数理解析研究所講究録
第 370 巻 1979 年 78-87

安定性予想に対する Closing Lemma の応用について

北大 理学部　　三波 篤郎

§1. 力学系の理論における基本的な問題の1つは、stable な system を characterize する事である。

これについて、S. Smale, J. Palis は次の事を予想した。

Conjecture (S. Smale, J. Palis [5])

構造安定 $\Longleftrightarrow$ Axiom A + Strong Transversality condition

Conjecture (S. Smale [6])

Ω－安定 $\Longleftrightarrow$ Axiom A + No Cycle property

これらの予想は、vector field, diffeomorphism の双方に対して意味を持っているが、ここでは、有限次元、closed 可微分多様体 M 上の diffeomorphism についてのみ考える。

多くの部分的結果が提出され、結局、C^1－stability の場合、次の予想が証明されれば、上の2つの予想は最終的に解決される事がわかっている。(なお、詳しくは、R. Mañé [2] 参照)

Conjecture

$f \in \mathcal{F}(M)$（Ω-安定 or 構造安定）

$$\underset{?}{\Longrightarrow} \quad \Lambda_i(f) : \text{hyperbolic set} \quad (0 \leq {}^\forall i \leq \dim M)$$

ここで，

$$\mathcal{F}(M) = \mathrm{int}_1 \{ f \in \mathrm{Diff}^1(M) \mid f \text{の周期点は hyperbolic} \}$$

また，$\mathcal{F}(M) \ni f$ について，

$$\Lambda_i(f) = \mathrm{cl} \{ p \in \mathrm{Per}(f) \mid p \text{の stable dimension} = i \}$$

さて，この問題を扱う上で，R. Mañé の次の結果が重要である．

(1.1) Proposition（R. Mañé [1]）

$f \in \mathcal{F}(M)$ について次の事が成立する．

(i) f のある近傍 $\mathcal{U}$，${}^\exists C_1 > 0$，$0 < {}^\exists \lambda_1 < 1$

が存在し，${}^\forall g \in \mathcal{U}$ について，

$$\| Tg^{\pi(x,g)} \mid E^s_x(g) \| \leq C_1 \lambda_1^{\pi(x,g)}$$

$$\| Tg^{-\pi(x,g)} \mid E^u_x(g) \| \leq C_1 \lambda_1^{\pi(x,g)} \qquad {}^\forall x \in \mathrm{Per}(g)$$

ここで，$\pi(x,g)$ は x の g に対する周期，また，

$E^s_x(g)$（$E^u_x(g)$）は，g の x における stable

(unstable) sub space．

(ii) $0 < {}^\forall j < \dim M$ について，ある Tf-invariant な

$TM \mid \Lambda_j$ の subbundle E^s_j，E^u_j 及び，

${}^\exists C_2 > 0$，$0 < {}^\exists \lambda_2 < 1$ が存在し，

$$TM \mid \Lambda_j = E^s_j \oplus E^u_j$$

$$\| Tf^n | E^s_{j x} \| \cdot \| Tf^{-n} | E^u_{j f^n(x)} \| \leq c_2 \lambda_2^n$$
$$\forall x \in \Lambda_j \ , \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+ \quad \lrcorner$$

この結果から．Λ_j が hyperbolic set になるなら．それに対応する $TM|\Lambda_j$ の splitting は E^s_j, E^u_j でなければならない事がわかる． この事から C^1 安定性予想を解決するための．最終的な目標は．構造安定．Ω－安定．あるいは．$\mathcal{F}(M)$ の f について，$Tf^n|E^s_j$ ，$Tf^{-n}|E^u_j$ が．$n \to \infty$ の時．exponential な．contraction となる事を示す事である．さて．この問題に関して．Closing Lemma の方法が有効であろうと考えられるのは．次のような理由による．

$Tf^n|E^s_j$ ，$Tf^{-n}|E^u_j$ が exponential contraction でないと仮定した時．f が 構造安定，Ω－安定．あるいは．$\mathcal{F}(M)$ である事に矛盾する事を示せばよいのだが．わずかな perturbation に対して．それがもとの f と（又は．$f|\Omega(f)$ と）位相共役になるかどうかの判定は．非常に困難であるように思われる． そこで．実際上．使いやすい条件は $\mathcal{F}(M)$ にならざるを得ない． $Tf^{-n}|E^u_j$ が contraction でないと仮定すると．次の事がわかる．

<u>(1.2)</u> $\exists p_*$：回帰点，$\exists v \in E^u_{j p_*}$，$\|v\| = 1$ が 存在し． $\| Tf^n v \| \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+ \ \lrcorner$

つまり．unstable subspace の element でありながら．

正の iteration に対して、norm が増大しないものが存在するのである。 そこでもし、この回帰点をわずかな perturbation によって、周期点にできれば、(1.1) (i) に矛盾するような周期点を作れるであろう、というわけである。 しかし、一般には、そう簡単にはゆかない。 その理由は、(closing Lemma の方法で) 閉じて、周期軌道にできるような orbit (の一部) の各点相互の位置関係の条件と、そこにおける norm の変化を、うまく同調させる事が、今のところできていないからである。 しかし、ある種の条件の下では可能である。 ここでの目的は、そのような 2つの case を述べる事である。

