数理解析研究所講究録
第 370 巻 1979 年 64-77

安定性予想に関するPlissの結果について

愛知大学教養部　垣内伸彦

I　はじめに

次の安定性予想がS. Smaleによって提出されて以来10余年がすぎた。

安定性予想：$f \in Diff^1(M)$が構造安定であることと次の2条件は同値である。i) fはAxiom Aを満たす。ii) fはStrong Transversality Conditionを満たす。

この2条件から構造安定を導き出す方向は，Robbin, Melo, Robison, etcによって1976年に最終的に解決した。一方その"逆問題"は未解決で当面の焦点は$\dim M=2$の場合である。(今春Birkleyから帰国した鈴木治夫教授(北大)の情報によれば中国の研究者廖山涛が$\dim M=2$の場合を解決したようであるが，我々はまだその事実を確認できていない。)

さて，この報告は$\dim M=2$の場合の1つの到達点である次のPlissの結果の基本的なideaを解明することを目的とする。

定理[7]　$\dot{x}=X(x,t)$　$x \in R^2$をTime-Dependent 1-Periodic System (以下T.D.P.S.と略す)とする。その invariant set Iが

次の条件を満すとき，I は hyperbolic structure をもつ。

i) $\dot{x}=X(x,t)$ は uniformly coarse である。 ii) periodic orbit は I のなかで dense である。 iii) Meas $I=0$

最近 C. Robinson [8] はこの定理を $x\in M$ と一般化し，証明の1部を改良した。我々はこの論文[8]と Pliss の原論文([3], [4], [5], [6], [7])に基ずき検討を進めよう。

II 諸定義と諸結果

そのために必要不可決な概念の定義と既に知られている結果をまとめておこう。

1) 諸定義　まず T. D. P. S. $\dot{x}=X(x,t)$ $x\in M$ が与えられている。この $\dot{x}=X(x,t)$ が <u>uniformly coarse</u> とは ある $\varepsilon>0$ が存在して C^1-topology で ε 以内の任意の T. D. P. S. である Y が 0 を特性指数として持たないことである。 $M'=R\times M/\sim$ とする。

$\dot{x}=X(x,t)$ は M' 上の Time-Independent Flow とも考えられるが このとき $I\subset M'$ が次の条件をみたすとき <u>invariant set</u> という $(t_0,x_0)\in I$ ならば その解 $\varphi(t,t_0,x_0)$ は任意の t に対して I に属する。 invariant set I が次の条件をみたすとき I は <u>hyperbolic structure</u> を持つという。 i) 任意の $(t,x)\in I$ に対して continuous splitting が存在して $T\varphi(\tau,t,x)$-invariant である $T_xM=E^u_{(t,x)}\oplus E^s_{(t,x)}$, ii) $E^u_{(t,x)}=E^u_{(t+1,x)}$, $E^s_{(t,x)}=E^s_{(t+1,x)}$ iii) 実数 $C>0$, $0<\lambda<1$ が存在して次の条件をみたす。 a) $v\in E^s_{(t,x)}$ $\tau>t$ のとき

$|T\varphi(\tau,t,x)v| < C\lambda^{\tau-t}|v|$　b) $v\in E^u_{(t,x)}$　$\tau<t$ のとき $|T\varphi(\tau,t,x)v| < C\lambda^{t-\tau}|v|$。ここで $T\varphi(\tau,t,x)$ は T_xM から $T_{\varphi(\tau,t,x)}M$ への derivative map である。

2) 諸結果　以下 $\dot{x}=X(x,t)$ は uniformly coarse で I はその invariant set とする。

i) I には continuous splitting が存在する (Pliss [3], Mañé [2])

ii) この splitting を使って座標変換を行うと $\dot{x}=X(x,t)$ は次のようにかける　$\dot{y}=P(t)y+X'(y,t)$　$P(t)=\begin{pmatrix} p(t,y) & 0 \\ 0 & g(t,y) \end{pmatrix}$

