数理解析研究所講究録
第370巻 1979年 44-57

円周上の写像の位相的エントロピーについて

東大 理　　筱野一洋

一般に、距離空間上の一様連続な自己写像 f について、位相的エントロピー $h(f)$ と呼ばれる0以上の実数、或いは、∞、を定義することができる。$h(f)$は、写像 f が空間を位相的にどの程度混合しているかを表わしていると考えられる。

Bowen と Franks [BF] は、区間上の連続写像が周期 $2^d \cdot n$ (n は3以上の奇数) の周期点をもつとき、その写像の位相的エントロピーと、周期点の個数について、ある下限を与えた。

ここでは、これと同様な結果が、円周 S^1 上の連続写像についても成立することを報告する。

以下、正整数 n について、σ_n で、方程式 $1-t-t^n=0$ の唯一の正数解の逆数を表わすことにする。

定理１． f を円周上の自己連続写像，d をその写像度とする。このとき、

(i) $d=0$ 或るいは -1 のとき，f が周期 n（n は３以上の奇数）の周期点をもてば，

(a) $h(f) \geq \log \sigma_n$,

(b) 任意の $\varepsilon>0$ に対して，整数 $K(\varepsilon)$ が存在して，$k \geq K(\varepsilon)$ なる任意の整数 k に対して，f は少なくとも $(\sigma_n-\varepsilon)^k$ 個の周期 k の周期点をもつ。

(ii) $d=1$ のとき，f が固定点と周期 n（n は奇素数）の周期点を同時にもてば，(i) と同じ結果が成立する。

(iii) $|d| \geq 2$ のとき，

(a) $h(f) \geq \log |d|$,

(b) 任意の $\varepsilon>0$ に対して，整数 $M(\varepsilon)$ が存在して，$k \geq M(\varepsilon)$ なる任意の整数 k について，f は少なくとも $(|d|-\varepsilon)^k$ 個の周期 k の周期点をもつ。

注意

(1) $\sigma_n > \sqrt[n]{2} > 1$，とくに $\log \sigma_n > 0$ である。

(2) (ii) において，固定点の存在を抜かすことはできない。例えば，S^1 の $\frac{1}{3}$ 回転は，周期３の周期点をもつが，その位相的エントロピーは０であり，亦、周期 $k(\neq 3)$ の周期点を持た

ない。

公式 $h(f^m) = m \cdot h(f)$ $(m \geqq 0)$ と、上の注意(1)により、次の系は容易に導かれる。

<u>系2.</u> 円周上の自己連続写像 f が固定点をもち、さらに、$h(f)=0$ であれば、f は、周期 2^n $(n=0,1,2,\cdots)$ の周期点しか持ち得ない。

<u>§位相的エントロピー</u> (詳細は、[W]、[DGS]、参照)

(X,d) を距離空間、$f: X \to X$ を一様連続写像とする。正整数 n, 正数 ε をとる。$E \subset X$ が次をみたす時、E を (n,ε)-separated set という; $\forall x, y \in E$: $x \neq y \Rightarrow \max_{0 \leqq i \leqq n-1} d(f^i x, f^i y) > \varepsilon$.

X の compact な部分集合 K について、$s_n(\varepsilon, K)$ によって、K の (n,ε)-separated subset の cardinality の最大値を表わすことにする。$\bar{s}(\varepsilon, K) \doteqdot \limsup_n \frac{1}{n} \log s_n(\varepsilon, K)$ とおき、さらに、$h(f,K) = \lim_{\varepsilon \to 0} \bar{s}(\varepsilon, K)$ とおく。

$h(f) = \sup\{h(f,K)$; K は X の compact subset$\}$ を、f の位相的エントロピー (topological entropy) と言う。

