

回路モデルにみられる strange attractor の例

徳島大工電子 川上 博

1. まえがき

この報告では3次の多項式で表わされる非線形特性を持つ2階差分方程式:

$$x(t+1) = y(t) \quad (1)$$

$$y(t+1) = ay(t) - (b - cx^2(t))x(t)$$

ここに $x, y \in \mathbb{R}$, a, b, c は実数パラメータ, t は離散時刻をあらわす正の整数とする,

にみられる chaos の計算機実験の結果を述べる。(1)は2次のデジタル・フィルタに関連した方程式を更に単純化したモデルである。

(1)で定まる離散力学系:

$$\begin{aligned} T: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (y, ay - (b - cx^2)x) \end{aligned} \quad (2)$$

は逆写像を持たないのでこのとに関連した複雑な attractor の存在が予想できる。今回はこれらの attractor の概様を観察した。個々の現象に関する詳細は今後の問題である。観察され

た chaos には T の不動点に関して Marotto や 白岩・倉田 の存在定理を数値的に適用してその存在の示される例もあるがそれ以外のもも観察された。

なお2次の多項式で表わされる2階差分方程式の実例については[1]参照。

2. デジタルフィルタのモデル

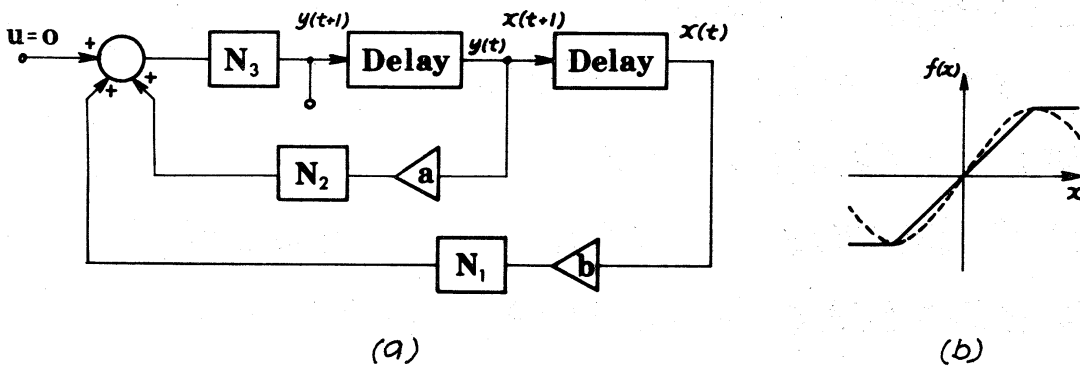


図1. デジタルフィルタの回路図と非線形特性.

図1(a)は2次(Delay素子2個)のデジタルフィルタの原理図である。Delay素子は入力信号を一定時間(ここでは1とした)後出力する。 $\triangleleft a \rightarrow$ は入力信号を a 倍する。 N_1, N_2 および N_3 は非線形素子で大入力信号に対してoverflowの特性(図1(b)実線)を持つ。この特性を $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ と書くことにすれば系の方程式は

$$\begin{aligned} x(t+1) &= y(t) \\ y(t+1) &= f_3(f_1(bx) + f_2(ay)) \end{aligned} \quad (3)$$

となる。今特別の場合として N_1 のみがoverflow特性を持つ系(N_2, N_3 なし)を考え f_1 を図1(b)の実線のような3次の多項式と置きかえると(1)を得る。

van der Pol は 発振回路モデルである2階 autonomous 微分方程式で図1(b)の飽和特性を卓線のような3次曲線で置きかえて van der Pol 方程式を導いた。彼の場合この近似により解の定性的性質は変わらなかったが上に述べた差分系では解の定性的性質が変わってしまう。しかし卓線の Hopf 分岐に関しては(1)は差分系の van der Pol 方程式とも考えられる安定な不変閉曲線を持つ。

3. (1)式の不動点とその安定性

双曲型不動点を次の8種類に分けておく:

向きを保つ不動点; $\lambda_1 \lambda_2 > 0$

- | | | | |
|--------------|------------------------------------|---|--------|
| (1) 完全安定不動点 | $ \lambda_1 < 1, \lambda_2 < 1$ | S | と略記する, |
| (2) 完全不安定不動点 | $ \lambda_1 > 1, \lambda_2 > 1$ | U | " |
| (3) 正不安定不動点 | $0 < \lambda_1 < 1 < \lambda_2$ | D | " |
| (4) 逆不安定不動点 | $\lambda_1 < -1 < \lambda_2 < 0$ | I | " |

向きを反転する不動点; $\lambda_1 \lambda_2 < 0$

- | | | | |
|--------------|-------------------------------------|----|---|
| (5) 完全安定不動点 | $ \lambda_1 < 1, \lambda_2 < 1$ | SR | " |
| (6) 完全不安定不動点 | $\lambda_1 < -1, \lambda_2 > 1$ | UR | " |
| (7) 正不安定不動点 | $-1 < \lambda_1 < 0, 1 < \lambda_2$ | DR | " |
| (8) 逆不安定不動点 | $\lambda_1 < -1, 0 < \lambda_2 < 1$ | IR | " |

ここに λ_1, λ_2 は不動点の固有値を表わす。(1)式の不動点は $(0, 0)$, $(\pm \sqrt{(1-a+b)/c}, \pm \sqrt{(1-a+b)/c})$ である。ただし後者2点は $(1-a+b)/c > 0$ の場合に存在する。各々の不動点に関して差分方程式よりそのタイプ

を調べるとパラメタ a, b, c の値によりそれぞれ 図2(a), (b) を得る。

2 周期点に関して同様にその位置は (x_0, y_0) ,

$$x_0 = \frac{1}{2} \left[\pm \sqrt{\frac{1+b+2a}{c}} \pm \sqrt{\frac{1+b-2a}{c}} \right],$$

$$y_0 = \frac{1}{2} \left[\pm \sqrt{\frac{1+b+2a}{c}} \mp \sqrt{\frac{1+b-2a}{c}} \right]$$

の 4 点が計算され、それらの安定性を求めることができる。

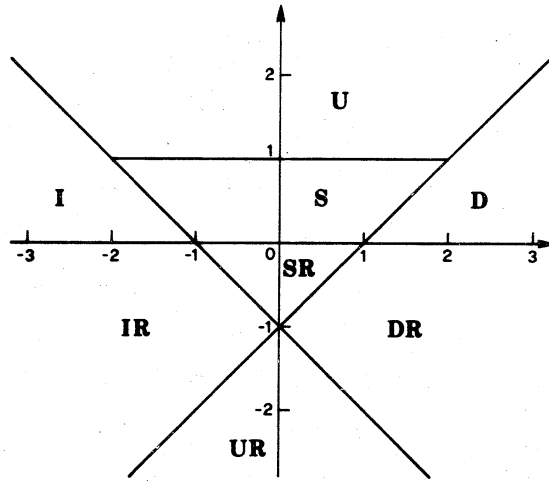


図2(a) 原点の安定性。

4. Hopf分岐

不動点のタイポが S から U に変化するパラメタの値で Hopf 分岐が生じる。(i) 式については図 2 からわかるように

(i) 原点に関しては $c > 0, |a| < 2,$

$b=1$ の線分上で,

(ii) $(\pm\sqrt{(1-a+b)/c}, \pm\sqrt{(1-a+b)/c})$ に関

しては $c < 0, |a| < 2, 3a-2b-4=0$

の線分上で Hopf 分岐がみられる。

この分岐により生じた不変閉曲線の近似解は $x(t) = A \cos \omega t$ (i) の場合, $x(t) = A \cos \omega t + B$ (ii) の場合,