この $p(t,y)$, $g(t,y)$ は1階微分に相当する部分で今後の議論に本質的役割を果す。

iii) もとの metric を d とし、座標変換を行った新しい metric を d' とする。このとき正数 $N>1$ が存在して次式が成立する。

$N^{-1}d(x,y) < d'(x,y) < Nd(x,y)$　(Pliss [3])

iv) $c>0$ と $e>0$ が存在して任意の $(t,x)\in I$、任意の $\tau<t$ に対して次の式が成立する。

$$\int_\tau^t \{g(\alpha,x)-p(\alpha,x)\}d\alpha \le e - c(t-\tau)$$

この性質を uniformly integrably separated (略して U.I.S.) ということにする。(Pliss [3], Mañé [2])

v) 任意の periodic orbit $(t,x)\in I$ に関して ある数 $h>0$ が存在して次式が成立する。ここで τ はその period とする

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau p(\alpha,x)d\alpha > h,\quad \frac{1}{\tau}\int_0^\tau g(\alpha,x)d\alpha < -h \text{ (Franks [1])}$$

III 問題設定と証明の各段階

さて我々の目標は次の定理のideaの基本を探ることにある。

<u>定理</u>. uniformly coarse な T.D.P.S. $\dot{x} = X(x, t)$ $x \in M$, $\dim M = 2$ が与えられている。$I \subset M' = R \times M/\sim$ を compact invariant set で次の条件をみたすものとする。

i) periodic orbit は I で dense である。ii) $\mathrm{Meas}\, I = 0$.

このとき I は hyperbolic structure を持つ。

○ 先ず hyperbolic structure を別の言葉に書き直そう。II で登場した関数 $p(t, x)$, $q(t, x)$ を使うと I が hyperbolic structure を持つことと次の事は同値である。

2つの定数 $C' > 0$, $e' > 0$ が存在して任意の $(t, x) \in I$, 任意の $T > \tau$ に対して次式が成立する。

$$\int_\tau^T p(\alpha, x)\, d\alpha \geq C'(T - \tau) - e', \quad \int_\tau^T q(\alpha, x)\, d\alpha \leq e' - C'(T - \tau).$$

これは Time 1 map $\varphi(1, 0, x)$ の $E^u_{(0,x)}$ $E^s_{(0,x)}$ 方向の derivative $T\varphi(1, 0, x)$ が $\begin{pmatrix} e^{\int_0^1 p\, d\alpha} & 0 \\ 0 & e^{\int_0^1 q\, d\alpha} \end{pmatrix}$ であることから直ちに出る。

○ さて我々はこの定理を背理法で証明しよう。ここで $p(t, x)$, $q(t, x)$ に関する上の2式のいずれか一方のみを注目しても一般性を失わないことに注意する。それでは $p(t, x)$ に関する式を否定して矛盾を導くことにする。我々の出発点は次の様になる。

任意の $\delta > 0$ と任意の $D > 0$ に対して、$T > \tau$, $(t, x) \in I$ がそれぞれ存在して $\int_\tau^T p(\alpha, x)\, d\alpha < \delta(T - \tau) - D$ が成立する

○上式からどのようにして矛盾を導き出すのか，それを簡単に述べれば次の様である。必要ならば δ をいくらでも 0 に近ずけ D をいくらでも大きくとり，長い時間 $[0, \tau]$ の間積分値 $\int_0^t p\,d\alpha$ の小さい点 $(t, x) \in I$ を見つける。この $[0, \tau]$ の間に積分値の大きい区間 $[t_{2i}, t_{2i+1}]$ が多く存在するという奇妙な現象を closing lemma の variation（Pliss [5]）を使って示し，この事実と $\mathrm{Meas}\, I = 0$ を使って矛盾に導くのである。