とくに、X が compact のとき、$h(f) = h(f,X)$ である。

§ 定理の証明

(a) f が周期 n (奇数 ≥ 3) の周期点をもつとする。$P = \{x_1, \cdots, x_n\}$ をその周期軌道とする。但、$x_1, \cdots, x_n$ は、この順序で、S^1上、反時計回りに並んでいるものとする。$I_1 = [x_n, x_1]$, $I_2 = [x_1, x_2]$, $\cdots$, $I_n = [x_{n-1}, x_n]$ とおき、各 I_i には反時計回りの向きを与える。f から導かれる $H_1(S^1, P; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^n$ 上の写像を、$\{I_1, \cdots, I_n\}$ にかんして次のように行列 $A = (a_{ij})_{i,j=1,2,\cdots,n}$ で表現する；

$$f_*(I_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} I_j \quad (i = 1, 2, \cdots, n)。$$

このとき、pair (S^1, P) のホモロジー完全系列と、そこに表われる各ホモロジー群に f から導かれる写像とにより、次が得られる；

$$\det(A - tI) = (d - t)(1 - t^n)/(1 - t)$$
$$= (d - t)(1 + t + t^2 + \cdots + t^{n-1})。$$

注意 $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = d$. $(j = 1, 2, \cdots, n)$.

(これは f の写像度が d であることより容易)

(b) $\{1, 2, \cdots, n\}$ の元を並べてできる有限数列 $\underline{I} = (i_0, i_1, \cdots, i_k)$ が、$\forall r : a_{i_r i_{r+1}} \neq 0$ をみたすとき、admissible であるといい、k を $\underline{I}$ の長さということにする。また、$i_0 = i_k$ のとき、$\underline{I}$ は periodic であるということにする。

admissible な数列 $\underline{I} = (i_0, \cdots, i_k)$ について、S^1 の部分区間の族、

$\mathbb{F}(\mathrm{I};\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k)$ $\quad(\alpha_1=1,2,\cdots,|a_{i_0i_1}|;\cdots;\alpha_k=1,2,\cdots,|a_{i_{k-1}i_k}|)$

を，I の長さに関する帰納法によって次の様に定義する；長さ 0 の列 (i) に関しては，$\mathbb{F}((i))=I_i$ とおく。長さ 1 の admissible な数列 (i,j) を考える。このとき $f(I_i)$ は I_j を少くとも $|a_{ij}|$ 回カバーするから，$|a_{ij}|$ 個の，$\mathbb{F}((i))$ の部分区間 $\mathbb{F}((i,j);\alpha)$ $(\alpha=1,2,\cdots,|a_{ij}|)$ を次のようにとり得る；$\mathbb{F}((i,j);\alpha)$ は閉区間であり，$f_{ij}^{(\alpha)} \underset{\mathrm{def}}{=} f|_{\mathbb{F}((i,j);\alpha)}$ とするとき，$f_{ij}^{(\alpha)}(\text{interior of } \mathbb{F}((i,j);\alpha)) =$ interior of $\mathbb{F}(j)$ かつ，$f_{ij}^{(\alpha)}$ は $a_{ij}>0$ のとき local degree $+1$ を，$a_{ij}<0$ のとき local degree -1 をもつ。さて，長さ $k-1$ の admissible 数列にかんして定義されているとき，$\mathbb{F}((i_0,\cdots,i_{k-1});\alpha_1,\cdots,\alpha_{k-1})$ の閉部分区間 $\mathbb{F}((i_0,\cdots,i_k);\alpha_1,\cdots,\alpha_k)$ を

$$f_{i_0i_1}^{(\alpha_1)}(\text{interior of } \mathbb{F}((i_0,\cdots,i_k);\alpha_1,\cdots,\alpha_k)) = \text{interior of } \mathbb{F}((i_1,\cdots,i_k);\alpha_2,\cdots,\alpha_k)$$

(for $\forall\alpha_1$) なるように定義する。

$\mathbb{F}_k = \{\mathbb{F}((i_0,\cdots,i_k);\alpha_1,\cdots,\alpha_k)$; $(i_0,\cdots,i_k)$ は長さ k の admissible 数列$\}$

