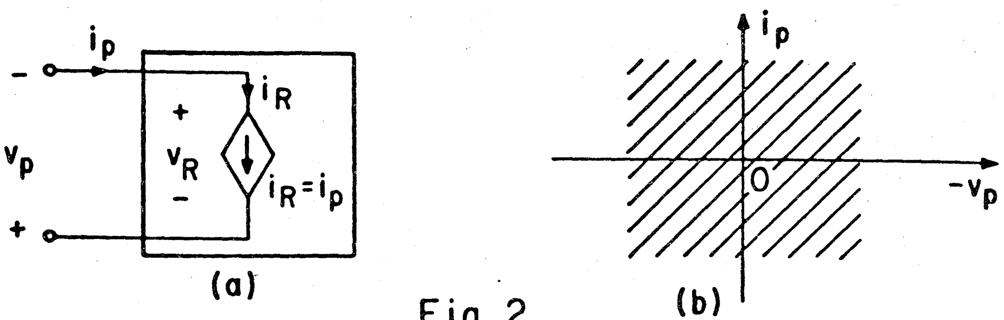


Fig.2

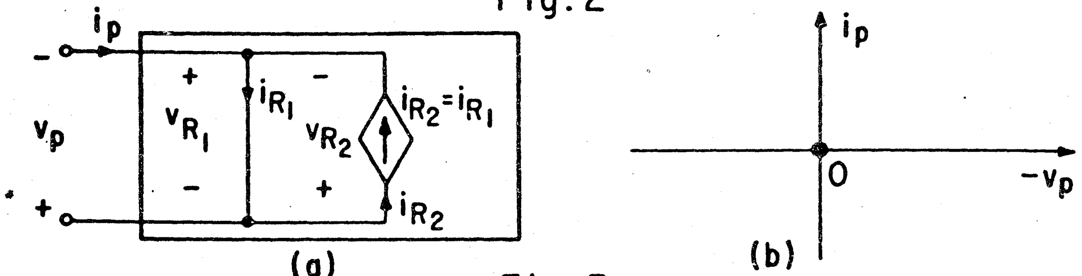


Fig.3

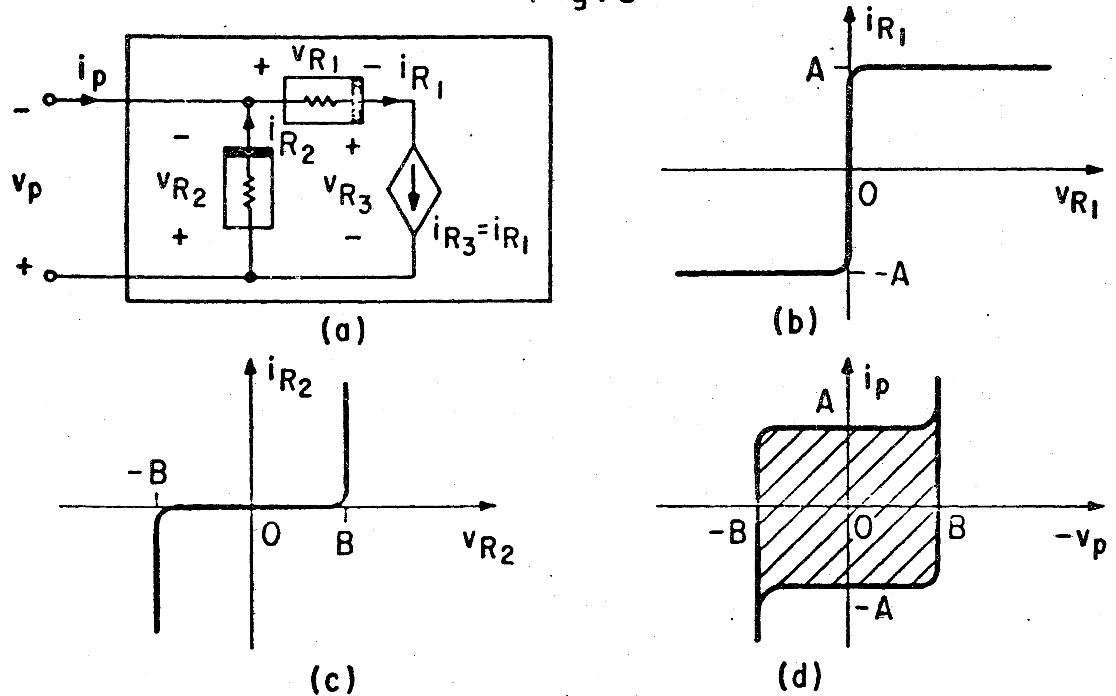
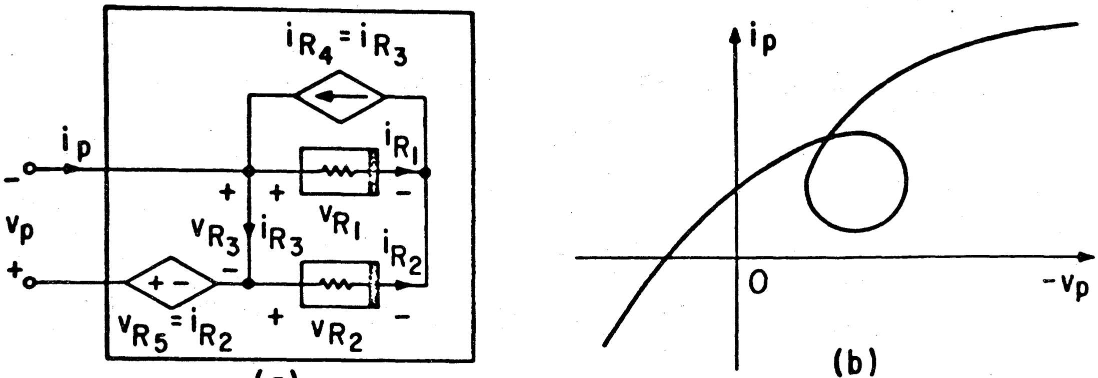
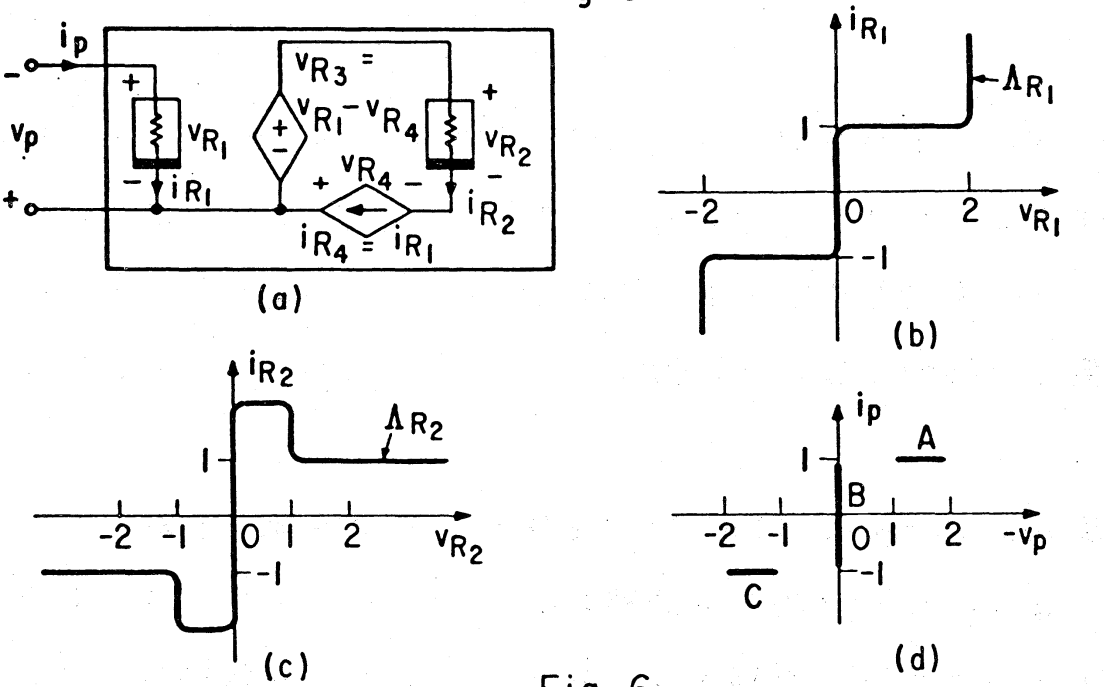


Fig.4



$i_{R_4} = i_{R_3}$
i_p
i_{R_1}
v_p
v_{R_3}
i_{R_3}
v_{R_1}
i_{R_2}
$v_{R_5} = i_{R_2}$
v_{R_2}
(a)
i_p
0
$-v_p$
(b)

Fig. 5



i_p
v_p
$v_{R_3} = v_{R_1} - v_{R_4}$
v_{R_1}
i_{R_1}
v_{R_4}
v_{R_2}
i_{R_2}
$i_{R_4} = i_{R_1}$
(a)
i_{R_1}
Λ_{R_1}
v_{R_1}
(b)
i_{R_2}
Λ_{R_2}
v_{R_2}
(c)
i_p
A
B
C
$-v_p$
(d)

Fig. 6