○この作業を Robinson に従って 3 段階に分けてみよう。

Step I．$(0, x) \in I$ を通る orbit $\varphi(t, 0, x)$ で次の条件をみたすものを見つける（定数は後で解説する）

$$d'(x, \varphi(\tau, 0, x)) < \frac{\varepsilon}{20} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3.1)$$

$$\int_0^t p(\alpha, x)\,d\alpha \leq \delta t + M \qquad 0 \leq t \leq \sigma/\delta \quad \cdots\cdots (3.2)$$

$$\int_0^t p(\alpha, x)\,d\alpha \leq 0.4 h t + M \qquad 0 \leq t < \tau \quad \cdots\cdots (3.3)$$

Step II．上の $[0\ \tau]$ の中に次の条件をみたす $\nu+1$ 個の disjoint interval $[t_{2i}, t_{2i+1}]$ の存在を示す。

i) $\displaystyle\int_{t_{2i}}^{t_{2i+1}} p(\alpha, x)\,d\alpha > 0.8 h\,(t_{2i+1} - t_{2i})$

ii) $t_{2i+1} - t_{2i} > (\sigma - \sigma_1)/\delta$

Step III．Step II の i) ii) をみたす区間が高々 ν 個あって $\nu+1$ 個はない区間 $[0, \rho_\nu]$ を考える．

i) $[0, \rho_\nu]$ の部分区間で (3.2)，(3.3) が成立する区間が存在する．ii) τ を適当にとることにより (3.1) も

成立するように出来る。よって $[0, \beta_L]$ の部分区間で Step I をみたすものが存在することになり，結果として $[0, \beta_L]$ の中に $L+1$ 個の Step i) ii) をみたす disjoint interval が存在することになり矛盾が成立する。

ここで Meas $I=0$ は Step III の ii) のみにつかう。それ以外は uniformly coarse だけで展開していく。

IV Step I の証明

(1). 最初にいくつかの準備をする。

○ 次の Lemma が成立するような σ を固定する。

Lemma (4.1) $d'(x, y) < \delta/20$ とする。このとき $0 \leq t \leq \sigma/5$ ならば次式が成立する

$$d'(\varphi(t,0,x), \varphi(t,0,y)) < \frac{\delta}{10} \exp\left(1+e+\int_0^t p(\alpha,x)\,d\alpha\right)$$

この Lemma は座標変換によって与えられた式と Gronwall の不等式から出てくる。

○ 次の式をみたす M を固定する。

$$|p(t,x)| \leq M-1 \qquad \forall (t,x) \in I$$

これは I の compactness と splitting の continuity から出てくる。

○ 次の条件をみたす k を固定する。

$(0, x^{(m)}) \in I \quad m=1,2,\cdots,k$ のうち i, j が存在して

$d(x^{(i)}, x^{(j)}) < \dfrac{\delta}{20N}$ となる。

○ 最後に次の一般的 Lemma を準備する。

Lemma (4.2) $f(t)$ は $[0, \tau]$ で連続で次の条件が

成立するとする。 i) $|f(t)|<M$, ii) $\int_0^T f(\tau)d\tau < -D$ ($D>0$)

iii) $k=[D/M]$ ([ ] は Gauss 記号)