とおけば，$\mathbb{F}_k$ は interior が互いに交わらない様な閉区間の族である。特に，1つの列 $\mathrm{I}=(i_0,\cdots,i_k)$ に対して $(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)\neq(\beta_1,\cdots,\beta_k)$ ならば，$\mathbb{F}(\mathrm{I};\alpha_1,\cdots,\alpha_k)\cap\mathbb{F}(\mathrm{I};\beta_1,\cdots,\beta_k)=\phi$ である。また，$|A|=(|a_{ij}|)$ とおけば，

$|A|^k$ の (i,j)-成分 $=\#\{\mathbb{F}((i_0,\cdots,i_k);\alpha_1,\cdots,\alpha_k)$; $(i_0,\cdots,i_k)$ は $i_0=i$, $i_k=j$ なる任意の長さ k の admissible な列$\}$

が成立する。

$\mathrm{I}=(i_0,\cdots,i_k)$ が admissible かつ periodic のとき，$f^k|_{F(\mathrm{I};\alpha_1,\cdots,\alpha_k)}$ は I_{i_0} の部分区間 $F(\mathrm{I};\alpha_1,\cdots,\alpha_k)$ から $I_{i_k}=I_{i_0}$ の上への写像である。故に，$F(\mathrm{I};\alpha_1,\cdots,\alpha_k)$ の点 $p(\mathrm{I};\alpha_1,\cdots,\alpha_k)$ で，f^k によって固定されるものがある。$(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)\neq(\beta_1,\cdots,\beta_k)$ ならば，$p(\mathrm{I};\alpha_1,\cdots,\alpha_k)\neq p(\mathrm{I};\beta_1,\cdots,\beta_k)$ である。もしも，$p(\mathrm{I};\alpha_1,\cdots,\alpha_k)=p(\mathrm{J};\beta_1,\cdots,\beta_k)$ が $\mathrm{I}\neq\mathrm{J}$ に対して成立するならば，この点は $\mathcal{P}$ の元になることが容易にわかる。故に，

$$P_k=\{p(\mathrm{I};\alpha_1,\cdots,\alpha_k)\ ;\ \mathrm{I}\text{ は admissible かつ periodic な，長さ }k\text{ の列}\}$$

とおくと，次の不等式を得る。

$$\#P_k \geqq \mathrm{Tr}\,|A|^k - n\ 。$$

正整数 N を任意に固定し，正数 ε_N を $\mathcal{F}_N$ の任意の元の長さより小さくなるようにとる。P_{Nk} に関係 $\sim$ を次のように入れる；

$$q\sim q' \iff \forall r=0,1,2,\cdots,k-1\ ;\ d(f^{Nr}q,\ f^{Nr}q')\leqq\varepsilon_N.$$

このとき $\forall q\in P_{Nk}$ に対して，q と $\sim$-related な元は高々 3^k 個しかないことがわかる。故に，$\exists Q_k\subset P_{Nk}\ ;\ \forall q,q'\in Q_k$: q と q' とは $\sim$-related でない。かつ $\#Q_k\geqq\frac{1}{3^k}\cdot\#P_{Nk}$。この時，$Q_k$ は (Nk,ε_N)-separated 故，次の不等式を得る。

$$\begin{aligned} h(f) &\geqq \limsup_k\,(1/Nk)\log\#Q_k\\ &\geqq \limsup_k\,(1/Nk)(\log\#P_{Nk}-k\cdot\log 3)\\ &\geqq \limsup_k\,(1/Nk)\log\mathrm{Tr}\,|A|^{Nk}-\frac{1}{N}\cdot\log 3。\quad\cdots(1)\end{aligned}$$

(c) 以下，非負行列の性質をことわりなしに使う。 これについては，[G] の Chapter XIII 参照。

(a)で定義した行列 A は，base $\{I_1,\cdots,I_n\}$ の入れかえによって次のような形になる；

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & A_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & * & \ddots & 0 \\ * & * & \cdots & A_s \end{bmatrix} \qquad \text{------} \ (*)$$

ここで，各 $|A_q|$ は irreducible．（これら $|A_q|$ を irreducible factor と呼ぶことにする。）

$|A|$の irreducible factor $|A_q|$ を任意にとる。$|A_q|$ の size は $r\times r$ であるとする。このとき A_q の graph G_q を次で定義する；

G_q は，r 個の頂点 $1,2,\cdots,r$ と，iからjへ向かう，$|a_{ij}|$個の辺 $i \xrightarrow{\alpha} j$（向きもこめて考える）$(\alpha=1,2,\cdots,|a_{ij}|)$ とからなる 1-complex.