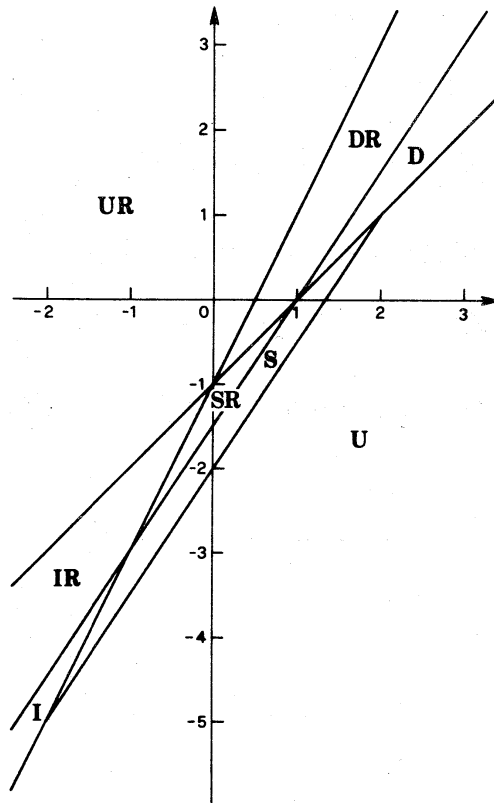


図2(b) $(\pm\sqrt{(1-a+b)/c}, \pm\sqrt{(1-a+b)/c})$ の安定性。

と仮定し (1) 式に代入し $\cos \omega t, \sin \omega t$, 定数項の係数より A, ω, B を求めるとよい。結果は $\omega = \cos^{-1}(a/2)$,

$$x(t) = \sqrt{\frac{4(b-1)}{3c}} \cos \omega t \quad (i) \text{ の場合,}$$

$$x(t) = 2\sqrt{\frac{4+2b-3a}{15c}} \cos \omega t \pm \sqrt{\frac{a+b-3}{5c}} \quad (ii) \text{ の場合}$$

となる。一例として $a=0.4, b=1.2, c=0.4$ の場合の計算結果を図3に示した。太い実線が(1)式の不変閉曲線と細線が上の近似解から求めた2次曲線を示している。

また共振条件は $e^{im\omega} = 1$, すなわち $\cos m\omega = 1, m=2,3,\dots$ を満たす ω の値で生じる。この条件を満足する a の値では一般に m 周期軌が不動軌に分岐する。各 m に対する a の値は次表となる。

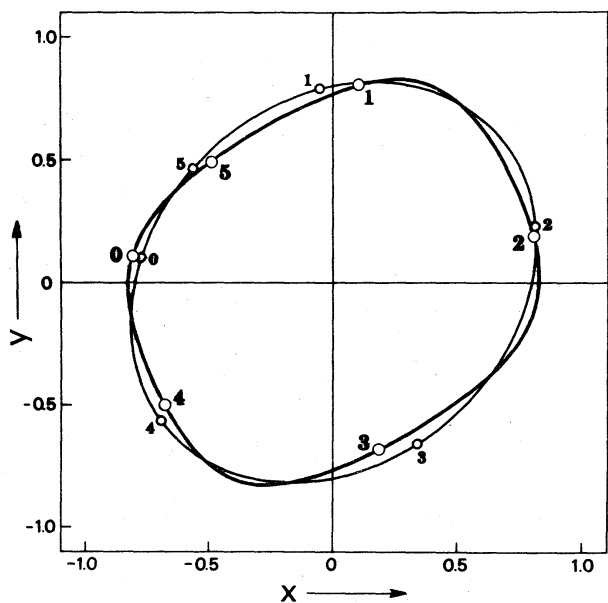


図3. 不変閉曲線, 番号は a による軌の動きを表す。

m	a	m	a
1	2	6	1
2	-2	7	$a^3 + a^2 - 2a - 1 = 0$ の根
3	-1	8	$\pm\sqrt{2}$
4	0	9	$a^3 - 3a + 1 = 0$ の根
5	$(-1 \pm \sqrt{5})/2$	10	$(1 \pm \sqrt{5})/2$

5. 実験結果

(1)式の attractor の概略を調べるため 今回の実験では attractor の characteristic exponent を計算し、これをもとにパラメタ領域を3つの領域に大別した。なお(1)式に含まれるパラメタ C は一般性を失うことなく $C=1$ または $C=-1$ に正規化できる。今回の計算ではこれを $C=0.6$ および $C=-0.6$ に固定して計算した。


Characteristic exponent は Feit [2] の計算に従った。すなわち attractor 内の1点を P とし正方向の orbit を $T(P), T^2(P), \dots$ としたとき、 $\|v\|=1$ なる $v \in \mathbb{R}^2$ を選んで




$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|DT^n(P)v\|$$

を計算した。 C の値によって attractor は (i) $C < 0$ ならば安定な不動点あるいは周期点, (ii) $C = 0$ ならば安定な不変閉曲線, (iii) $C > 0$ ならば strange attractor と考えられる。具体的な計算は不動点の近傍に初期値を選んで正方向の orbit を10,000点計算し最初の5,000点を除いた残りの5,000点を用いて C を求めた。計算は単精度で行なったので小数点以下3桁位までの値で正負の判定を行なった。

(1)式でパラメタ $C=0.6$ とした場合の計算結果の概略図が図4である。 a 軸方向には0.01, b 軸方向には0.025まがみの格子点で exponent を計算した。 $a < 0$ の場合は(1)式の対称性より図4を b 軸で折り返し、共振条件を適当に変更すればよいので $a > 0$ の場合のみ描いてある。

図4の各領域の概様は次の通り:

- (i)  領域; この領域では $C=0$ となる。したがって phase portrait は1つまたは複数個の不変閉曲線となる。

- (ii)  領域; この領域では $c < 0$ となる。したがって安定な周期軌が存在する。この領域は共振条件を満足する各パラメータ値付近で(i)の領域に入り込んでいる。図中の数字は存在する周期軌の周期を表わす。
- (iii)  領域; この領域では有界な attractor が存在せし orbit は終局的には ∞ に発散する。
- (iv)  領域; 上述(ii)および(iii)の領域にはさまれたこの領域では $c > 0$ 。すなわち chaotic な attractor がみられる。

なお図4はあくまで概略図であり、各領域の境界付近の様子是非常に複雑であり、どうい曲線で結ぶことは不可能である。一部のパラメータ領域を拡大して更に細かく exponent の計算を行なったが状況はあまり変わらず詳細を描けそうになかったのでここでは概略図を示すにとどめた。また各領域、特に chaos の領域内には安定周期軌の存在するパラメータ値が島状にあまは細い帯状に存在しているがこれも図では省略した。

以上は(i)式でパラメータ $c = 0.6$ の場合であるが $c = -0.6$ の場合は $b = \frac{2}{3}a - 2$ の直線より右の領域で a の帯約 0.5 程度の帯状領域で図4と同様な領域図が得られるが状況は同じなので省略した。

次に図5で観察された phase portrait の代表的な例を示した。ある場合には Marotto や 白岩・倉田の存在定理より chaos の存在が証明できるがここでは省略する。図5にあげた phase portrait のあるものは chaos の分岐の様子をうかがえるものもあるがここでは観察された attractor を単に羅列したにすぎない。パラメータ $c = -0.6$ の場合の線 Γ には 泉点(DR型)より出る α 枝(不安定曲線)の様子も合せて示した。この場合白岩・倉田型 chaos が存在する例を予え