$f \in \mathrm{Diff}^1(M)$, $M \supset \Lambda$: compact f-invariant sub set

$TM|\Lambda \supset E$: Tf-invariant subbundle とした時、

$\Gamma^b(E) = \{ E$ の bounded section 全体 $\}$

$\Gamma^c(E) = \{ E$ の continuous section 全体 $\}$

とすると、これらは sup. norm で Banach space になる。

$\Gamma = \Gamma^b$ or Γ^c とした時、 $f_* : \Gamma \longrightarrow \Gamma$ を、

$f_*(\sigma) = Tf \circ \sigma \circ f^{-1}$ ときめると、

f_* は、isomorphism (linear homeomorphism) となる。
次の 2つの定理が、ここでの主要結果である。

Theorem 1　　$f \in \mathcal{F}(M)$ について，

(i) $\sup_{x \in \Lambda_j,\, n \in \mathbb{Z}_+} \| Tf^n | E^s_{jx} \| < \infty$

$\Longrightarrow$ spectral radius of $f_* | \Gamma^b(E^s_j) < 1$

(ii) $\sup_{x \in \Lambda_j,\, n \in \mathbb{Z}_+} \| Tf^{-n} | E^u_{jx} \| < \infty$

$\Longrightarrow$ spectral radius of $f_*^{-1} | \Gamma^b(E^u_j) < 1$

Theorem 2　　f : C^1－構造安定，$\Lambda_i(f) \cap \Lambda_j(f) = \phi$ $(i \neq j)$

λ_1 を (1.1) Prop. (i) の定数とする．

ある $\lambda \in \mathbb{C}$. s.t. $\lambda_1 < |\lambda| \leq 1$ が．

(i) $f_* | \Gamma^b(E^s_j)$ のスペクトルでない

$\Longrightarrow$ spec. rad. $f_* | \Gamma^b(E^s_j) < 1$

(ii) $f_*^{-1} | \Gamma^b(E^u_j)$ のスペクトルでない

$\Longrightarrow$ spec. rad $f_*^{-1} | \Gamma^b(E^u_j) < 1$.

これらの結果を．安定性予想との関係がはっきりするように言いかえると．次のようになる．

Corollary 1　　$f \in \mathcal{F}(M)$ について．

$\Lambda_j(f)$ が hyperbolic set

$\Longleftrightarrow \sup_{x \in \Lambda_j,\, n \in \mathbb{Z}_+} \{ \| Tf^n | E^s_{jx} \|, \| Tf^{-n} | E^u_{jx} \| \} < \infty$

Corollary 2

C^1-構造安定 かつ $\Lambda_i \cap \Lambda_j = \phi$ $(i \neq j)$ となる $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ について.

$\Lambda_j(f)$ が hyperbolic set

$\Longleftrightarrow$ $\exists \lambda_s, \exists \lambda_u \in \mathbb{C}$ s.t. $\lambda_1 < |\lambda_s| \leq 1 \leq |\lambda_u| < \lambda_1^{-1}$ が存在し. λ_s (λ_u) は $f_* | \Gamma^b(E_j^s)$ $\left(f_*^{-1} | \Gamma^b(E_j^u)\right)$ のスペクトルではない.

これらの結果の証明のポイントは. 与えられた条件によって. norm の変化を一様に規定でき. Closing Lemma の方法が. 割合. 容易に適用できるという点にある.

具体的には. 次の形で使われる.

Lemma 1

$f \in \mathrm{Diff}^1(M)$, p_* : f の回帰点, $\Lambda = cl\{\mathrm{Orb}_+(p_*)\}$

$TM|\Lambda = E^1 \oplus E^2$: Tf − invariant splitting

$\mathcal{U}$: f の nbd.

この時. $\forall \varepsilon > 0$ に対して.

$\exists k_1 < \exists k_2$ (正整数), $\exists g \in \mathcal{U}$

$\exists G : T_q M \longrightarrow T_p M$: isomorphism

ただし $p = f^{k_1}(p_*)$, $q = f^{k_2}(p_*)$

が存在し. 次をみたす.

(i) $d(p_*, p) < \varepsilon, \quad d(p_*, q) < \varepsilon$

(ii) $g^{k_2-k_1}(q) = q \quad , \quad g^k(q) \neq q \quad (0 < {}^\forall k < k_2 - k_1)$

(iii) $G(E^i_q) = E^i_p \quad (i = 1, 2)$ であり

$G \mid E^i_q : E^i_q \longrightarrow E^i_p$ は isometry

(iv) $T_p f^{k_2-k_1} \circ G = T_q g^{k_2-k_1}$

(v) gf^{-1} の support は $\bigcup_{k=k_1}^{k_2} f^k(p_*)$ の ε-nbd に含まれる.」

（証明は Sannami [4] 参照.）

§.2 定理の証明.