このとき $k+1$ 個の整数 $s_0 < s_1 < \cdots < s_k \le T$ が存在して

任意の $0 \le t \le T$, 任意の $0 \le i \le k$ に対して $\int_{s_i}^t f(\tau)d\tau \le M$

が成立する。

この Lemma は初等的だが今後の議論で幾度か重要な役割を果す。

(2) 以上の準備の上で Step I の証明に入ろう。

○ 我々の出発点は次の様である。任意の $\delta>0$, $D>0$ に対して

適当な $T>\tau$ $(t,x)\in I$ が存在して

$\int_\tau^T p(\alpha,x)d\alpha < \delta(T-\tau)-D$ が成立する。

○ $f(t)=p(t,x)-\delta$ とおくと 上式は $\int_\tau^T f(\tau)d\tau < -D$ となる。

○ D は任意だから $M[k+\sigma/\delta]\le D$ が成立する D を決め

Lemma (4 2) を適用すると

$r+1$ 個 ($r=[k+\sigma/\delta]$) の整数 $\tau \le s_0 \le s_1 < \cdots < s_r \le T$

が存在して 任意の $s_i \le t \le T$ に関して $\int_{s_i}^t f(\tau)d\tau \le M$ が成立する。

○ k の定義より $0 \le i < j \le k$ が存在して次式が成立する。

$d'(\varphi(s_i,0,x), \varphi(s_j,0,x)) < \delta/26$

$s_i+\sigma/\delta < s_j+\sigma/\delta \le s_k+\sigma/\delta \le T$

$\int_{s_i}^t f(\tau)d\tau \le M \qquad s_i \le t \le s_j+\sigma/\delta$

ここで $\tau = s_j - s_i$ とおき 必要ならば $\varphi(s_i,0,x)$ を x と

置きかえると 次式が得られる。

$$\int_0^t \varphi(\alpha, x)\,d\alpha \le \delta t + M \qquad 0 \le t \le \tau + \sigma/\delta$$

$$d'(x, \varphi(\tau, 0, x)) < \delta/20$$

よって (3.1), (3.2), (3.3) が証明された。

V. Step II の証明

(1) いくつかの準備。次の3つの Lemma を仮定する。

○ Lemma (5.1) (Pugh [9])

$p_0, \cdots, p_m$ を M 上の有限個の相異なる点とし $\alpha = 10\,d(p_0, p_m)$ とおく。このとき次の条件をみたす p_i, p_j が存在する。

a) $d(p_i, p_0) < \alpha$, $d(p_j, p_0) < \alpha$

b) $k \ne i, j$ のとき $d(p_i, p_k) > 0.9\,d(p_i, p_j)$

$d(p_j, p_k) > 0.9\,d(p_i, p_j)$

○ Lemma (5.2) (Pliss [5])

$\dot{x} = X(x, t)$ の flow を $\varphi(t, t_0, x_0)$ とする。$(t_0, x_0) \in I$

このとき任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\theta > 0$, $r > 0$ が存在して次のことが成立する： $d(x_0, x) < r$, $d(x_0, y) < r$ をみたす任意の x, y に対して次の条件をみたす T.D.P.S. である $Y(x, t)$ が存在する (この flow を $\psi(t, t_0, x_0)$ とする)

a) φ と ψ は C^1-topology で ε 以内である

b) $\psi(\theta, -\theta, \varphi(-\theta, 0, x)) = \varphi(\theta, 0, x)$

c) perturbation の support は

$$\left\{ (\varphi(t, 0, z), t) \;\middle|\; \begin{array}{c} d(z, x) \le 0.9\,d(x, y) \cap d(z, y) \le 0.9\,d(x, y) \\ -\theta \le t \le \theta \end{array} \right\}$$

○ Lemma (5.3)　$\sigma_1 = 0.2\frac{h}{M}\sigma$, $2\theta\nu = [\sigma_1/\delta]$ とする.

このとき任意の $0 \leq i \leq \nu$ に関して次式が成立する。

$$d'(\varphi(2\theta i+\tau), \varphi(2\theta i)) \leq \frac{\delta}{10}\exp\left(1+e+\int_0^{2\theta i} p(\alpha, x)d\alpha\right)$$

ここで $\varphi(t) = \varphi(t, 0, x)$ とする。

(2) 上のことを前提にして Step II の証明に入ろう。

まず $\varphi(t)$ $(0 \leq t \leq \sigma_1/\delta)$ の tubular nbd $S(t)$ を考える。

$$S(t) = \left\{x \in M \mid d'(x, \varphi(t)) < \delta\exp\left(1+e+\int_0^t p(\alpha, x)d\alpha\right)\right\}$$

$0 \leq t \leq \sigma_1/\delta$。このとき次の一連の主張が成立する。

○ 主張 (5.4)

各 $0 \leq i \leq \nu$ $(2\theta\nu = [\sigma_1/\delta])$ について次の点集合

$\{\varphi(2\theta i+m) \mid m = 0, 1, \cdots, \tau\}$ を考える。

このとき次の条件をみたす $0 \leq m_{2i} < m_{2i+1} < \tau$ が存在する。

a) $j = 0, 1$ に対して $\varphi(2\theta i + m_{2i+j}) \in S(2\theta i)$

b) $j = 0, 1$, $0 \leq m \leq \tau$ $(m \neq m_{2i}, m_{2i+1})$ に対して

$$d'(\varphi(2\theta i+m_{2i+j}), \varphi(2\theta i+m)) > 0.9\, d'(\varphi(2\theta i+m_{2i}), \varphi(2\theta i+m_{2i+1}))$$

これは Lemma (5.1) の単純な応用である.