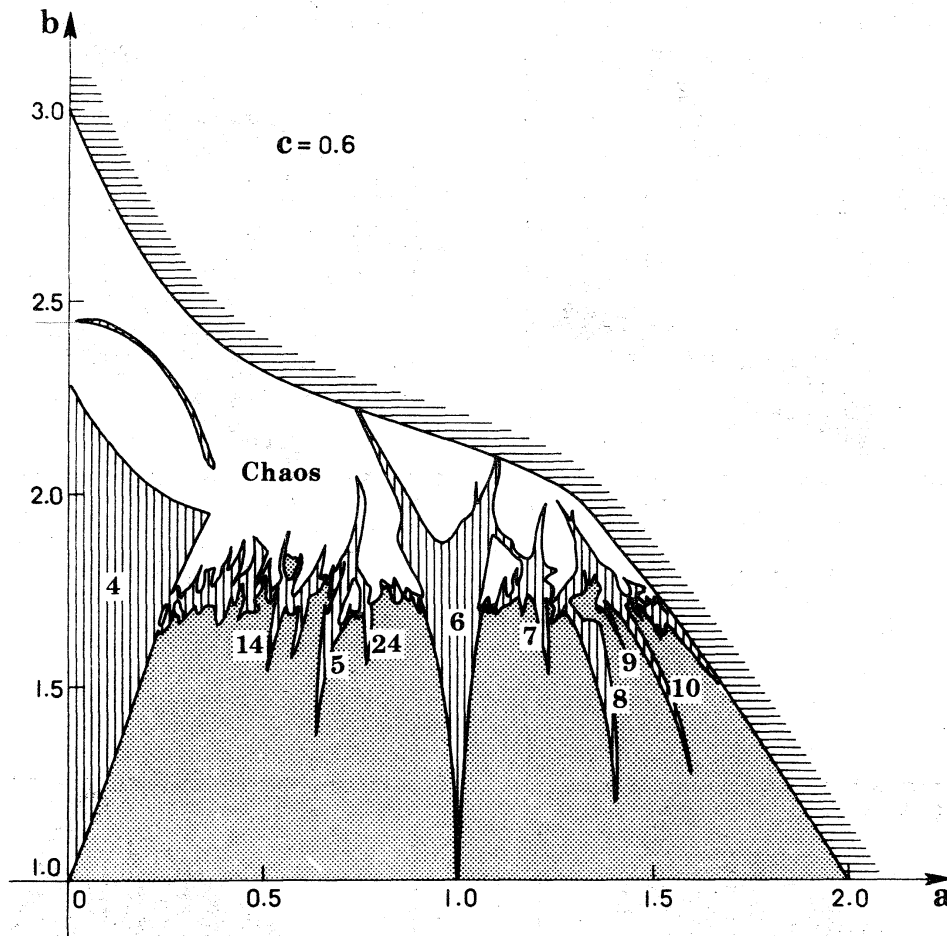
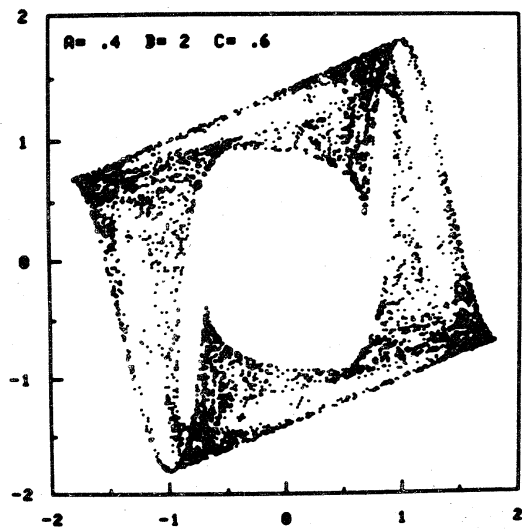


図4. 各種 attractor の存在するパラメータ領域の概略図.

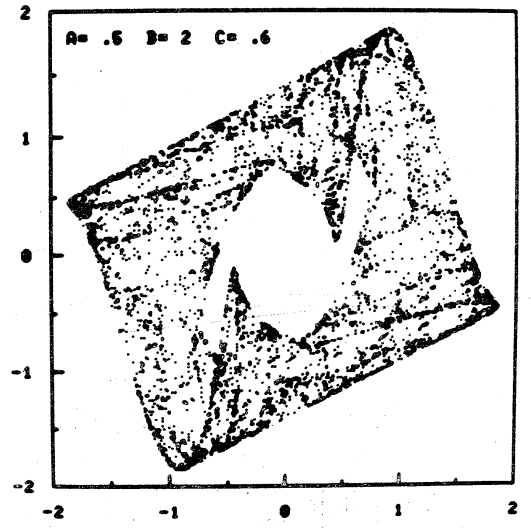
るものもあるが、 α 枝の self-intersection のため chaos の分けられる例もある。
不動点の α 枝や系の singular set と chaos との関係は興味があるが今回の
実験からは何らかの予想を得るまでには至らなかった。

文献

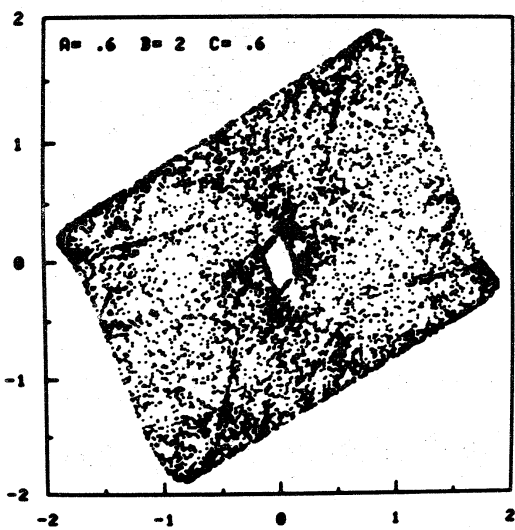
- [1] Kawakami, H. and Kobayashi, K: Computer experiments on chaotic solutions of $x(t+2) - ax(t+1) - x^2(t) = b$, 徳島大学工学部研究報告 vol. 16 (to appear).
- [2] Feit, S.D.: Characteristic exponents and strange attractors, *Commun. Math. Phys.* 61 (1978) 249-260.
- [3] 白岩謙一, 倉田雅弘: Marotto の定理の一一般化, 本研究会集論文集



