数理解析研究所講究録
第 370 巻 1979 年 174-183

[0,1]および、その部分空間上の力学系について.

東海大 理学部　郡山 彬
松岡 洋司

1° Expansive homeomorphism の種々の例が. Bryant [1], Hemmingsen-Reddy [3], Jakobsen-Utz [4], O'Brien [5], O'Brien-Reddy [6], Reddy [7], Utz [9], Williams [10] 等によって得られている. これらの例の多くが. fixed point を持っていることに注意しておく. さて. M. Sears [8] は Cantor set 上の. expansive homeo. の全体が. Homeo. 全体の空間内で. compact-open topology の下. dense であるが. open でない事を証明した. この小論に於る我々の目的は、Sears と同様の結果が. より単純な空間に対しても成り立つことを示すことにある. この単純な例から. 次の結果が得られることに注意しておく.

<u>定理</u>　M を、向き付けられた PL n-多様体とし、$f: M \to M$ を. 向きを保つ、expansive PL homeo. かつ、$m_0 \in M$ を isolated fixed point に持っているとする. この時、任意の整数 $k>0$ に対して、次の性質を持つような homeo. $g_k: M \to M$ と近傍 U, $m_0 \in U \subset M$ が

存在する。　dをM上の距離とすると、

$d(g_k(x), f(x)) < \frac{1}{k}$　$(\forall x \in M)$ かつ $g_k|_U = id.$

明らかに、g_kはexpansiveではない。

2°. 空間J上のexpansive homeomorphisms.

<u>2.1. 定義</u>　$X=(X,d)$を、距離dを持つ距離空間とする。homeo. $f: X \to X$ が次の条件を満すとき、expansive homeo.と呼ばれる。　$^{\exists}$positive const. $C = C(X, f)$ s.t. $\forall x, y \in X, x \neq y$ に対して、$^{\exists} n \in \mathbb{Z}$: $d(f^n(x), f^n(y)) > C$

<u>2.2. 記号</u>　$f: X \to X$ を homeo. とする。$x \in X$ に対して、$O_f(x) = \{f^n(x); n \in \mathbb{Z}\}$ とし、$O_f(x)$ の cardinal 数を $\#O_f(x)$ とする。また $\mathcal{O}_f = \{O_f(x); x \in X\}$ とし、$\#\mathcal{O}_f$ も上と同様に定義する。

$J = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}; n = 1, 2, \cdots\}$, $\forall x, y \in J$ に対し $d(x,y) = |x-y|$ とおく。J上のhomeo.全体の集合を$\mathcal{H}$とし、$\mathcal{H}$の位相は、compact-open topologyとする。$\mathcal{H}$内のexpansive homeo.全体を$\mathcal{E}$とする。

<u>2.3. 補題</u>　map $f: J \to J$ が homeo. となる必要十分条件は、f が 1対1, onto map で、かつ、$f(0)=0$ なることである。

<u>2.4. 補題</u>　$f \in \mathcal{H}$ かつ $\#\mathcal{O}(f) < +\infty \Rightarrow f \in \mathcal{E}$

(証明)　$\#\mathcal{O}(f) = n+1 < +\infty$ と仮定する。

n 個の点 $x_1, \cdots, x_n \in J$ が存在し. $0<x_1<\cdots<x_n$ かつ.

$\mathbb{O}(f)=\{0, O_f(x_1), \cdots, O_f(x_n)\}$ となる。 点 x_0 を、$0<x_0<x_1$ を満す、x_1 に最も近い点とする.

$U=\{x\in J ; x \geqq x_0\}$ とおくと、明らかに、$\# U<+\infty$ である.

$C'=\min\{d(x,y) ; x,y\in U, x\neq y\}$ とおくと、$C'=x_1-x_0>0$.

そこで、任意定数 C を $0<C<C'$ となるようにとる.

さて、任意 $x\in J$ に対して、$x\in O_f(x_k)$ となる x_k が、

$\{x_1, \cdots, x_n\}$ 内に存在する。従って、適当な $m\in\mathbb{Z}$ に対して.

$f^m(x)=x_k$ となる。故に、異なる任意の2点 $x, y\in J$ に対し、

$$d(f^m(x), f^m(y))=d(x_k, f^m(y))\geqq C'>C>0$$

従って f は expansive homeo. である.

<u>2.5. 補題</u> 任意の $n\geqq 2$ に対して、$\#\mathbb{O}(f)=n$ なる $f\in\mathcal{E}$ がある.

(証明). f_1 を. 次の様な homeo. とする。

$$\begin{cases} f_1(0)=0, \quad f_1\left(\frac{1}{2(k+1)}\right)=\frac{1}{2k} \quad (k\geqq 1), \quad f_1\left(\frac{1}{2}\right)=1, \\ f_1\left(\frac{1}{2k+1}\right)=\frac{1}{2k+3} \quad (k\geqq 0) \end{cases}$$

明らかに、$\mathbb{O}(f_1)=\{0, O_{f_1}(1)\}$, i.e. $\#\mathbb{O}(f_1)=2$.

$n\geqq 2$ に対しては. $f_{n-1} \overset{\text{def.}}{=} f_1^{n-1}=f_1\circ f_1\circ\cdots\circ f_1$ とおく.