○ 主張 (5.5)

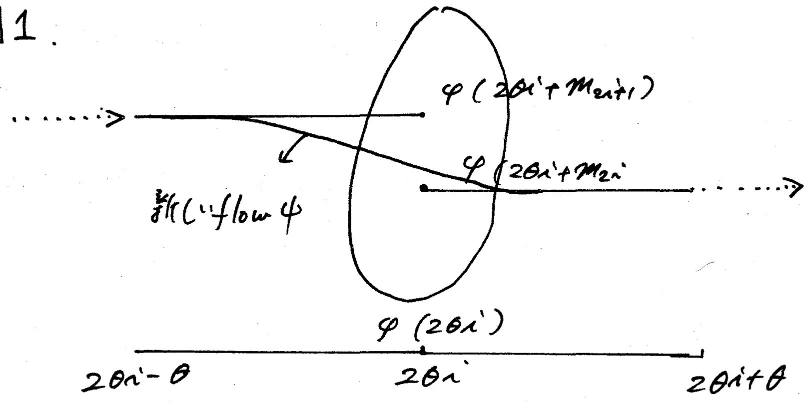
上の m_{2i}, m_{2i+1} に関して次式が成立する。

$$\int_{2\theta i+m_{2i}}^{2\theta i+m_{2i+1}} p(\alpha, x)d\alpha \geq 0.9h\,(m_{2i+1} - m_{2i})$$

ここでは uniformly coarseness から任意の periodic orbit (その period β) に対して $1/\beta\int_0^\beta p(\alpha, x)d\alpha > h$ が成立することと

Lemma(5.2)を図1のように応用することによって導かれる。ただし新しいflowによるperturbationは α/k 以下にする

図1.

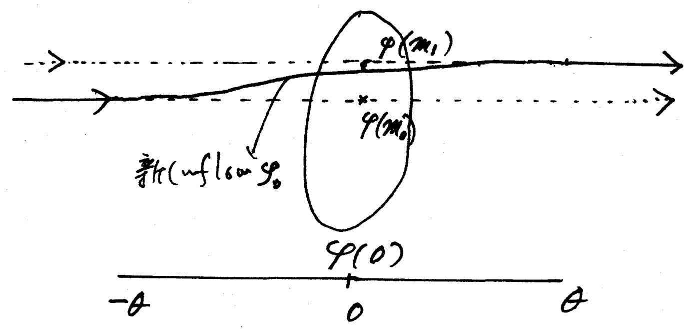


○ 主張(5.6)

この $[m_{2i}, m_{2i+1}]$ $(0\le i\le \nu)$ をdisjointになるようにとれる。

この証明もLemma(5.2)の応用だが前と少し様子が異なるので説明しよう。まず $[m_0, m_1]$ は主張(5.4)そのものである。次に図2のように $\varphi(m_0-\theta)$ から $\varphi(m_1+\theta)$ までのpathを切りとる作業を行う.（点線の部分がそれである.）

図2.