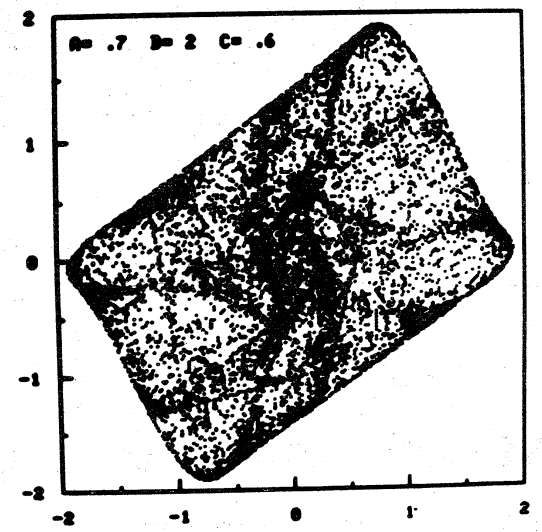
0.1314



0.1388

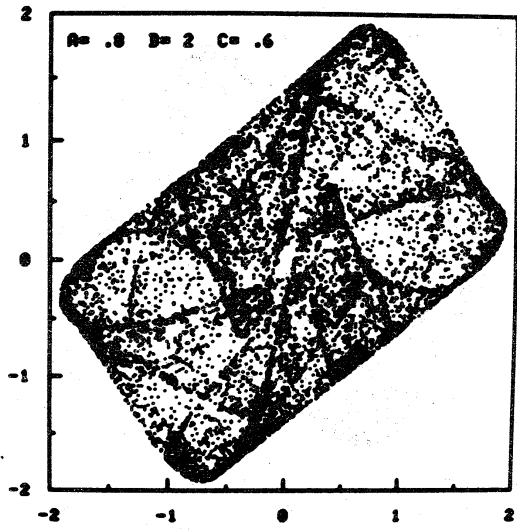


0.1696

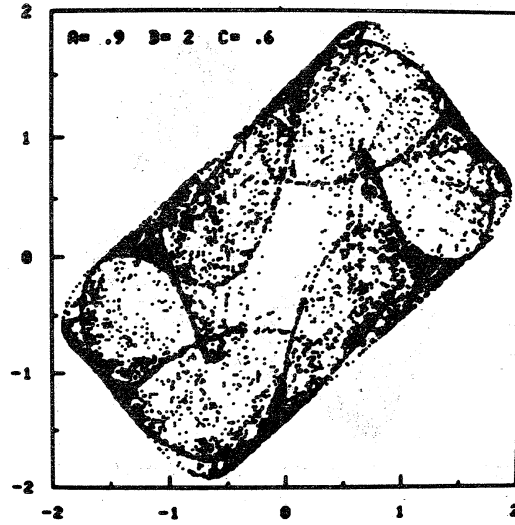


0.1830

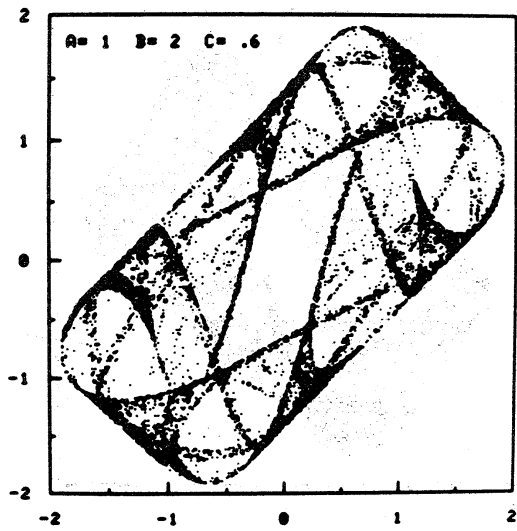
図5. 各種 phase portrait の例: 横軸 $x(t)$, 縦軸 $y(t)$ 以下すべて同じ。図の下に示した数値は characteristic exponent である。