以下 G_q に表われる道 $i_0 \xrightarrow{\alpha_1} i_1 \xrightarrow{\alpha_2} \cdots \xrightarrow{\alpha_k} i_k$ と，記号$(I;\alpha_1,\cdots\alpha_k)$ $(I=(i_0,\cdots,i_k))$ とを同一視することにして，

$$N_k(G_q) = \left\{ \begin{array}{l} \#\ p(I;\alpha_1,\cdots,\alpha_k)\ ;\ p(I;\alpha_1,\cdots,\alpha_k) \text{ は周期}k \\ \text{の周期点。}(I;\alpha_1,\cdots,\alpha_k) \text{ は } G_q \text{ に表われる長さ} \\ k \text{ の circuit (i.e. } i_0=i_k) \end{array} \right\}$$

とおく。

今，$p=p(I;\alpha_1,\cdots,\alpha_k)$ が，f^k の固定点ではあるが，周期が m $(<k)$ であるとする。このとき，容易にわかる様に，$p\in T$ であるか，或るいは，I 自体が periodic of period m (i.e.

$I_j = I_{j+m}$ for $\forall j$）である。故に，次の不等式を得る；

$$N_k(G_q) \geq \mathrm{Tr}\,|A_q|^k - 2n - \sum_{\substack{m|k \\ m<k}} \mathrm{Tr}\,|A_q|^m \qquad \cdots\cdots (2)$$

(d) 定理1の(i)を証明する。$d=0$ 或るいは -1 とし，f が周期 n（奇数 ≥ 3）の周期点をもつとする。この周期点に関して，(a)の様に得られる行列 A を考える。A は(*)の形をしていると考えてよい。故に，$\det(A-tI) = \prod_{i=1}^{s} \det(A_i - tI)$。以下 $P_i(t) = \det(A_i - tI)$　$(i=1,2,\cdots,s)$ とおく。

<u>補題3.</u> 次数（r次とする）が2以上で，t^{r-1} の係数が0でないような $P_q(t)$　$(q=1,2,\cdots,s)$ が存在する。

これは，$\det(A-tI)$ の t^{n-1} 次の係数が0でなく，亦，多項式 $1+t+\cdots+t^{n-1}$ が $\mathbb{R}$ 上1次の因数を持たないことより導かれる。

以下，補題3の様な $P_q(t)$（と，それに対応する A_q, G_q）を考えることにする。

<u>補題4.</u> $\limsup_k \sqrt[k]{\mathrm{Tr}\,|A_q|^k} \geq \sigma_n$.

<u>証明.</u> $\mathrm{Tr}\,A_q \neq 0$ だから，$(A_q)_{ii} \neq 0$ なる i が存在する。

base の入れかえにより，$(A_q)_{11} \neq 0$ としてよい。即ち，G_q内に，**1から出て1に戻る**長さ1の circuit C_1がとれる。さらに，$|A_q|$ が irreducible だから，1から出て1に戻るC_1以外の circuit C_2で，長さがL以下のものがとれる。いくつかのC_1とC_2とを結んでできる長さiの circuit で相異なるものの個数をS_iとおくと，$\sum_{i=1}^{\infty} S_i x^i = \sum_{k=1}^{\infty} (x+x^a)^k = (x+x^a)/(1-x-x^a)$ がみたされる。（a は C_2の長さ）。この級数の収束半径を考えることにより，$\limsup_i \sqrt[i]{S_i} \geq \sigma_n$ がわかる。一方，明らかに，$\mathrm{Tr}\,|A_q|^i \geq S_i$ だから，求める不等式が従う。 $\square$