Theorem 1 の証明は Sannami [4] 参照.
ここでは Theorem 2 の証明の概略を述べる.

$\lambda_1 < |\overset{\exists}{\lambda}| \leq 1$ が $f_*^{-1} \mid \Gamma^b(E^u_j)$ のスペクトルでないなら. spec. rad $f_*^{-1} \mid \Gamma^b(E^u_j) < 1$ を示す.
E^s についても. 同様である.

さて, $\sigma(L) = L$ のスペクトル集合 とすると.

$\sigma(f_*^{-1} \mid \Gamma^c(E^u_j)) \subset \sigma(f_*^{-1} \mid \Gamma^b(E^u_j))$

であるから. $\lambda \notin \sigma(f_*^{-1} \mid \Gamma^c(E^u_j))$ である.

J. Mather [3] の証明中の結果から.

$S_\lambda = \{ \mu \in \mathbb{C} \mid |\mu| = |\lambda| \}$ とすると.

$S_x \cap \varnothing(t_*^{-1} | \Gamma^c(E_j^u)) = \phi$ である事がわかる.
これは. $t_*^{-1} : \Gamma^c(E_j^u)$ 2 が. λ-pseudo-hyperbolic であるという事である. 従って. t_*^{-1}-invariant splitting

$$\Gamma^c(E_j^u) = \Gamma_1 \oplus \Gamma_2$$ が存在し.

<u>(2.1)</u> $$\text{spec. rad } t_*^{-1} | \Gamma_1 < |\lambda|$$
$$\text{spec rad } t_* | \Gamma_2 < |\lambda|^{-1}$$

さらに.

E_j^u の Tf-invariant subbundle E_1, E_2 があり.

$$E_j^u = E_1 \oplus E_2 , \qquad \Gamma_i = \Gamma^c(E_i) \quad (i = 1, 2)$$

となる事がわかる.

さて. spec. rad $t_*^{-1} | \Gamma^c(E_j^u) \geq 1$ と仮定すると. (2.1) より. E_2 は. 0-vector bdl ではない.
そこで. (1.2) を示したのと同様の議論を $Tf | E_2$ に適用すると. ある回帰点 p_* と, $E_2 \ni {}^{\exists} v$, $\|v\| = 1$ で.

$\|Tf^n v\| \leq 1 \quad {}^{\forall} n \in \mathbb{Z}_+$ となるものがある.

spec. rad $t_* | \Gamma_2 < |\lambda|^{-1} < \lambda_1^{-1}$ であるから.

${}^{\exists} n_0 \in \mathbb{Z}_+$ が存在し.

$$n > n_0 \implies \| t_*^n | \Gamma_2 \|^{1/n} < |\lambda|^{-1}$$

この事から. $n > n_0$ なら. ${}^{\forall} x \in \Lambda_j$ について.

$\| Tf^n | E_{2x} \| < |\lambda|^{-n}$ となる事がわかる.

上に述べたように. その上では. E_2 が 0 にならないよう

な．回帰点 p_* の存在が保障されているから．これに Lemma 1 を適用して．f の perturbation g を作るのであるが．ここで Lemma 1 における k_2-k_1 を十分大きくとると．作り出した周期点 q について． (1.1) Prop. (i) にあるように．

$$\| Tg^{-\pi(g,q)} \mid E^u_q(g) \| \leq c_1 \lambda_1^{\pi(g,q)}$$

となるためには．stable dimension が必ず増大していなければならない事がわかる． ところが．perturbation の support は十分小さくでき． $\Lambda_i \cap \Lambda_j = \phi$ $(i \neq j)$ であるから． $g = f$ on Λ_i $(i \neq j)$ である．
f は構造安定であるから． $g(\Lambda_i) = \Lambda_i$ $(i \neq j)$ とならなければならない． 故に．上で作った周期点 q の stable dimension は．もとの j でなければならない．
これは矛盾である． 従って．

$$\text{spec. rad } f_*^{-1} \mid \Gamma^c(E_j^u) < 1 \quad \text{となる．}$$

この事から．

$$\text{spec. rad } f_*^{-1} \mid \Gamma^b(E_j^u) < 1 \quad \text{がわかる．}$$

Q.E.D.

[REFERENCES]

[0] C. Pugh , R.C. Robinson
C^1 Closing Lemma, including Hamiltonians.
(Preprint)

[1] R. Mañé Expansive diffeomorphisms.
LNM 468 (1974) 162 – 174

[2] R. Mañé Contributions to the Stability Conjecture.
Topology (1979)

[3] J. Mather Characterization of Anosov diffeo.
Indag. Math. 30 (1968) 479 – 483

[4]. A. Sannami On the Stability Conjecture.
Master thesis. (1979) Hokkaido Univ.

[5]. J. Palis , S. Smale. Structural Stability theorem.
Global Analysis 223 – 232

[6]. S. Smale
Global stability questions in dynamical systems.
symposium on Global Analysis, Washington, D.C.