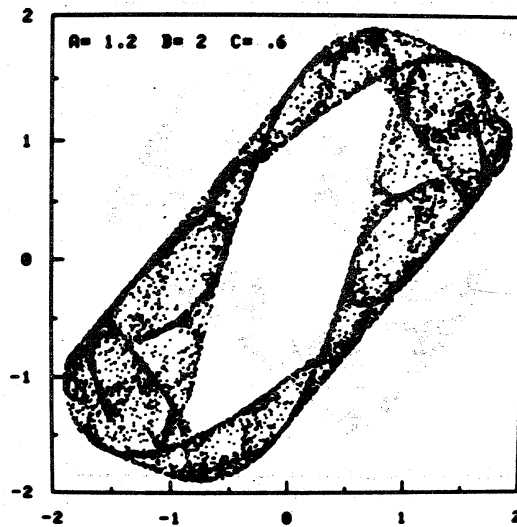
0.1835



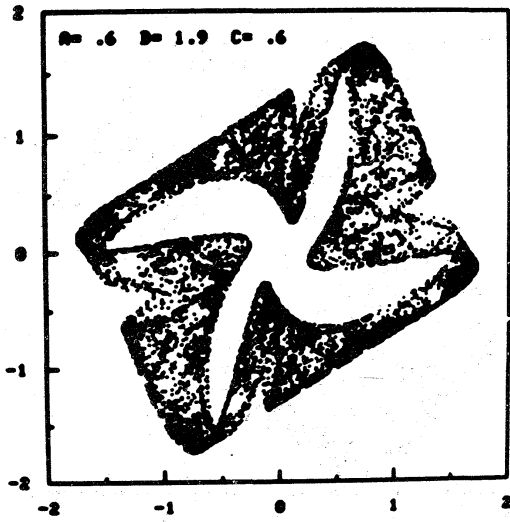
0.1642



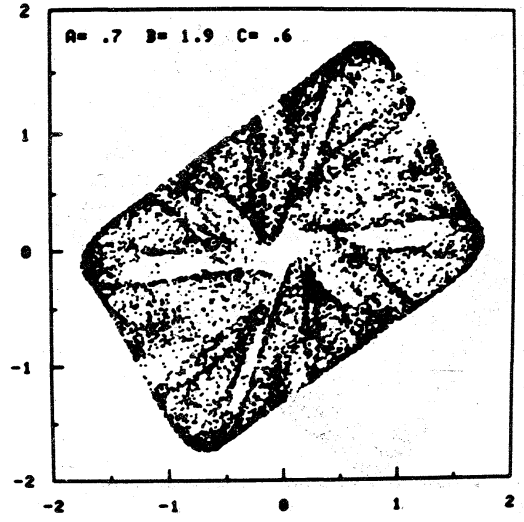
0.1696



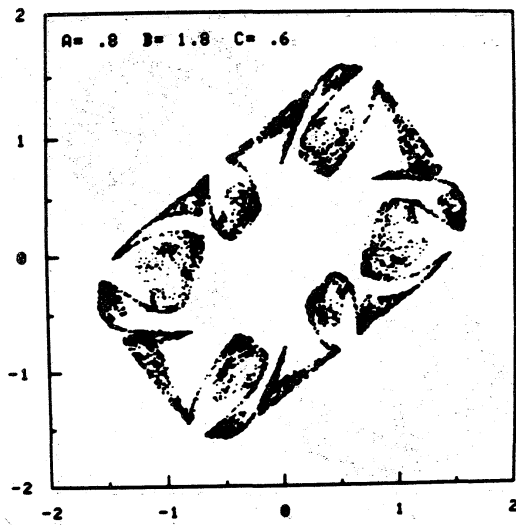
0.1775



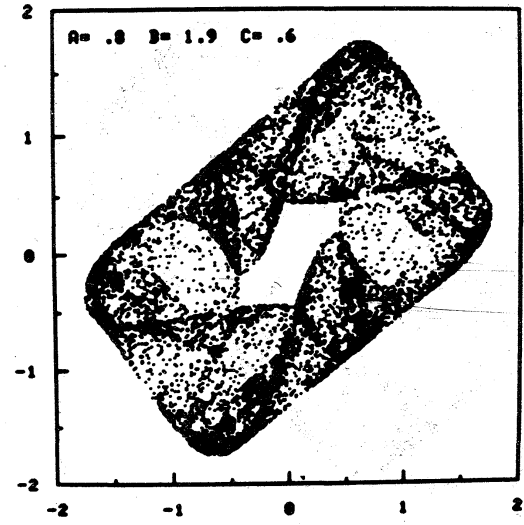
0.1005



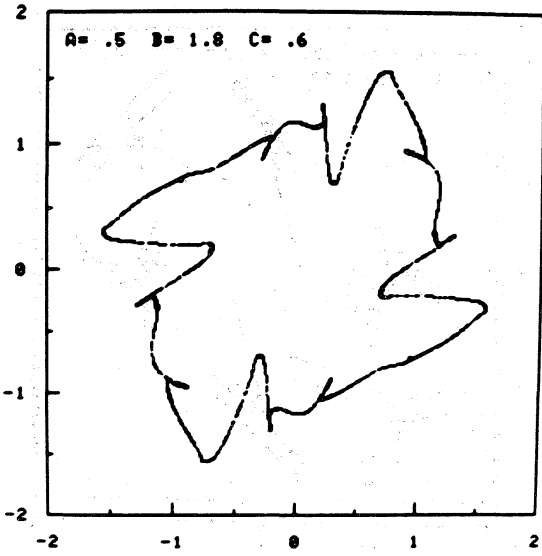
0.1118



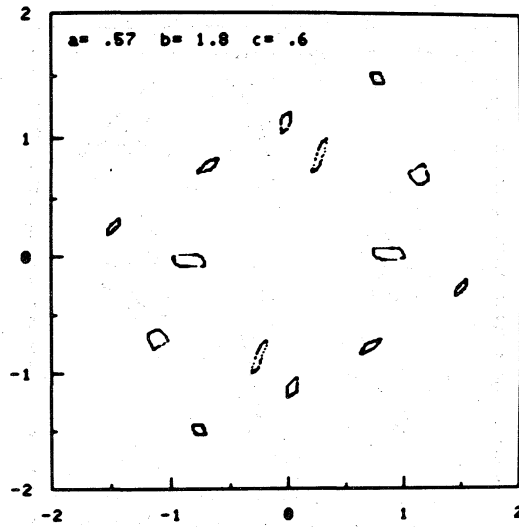
0.0353



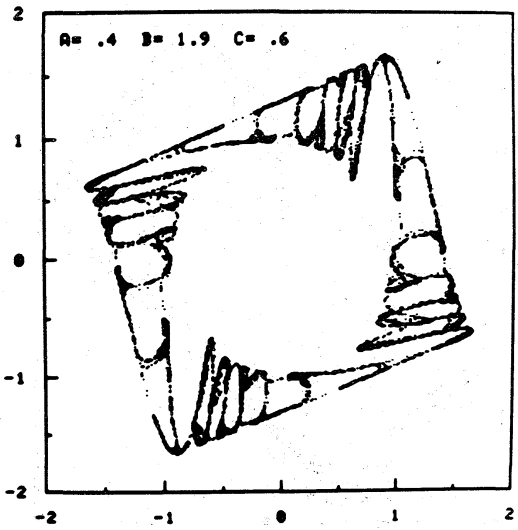
0.1325



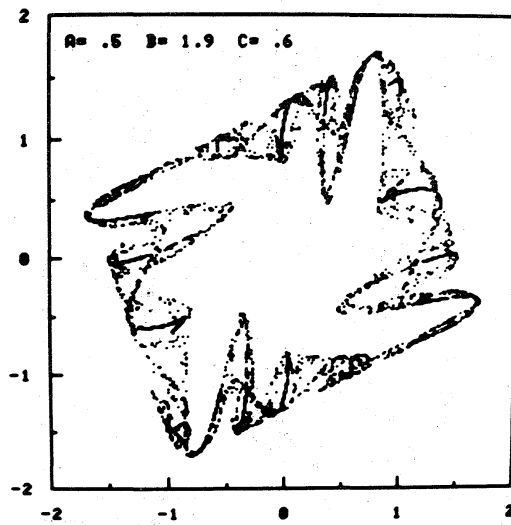
0.0405



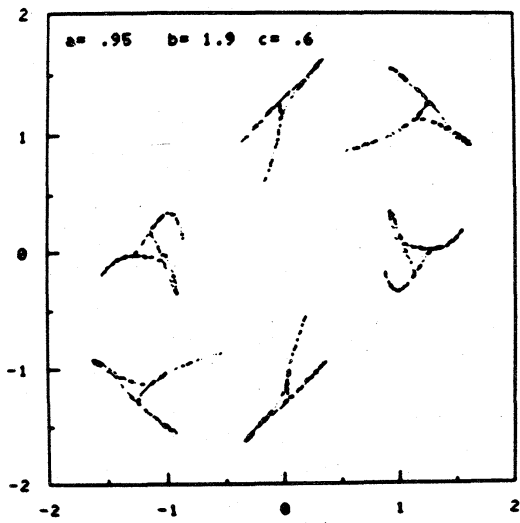
0.0001



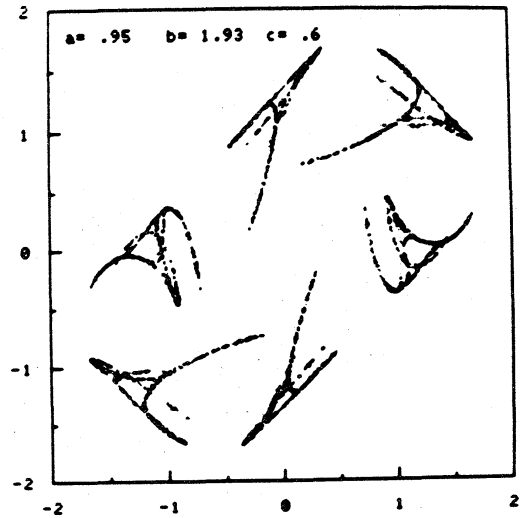