さて，$\mathrm{Tr}\,|A_q| > 0$ だから，$|A_q|$ は primitive である．(i.e. $|A_q|$ の Perron-Frobenius 根と同じ絶対値をもつ$|A_q|$の固有値は，Perron-Frobenius 根以外にない。）故に，K_1が存在して，$k \geq K_1$ なる任意のkについて，

$$\frac{1}{2}\lambda^k < \mathrm{Tr}\,|A_q|^k \leq L\cdot\lambda^k \qquad \text{------- (3)}$$

となる。ここでλは$|A_q|$の Perron-Frobenius 根。

補題4，上の不等式(3)，及び(b)の(1)を使えば，$h(f) \geq \log \sigma_n$ が導かれる。

一方，(2)と(3)を使えば，より大きな$K(\varepsilon)$をとれば，任意の$k \geq K(\varepsilon)$について，

$$N_k(G_q) \geq (\sigma_n - \varepsilon)^k$$

が成立することがわかる。

(e) $d \neq 0, -1$ のとき、次の補題が必要となる。

補題5. f の写像度を d とする。f が周期 n（奇素数）の周期点をもてば、この周期点から得られる行列 A は、高々2つの irreducible factor しか持ち得ない。

これは、n が奇素数のとき、多項式 $1+t+\cdots+t^{n-1}$ が $\mathbb{Q}$ 上既約であることからただちに従う。

(f) 定理1の(ii)を証明する。$d=1$ とし、f が固定点と、周期 n（奇素数）の周期点をもつとして、この周期点から得られる行列 A を考える。

A が irreducible でない時、$1+t+\cdots+t^{n-1}$ に対応する $|A|$ の irreducible factor（これは primitive になる）に、(d) と同様な議論を適用すればよい。

A が irreducible で、かつ $a_{ii} \neq 0$ なる i が存在するとき、$|A|$ 自身に同様な議論が使える。（このとき $|A|$ 自身が primitive。）

A が irreducible で、かつ、$a_{ii} = 0$ $(\forall i)$ のときを考える。$\{x_1, \cdots, x_n\}$ を、S^1 上に反時計回りにならべられた周期軌道、x_0 を固定点とする。ここで x_0 は x_n と x_1 との間にあるとし

てよい。 $J_0=[x_n,x_0]$, $J_1=[x_0,x_1]$, $J_i=I_i=[x_{i-1},x_i]$ $(i=2,3,\cdots,n)$ を使って (a) と同様にして $H_1(S^1,\{x_0,x_1,\cdots,x_n\};\mathbb{R})\cong\mathbb{R}^{n+1}$ 上に f が induce する写像を行列表示して, $(n+1)\times(n+1)$-行列 $\underline{A}$ を得る; i.e. $f_*(J_i)=\sum_{j=0}^{n}\underline{a}_{ij}J_j$ $(i=0,1,\cdots,n)$
$\underline{A}=(\underline{a}_{ij})_{i,j=0,1,2,\cdots,n}$ 。

このとき, $|A|$ が irreducible で, かつ $a_{ii}=0$ $(\forall i)$ ということにより, $|\underline{A}|$ の irreducible factor $|A'|$ で, その graph が, 補題4の証明の C_1 と C_2 と同様な circuits をふくむものがとれる。このとき $\mathrm{Tr}\,|A'|>0$ 故, $|A'|$ は primitive。以下 (d) と同様な議論を $|A'|$ に適用すればよい。

(g) $|d|\geqq 2$ の場合, 奇素数を周期とする周期点が必ず存在する。即ち;

<u>補題6</u>. $|d|\geqq 2$ のとき, 任意の奇素数 n に対して, f は少くとも $|d(d^{n-1}-1)|$ 個の周期 n の周期点をもつ。