この新しいflowを φ_0 とし $\tau^0=\tau-(m_1-m_0)$ とする. この φ_0 にも(3.1), (3.2), (3.3)が成立することは容易である。従ってこの φ_0 に主張(5.4)を再度用いて $\varphi_0(2\theta+m_{2+j})\in S(2\theta)$ $(j=0,1)$

かつ $m_1 < 2\theta + m_2$ となるような $0 < m_2 < m_3 < \tau^0$ をみつける。

ここで上同様に $\varphi_0(2\theta+m_2-\theta)$ から $\varphi_0(2\theta+m_3+\theta)$ までの path をきりとり新しい flow を φ_1 とする。以下同様に行えばよい。

VI Step III の証明

(1) 区間 $[0, \rho_\nu]$ の中には高々 ν 個の区間 $[r_i, r_i']$ で次の条件をみたすものがあるとする。

$$\int_{r_i}^{r_i'} p(\alpha, x)\,d\alpha \geq 0.8h\,(r_i'-r_i), \quad r_i'-r_i > (\sigma-\sigma_1)/\delta$$

$$0 \leq r_1 < r_1' \leq r_2 < r_2' < \cdots < r_\nu < r_\nu' = \rho_\nu$$

我々はこの $[0, \rho_\nu]$ の中に (3.2), (3.3) をみたす部分区間 $[s_i, s_i']$ を見つけることにしよう。ここでは uniformly coarseness しかつかわない。

○ $f(t) = p(t, x) - \delta$ とおくと

$$\int_{r_i}^{r_i'} f(\tau)\,d\tau \geq 0.7h\,(r_i'-r_i)$$

$$\int_0^t f(\tau)\,d\tau \leq M \qquad (0 \leq t \leq \rho_\nu)$$

積分値 $\int_0^t f(\tau)\,d\tau$ は小さいのに $[0, \rho_\nu]$ の中に積分値の大きい区間が多く存在するということから区間 $[r_i', r_{i+1}]$ のうちには積分値は負でその絶対値の大きいのも多くあるはずである。それらの区間 $[r_i', r_{i+1}]$ のうち $\int_{r_i'}^{r_{i+1}} f(\tau)\,d\tau < -0.3h\,(\sigma-\sigma_1)/\delta$ となる区間のみを拾い出し、それ以外の区間を整理統合して新しい区間

$\tau_0 < t_1 < \tau_1 < t_2 < \cdots < t_n < \tau_n$ をつくる。このとき

$I_j = \int_{t_j}^{\tau_j} f(\tau)\,d\tau$, $2J_j = \int_{\tau_{j-1}}^{t_j} f(\tau)\,d\tau$ とおくと次式が成立する。

$\sum_{j=1}^{n} I_j > 0.32\nu h(\sigma-\sigma_1)/\delta$, $\sum J_j < -0.3h(\sigma-\sigma_1)/\delta$

○ 次に $[\tau_{j-1}, t_j]$ に対して 次のような θ_{j-1} が存在する。

$\int_{\tau_{j-1}}^{\theta_{j-1}} f(\tau)d\tau = J_j$, $\int_{\theta_{j-1}}^{t} f(\tau)d\tau \le 0$ $(\theta_{j-1} \le t \le t_j)$ かつ

$\int_{\theta_{j-1}}^{t_j} f(\tau)d\tau = J_j$。 このとき 次の主張が成立する。

主張 (6.1)

(a) δ に関する関数 $L(\delta)$ ($L(\delta)\to\infty$ as $\delta\to 0$) が存在して

次の不等式が成立する。

$\theta_{j-1} - \tau_{j-1} \geq -L(\delta)J_j$, $t_j - \theta_{j-1} \geq -L(\delta)J_j$

(a) $L(\delta) > 10\sigma/h(\sigma-\sigma_1)$ となる $L(\delta)$ に対して

$t_j - \theta_{j-1} \geq \sigma/\delta$ が成立する.

○ $\{\theta_i\}_{i=0,\cdots,n-1}$ を更に 2種類 $\{\theta_{j(i)}\}_{i=1,\cdots m}$

$\{\theta_{k(i)}\}_{i=1,\cdots,g}$ $(m+g=n)$ に分ける。

$\theta_{j(i)}$ とは $\int_{\theta_{j(i)}}^{t_i^*} f(\tau)d\tau \geq 0.3h(t_i^* - \theta_{j(i)})$ となる t_i^* が