0.0698



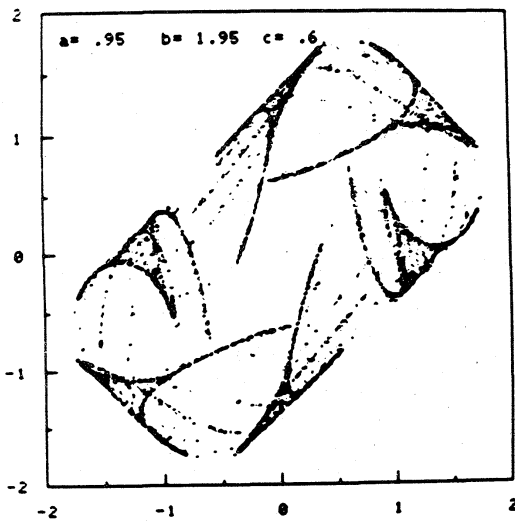
0.0583



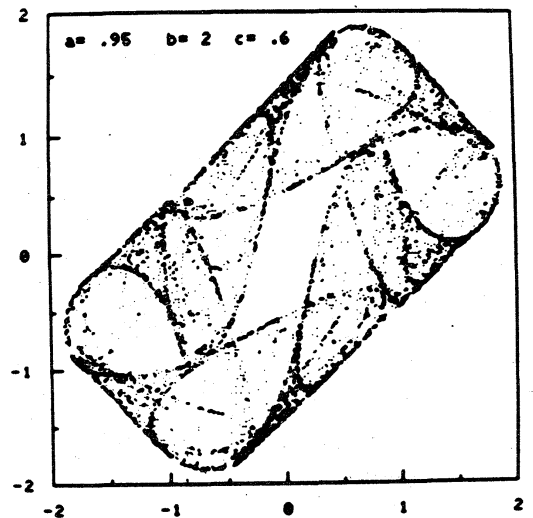
0.0533



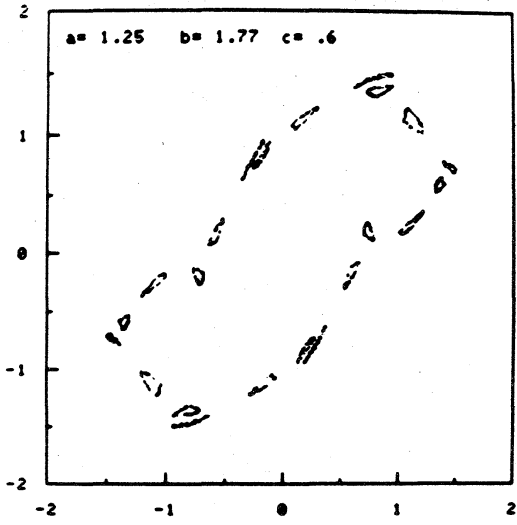
0.1047



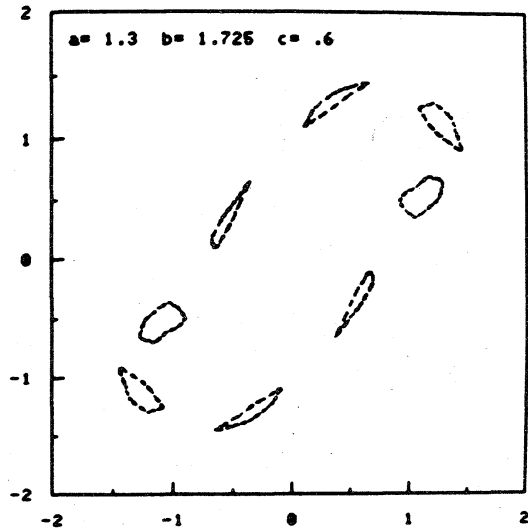
0.1362



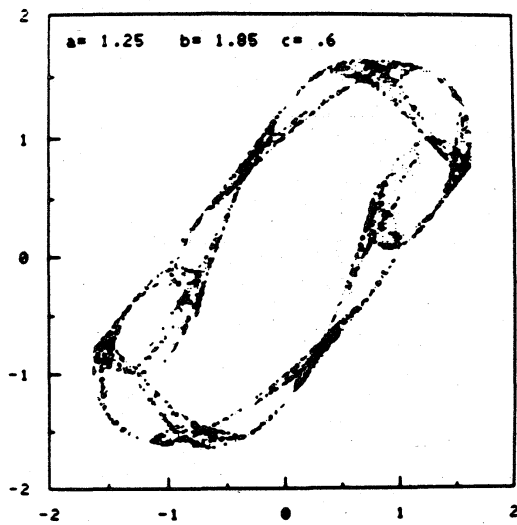
0.1695



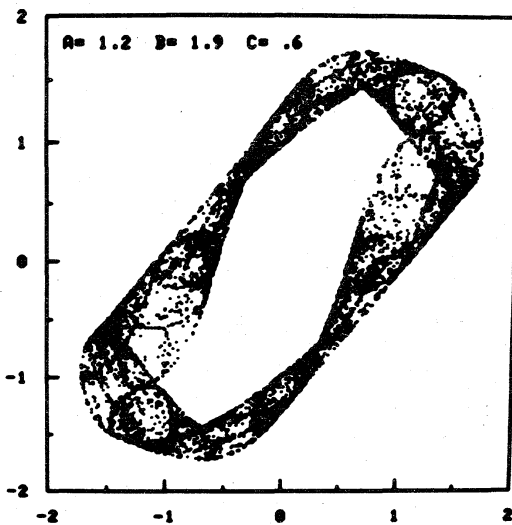
0.0001



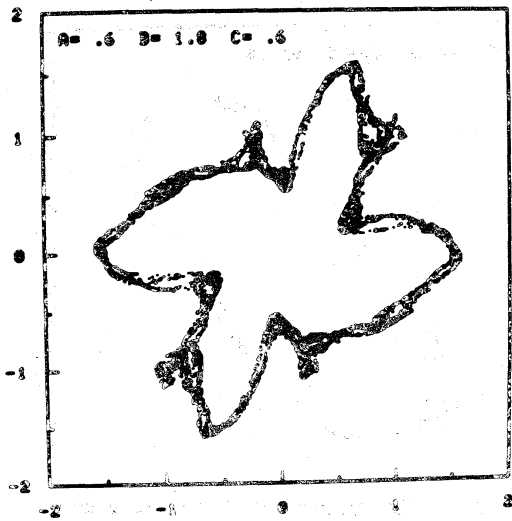
0.0001



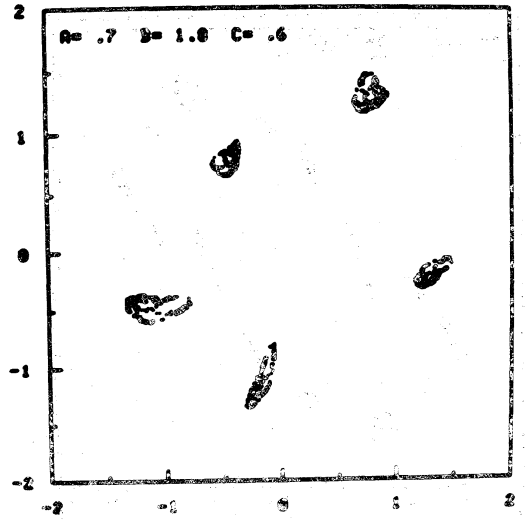
0.1078



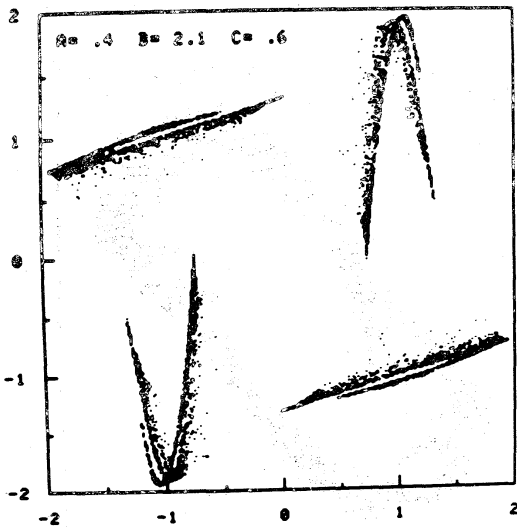
0.1038



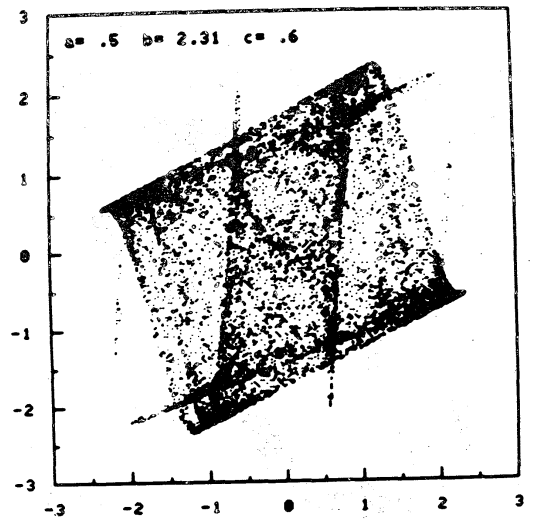
0.0532



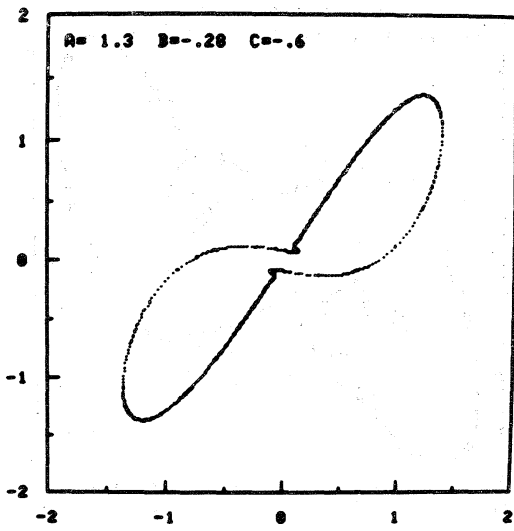