<u>証明</u> $|d|\geqq 2$ 故, f は固定点をもつ。故に, S^1 の universal covering $\mathbb{R}$ 上の写像 $\tilde{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ で, $\tilde{f}(0)=0$ をみたし, f を cover するようなものがとれる。このとき, もしも $\alpha\in\mathbb{R}$ が $\tilde{f}(\alpha)=\alpha+k$ $(k\in\mathbb{Z})$ をみたすならば,

$$\tilde{f}^n(\alpha) = \alpha + k(d^n-1)/(d-1) \qquad (n \geq 1)$$

となることに注意する。

$d \geq 2$ のとき，上の注意によって，$[0,1]$ の互いに交わらない $(d-1)$ 個の開区間 (α_i, β_i) $(i=1,2,\cdots,d-1)$ で次の様なものが存在する；

$$\begin{cases} \circ\ (\alpha_i, \beta_i) \text{ には，} \tilde{f}(x) \equiv x \bmod \mathbb{Z} \text{ なる } x \text{ は存在しない。} \\ \circ\ (\alpha_i, \beta_i) \text{ には，} \tilde{f}^n(y) \equiv y \bmod \mathbb{Z} \text{ なる } y \text{ が少なくとも} \\ \quad ((d^n-1)/(d-1) - 1) \text{ 個存在する。} \end{cases}$$

即ち，(α_i, β_i) に対応する S^1 上の開区間には，f の固定点は存在しないが，f^n の固定点は少くとも $((d^n-1)/(d-1) - 1)$ 個存在する。n は素数だから，f^n のこのような固定点は，f の周期 n の周期点である。結局，S^1 上には，周期 n の周期点が少くとも，$(d-1)\cdot\left(\frac{d^n-1}{d-1} - 1\right) = d\cdot(d^{n-1}-1)$ 個存在することになる。

$d \leq -2$ のときも同様． □

(h) 定理 1 の (iii) を証明する。補題6 によって存在の保証された周期 n（奇素数）の周期点から，(a) の様にして，行列 A をつくる。

$|A|$ が irreducible のとき，$\mathrm{Tr}\, A = \pm(d-1) \neq 0$ だから，$|A|$ は primitive である。このとき，$|A|$ の Perron-Frobenius 根が $|d|$ 以

上になることが次のようにしてわかる。一般に，irreducibleな非負行列 $B=(b_{ij})$ に対して，そのPerron-Frobenius根は $\min_i(\sum_j b_{ij})$ 以上になることが知られている（[G], p.65）。故に(a)の最後の注意を使えば，

$$
\begin{aligned}
|A| \text{のPerron-Frobenius根} &= {}^t|A| \text{のPerron-Frobenius根} \\
&\geq \min_j \Big(\sum_i |a_{ij}|\Big) \\
&\geq \min_j \Big|\sum_i a_{ij}\Big| \\
&= |d| \quad 。
\end{aligned}
$$

さて，一方，$|A|$ がirreducibleでない時，補題5によって，$|A|$ は2つのirreducible factorをもち，そのうちの一方は，1×1 行列 $(|d|)$ となる。$(|d|)$ はもちろんprimitiveで，かつ，そのPerron-Frobenius根は $|d|$。

定理1の(iii)は，$|A|$ がirreducibleのときには $|A|$ 自身を，また $|A|$ がirreducibleでないときには，そのirreducible factor $(|d|)$ を使うことにより，上記(d)と同様にして導かれる。

以上で証明は完結する。 □

REFERENCES

[BF] R. Bowen and J. Franks, The Periodic Points of Maps of the Disk and the Interval, Topology 15 (1976), 337-342.

[DGS] M. Denker, C. Grillenberger and K. Sigmund, Ergodic Theory on Compact Spaces, Springer Lecture Notes in Math. 527 (1976).

[G] F.R. Gantmacher, The Theory of Matrices, vol. II, Chelsea, 1959.

[W] P. Walters, Ergodic Theory —— Introductory Lectures, Springer Lecture Notes in Math. 458 (1975).