$(\theta_{j(i)} \le t_i^* \le \tau_n)$ 存在するような θ_i のことである。

$\theta_{k(i)}$ は $\theta_{j(i)}$ 以外の θ_i のことである。 このとき次のことが成立する。

主張 (6.2)

$-0.3hL(\delta)\sum_{i=1}^{m} J_{j(i)+1} < \sum_{j=1}^{n} I_j$

$-\sum_{i=1}^{g} J_{k(i)+1} > 0.1\nu h(\sigma-\sigma_1)/\delta$

これは $\theta_{j(i)}$ が多くはないことを示す。 以後 $\theta_{k(i)}$ に焦点を合わす。

○ 主張 (6.3)

各区間 $[\tau_{k(i)}\ \theta_{k(i)}]$ には $[-J_{k(i)+1}/M]$ 個の $\{S_\beta^i\}$

($\tau_{k(i)} \leq s^i_\beta \leq \theta_{k(i)}$) が存在して任意の $s^i_\beta \leq t \leq \theta_{k(i)}$ に関して $\int_{s^i_\beta}^{t} f(\tau)d\tau \leq M$ が成立する。(従って任意の $s^i_\beta \leq t \leq \tau_{k(i)+1}$ に対して $\int_{s^i_\beta}^{t} f(\tau)d\tau$ も成立する。)

これは単なる Lemma (4.2) の応用である。

各 i に関して $\{s^i_\beta\}$ が存在するが これらに適し番号をつけて $\{s_i\}_{i=1,\cdots,A}$ とする。このとき次式が成立する。

$$\int_{s_j}^{t} p(\alpha, x)d\alpha \leq \delta(t-s_j)+M \quad (s_j \leq t \leq s_j + \sigma/\delta)$$

$$\int_{s_j}^{t} p(\alpha, x)d\alpha \leq 0.4h(t-s_j)+M \quad (s_j \leq t \leq s_A)$$

これで Step III の i) が確かめられた。

(2) 次に (3.1) をみたす $[s_i, s_j]$ を見つけよう。

ここで初めて Meas $I = 0$ をつかう。次の主張が成立する。

○ 主張 (6.4)

$\{s_i\}$ の個数 即ち A は次の不等式をみたす。

ある η が存在して $A > \eta\delta^{-2}$

○ この主張と Meas $I=0$ をつかって $d(\varphi(s_i), \varphi(s_j)) < \frac{\delta}{20N}$ となる i, j が存在することを示す。もしそのような i, j が存在しなかったとする。すると各 $\varphi(s_i)$ の $\delta/40N$ nbd は disjoint である。今 U_δ を I の $\delta/40N$ nbd の大きさとする。このとき Meas $U_\delta > A\pi(\delta/40N)^2$ が成立する。この式に主張 (6.4) の A の値を代入すると Meas $U_\delta > \eta\pi/(40N)^2$。ところが δ を小さくすると Meas $U_\delta \to 0$ となる。これは矛盾。よって証明された。

参考文献

[1] J. Franks, Necessary conditions for stability of diffeomorphisms, Trans. Amer. Math. Soc., 158 (1972)

[2] R. Mañé, Expansive diffeomorphisms, Dynamical Systems – Warwick 1974, Springer Lecture Note 468

[3] V. Pliss, The Coarseness of a Sequence of Linear Systems of Second-Order Differential Equations with Periodic Coefficient

[4] V. Pliss, Properties of Solutions of a Sequence of Second-Order Periodic Systems with Small Nonlinearities.

[5] V. Pliss, A Variant of a Lemma Concerning Closure

以上 [3] [4] [5] は Differential Equations 7 (1971)

[6] V. Pliss, The Location of Separatrices of Periodic Saddle-Point Motions of Second-Order Differential Equations, D.E. 7. (1971)

[7] V. Pliss, Properties of Solutions of a Periodic System of Two Differential Equations Having an Integral Set of Measure zero, D. E 8 (1972)

[8] C. Robinson, Stability, Measure Zero, and Dimension Two Imply Hyperbolicity (pre-print 1979)

[9] C. Pugh, The closing lemma, Amer. J. Math 89 (1967).