-0.0072



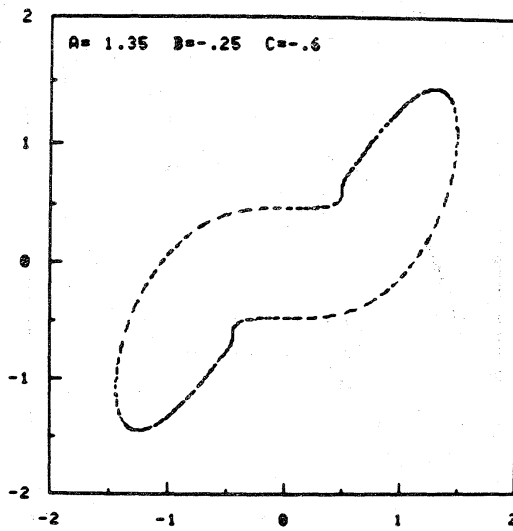
0.2347



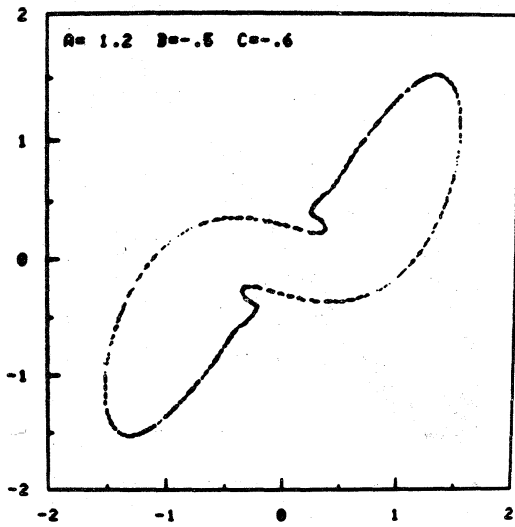
0.3186



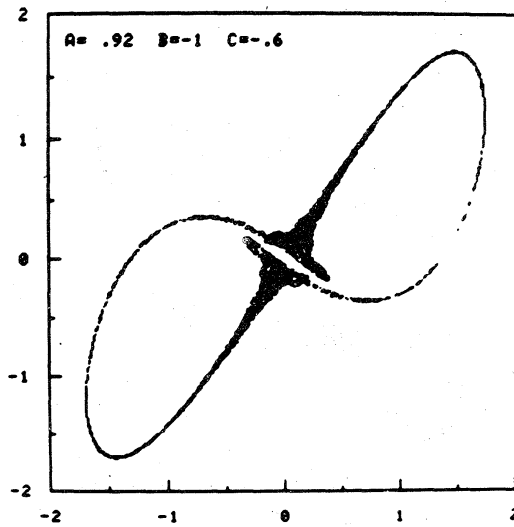
0.0001



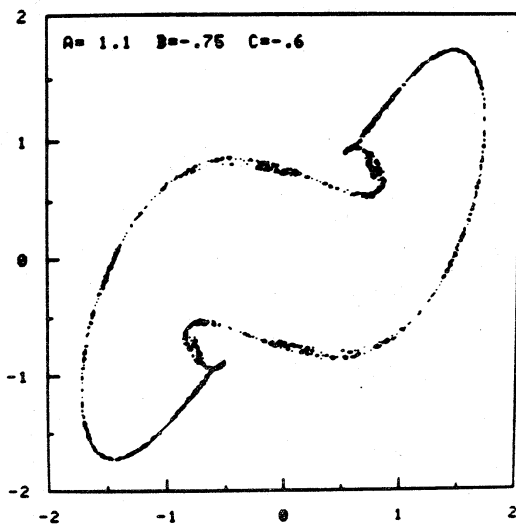
0.0001



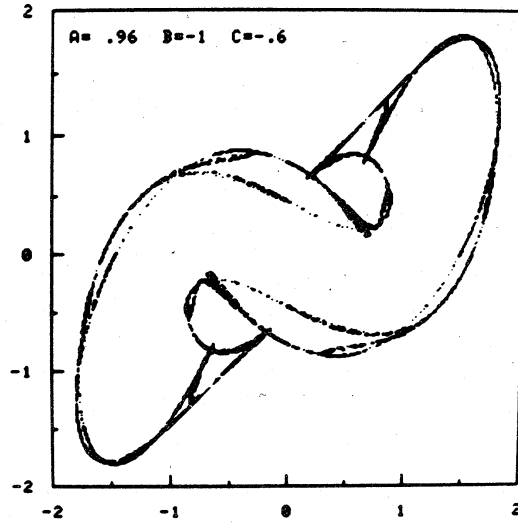
0.0001



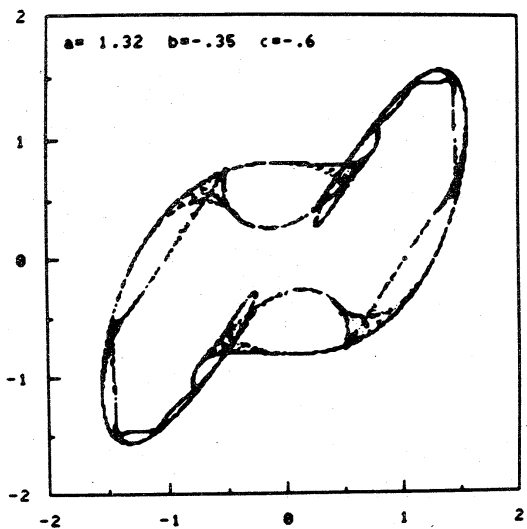
0.1079



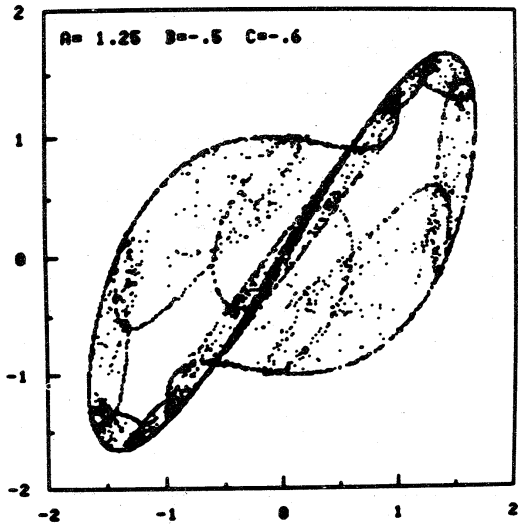
0.0132



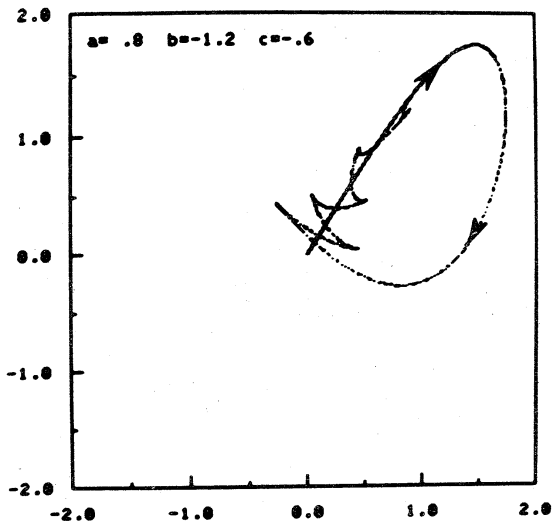
0.1059



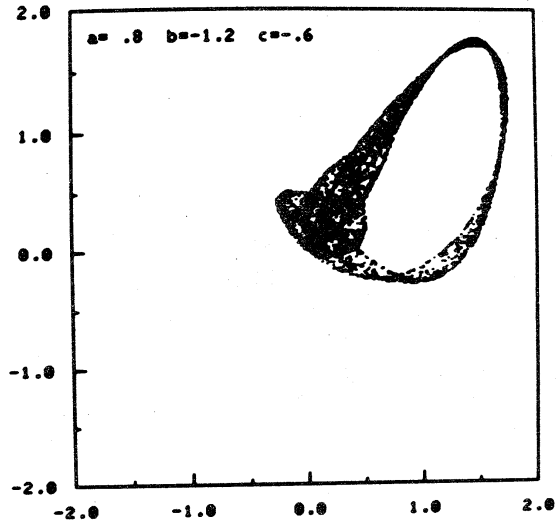
0.1235



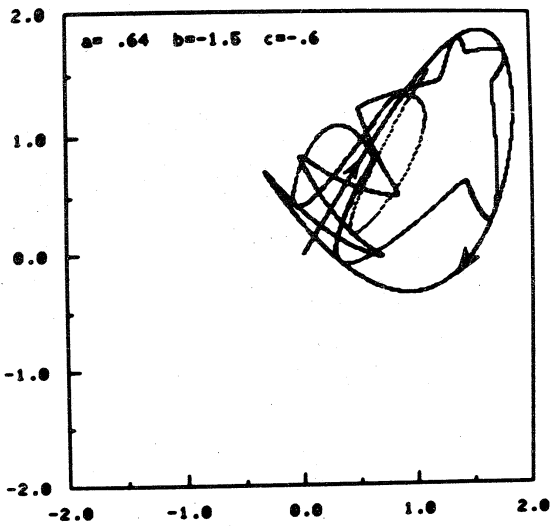
0.2059



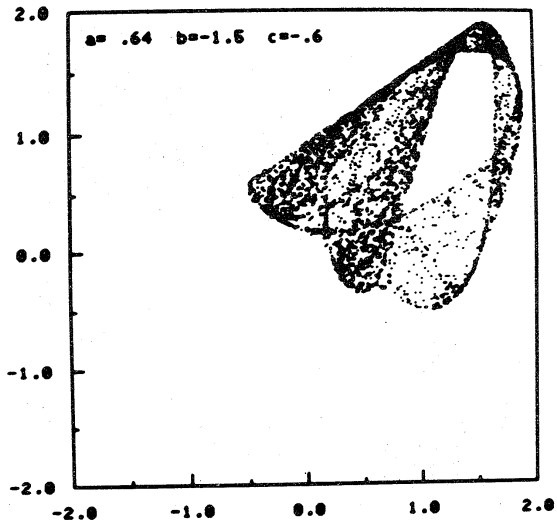
原点より出る軌道の概観



0.1234

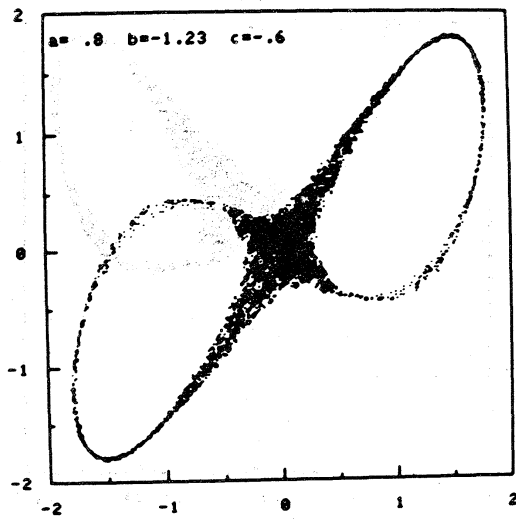


原点より出る軌道の概観

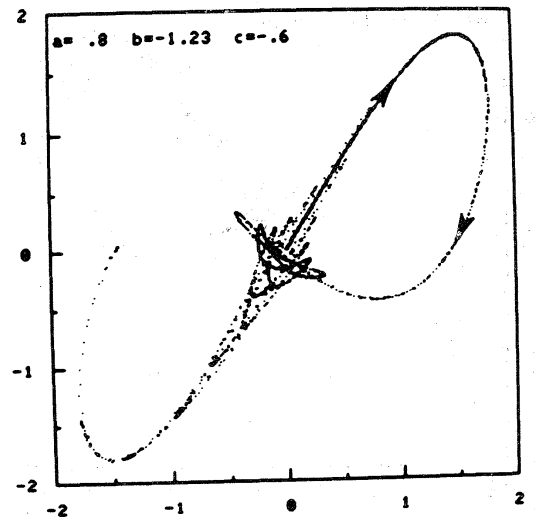


0.1994

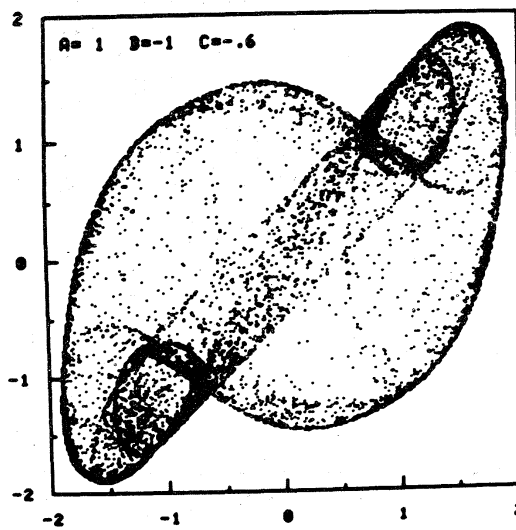
注. 上2つの phase portrait は原点対称で同じ構造の chaos が存在する。



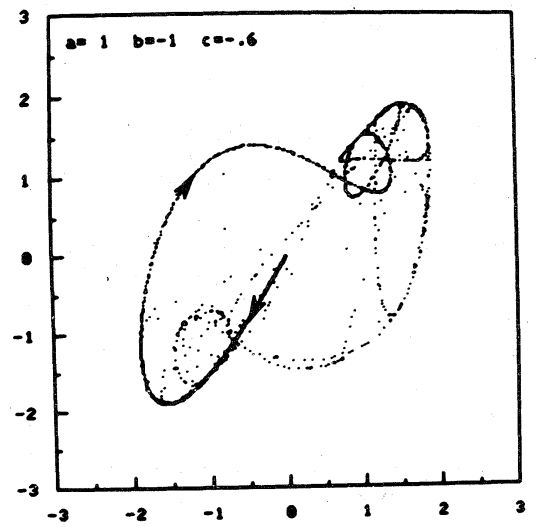
0.1917



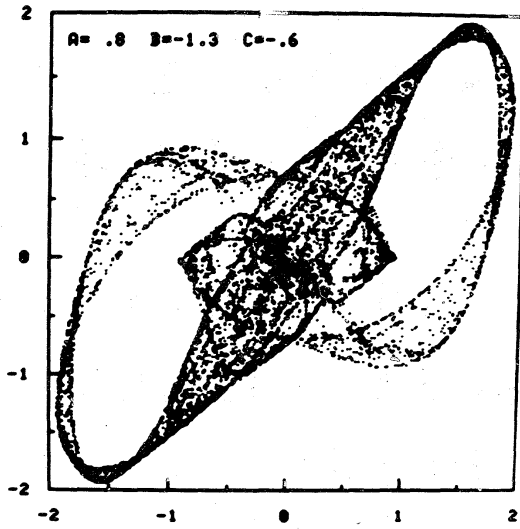
算出される軌道の概観



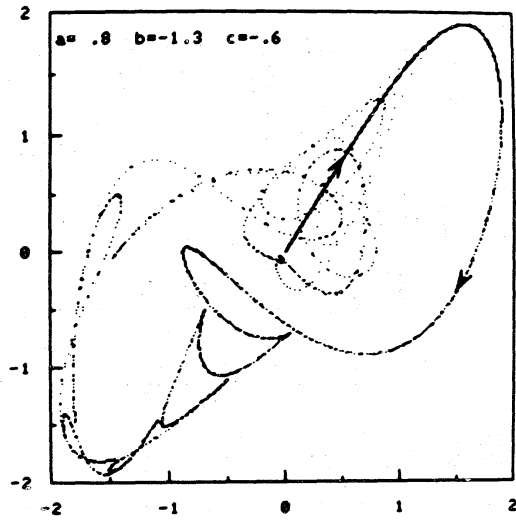
0.2366



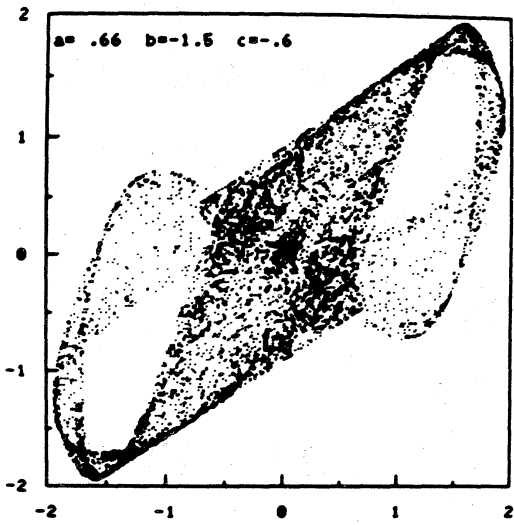
算出される軌道の概観



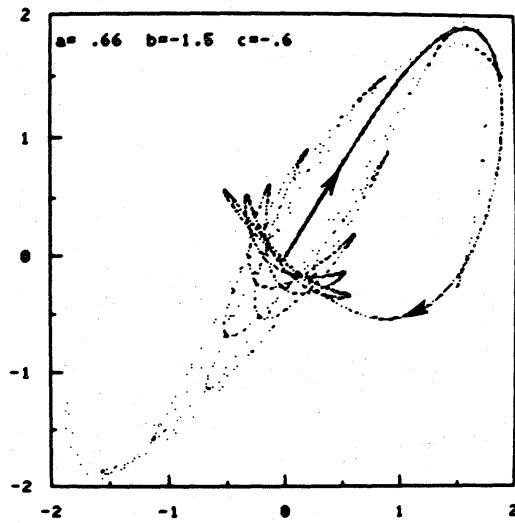
0.1968



原点より出る軌道の概形



0.2218



原点より出る軌道の概形