$f_{n-1}\in\mathcal{H}$ かつ $\#\mathbb{O}(f_{n-1})=n$ となり. 2.4. 補題から. $f_{n-1}\in\mathcal{E}$.

<u>2.6. 補題</u> $f\in\mathcal{H}$ が $\#\mathbb{O}(f)=+\infty$ ならば $f\notin\mathcal{E}$.

(証明) $\forall\varepsilon>0$ に対して、$B(0;\varepsilon)$ を、0 の J に於る ε-近傍とする。このとき、$n<+\infty$ が存在し.

$J - B(0;\varepsilon) = \{x_1, \cdots, x_n\}$ となる。 $\#\mathbb{O}(f) = +\infty$ より、

$\mathbb{O}(f) - \{O_f(x_1), \cdots, O_f(x_n)\} \neq \phi$、従って、$J - \bigcup_{i=1}^{n} O_f(x_i)$ 内に相異なる2点 x, y をとることができる。

$x, y \notin O_f(x_i)$ $(i=1,\cdots,n)$ より、$f^k(x), f^k(y) \in B(0;\varepsilon)$ $(\forall k \in \mathbb{Z})$

従って、$d(f^k(x), f^k(y)) \leqq \varepsilon$ for all $k \in \mathbb{Z}$

ここで $\varepsilon > 0$ は任意であったから、f は expansive ではない。

2.7. 定理　$f \in \mathcal{H}$ とする。

$$f \in \mathcal{E} \iff \#\mathbb{O}(f) < +\infty$$

(証明)　2.4. および 2.6. 補題から明らか。

ここで、次の様な、興味ある例が存在することに注意しておく。

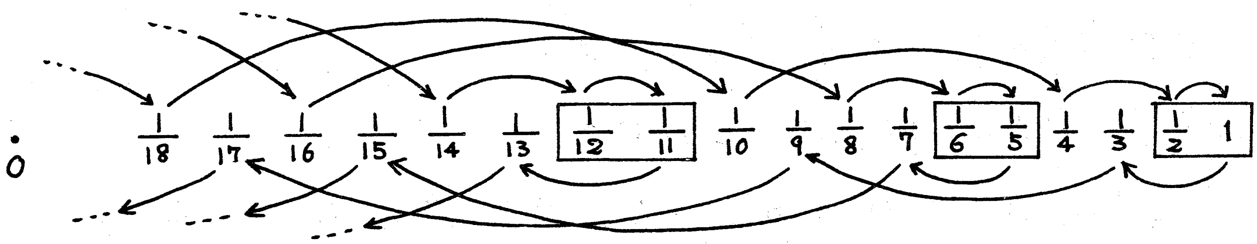
2.8. 補題　次の性質を満す homeo. $f_\infty \in \mathcal{H}$ が存在する。

$$\begin{cases} f_\infty \text{ の fixed point は } 0 \text{ のみ。かつ} \\ \#\mathbb{O}(f_\infty) = +\infty \end{cases}$$

(証明)　$x_1 = 1$，$x_k = x_{k-1} + 2k$ (for $k \geqq 2$) とおく。

$f_\infty : J \to J$ を、以下の様に定義する。(図参照)

$$\begin{cases} f_\infty(0) = 0 \quad , \quad \text{各 } k \geqq 1 \text{ に対して、} \\ f_\infty\left(\dfrac{1}{x_{k+j} - 2k + 1}\right) = \dfrac{1}{x_{k+j-1} - 2k + 1} \quad (j \geqq 2), \\ f_\infty\left(\dfrac{1}{x_{k+1} - 2k + 1}\right) = \dfrac{1}{x_k + 1}, \qquad f_\infty\left(\dfrac{1}{x_k + 1}\right) = \dfrac{1}{x_k}, \\ f_\infty\left(\dfrac{1}{x_k}\right) = \dfrac{1}{x_{k+1} - 2k}, \quad f_\infty\left(\dfrac{1}{x_{k+j} - 2k}\right) = \dfrac{1}{x_{k+j+1} - 2k} \quad (j \geqq 1) \end{cases}$$



2.9. 定理　$\mathcal{E}$ は $\mathcal{H}$ で open ではない。

(証明) $\forall f\in\mathcal{E}$ および $\forall k\geqq 1$ に対して、$g_k\in\mathcal{H}$ を、以下の様に定義する。

$\frac{1}{k}\leqq x\leqq 1$ を満す各 $x\in J$ に対して、$O_f(x)$を考え、$O_f(x)$の様子に応じて、g_k を作る。

(場合(i))　$O_f(x)\subset[\frac{1}{k},1]$

この場合は、$g_k(x)=f(x)$ とおく。

(場合(ii))　$O_f(x)\not\subset[\frac{1}{k},1]$

次の条件を満す2点 y,z が存在する。　$y,z\in O_f(x)$ で、

$$\begin{cases} y\in[\frac{1}{k},1] \text{ かつ } y'=f(y)\notin[\frac{1}{k},1], \\ z\notin[\frac{1}{k},1] \text{ かつ } f(z)\in[\frac{1}{k},1] \end{cases}$$

そこで、
$$\begin{cases} g_k(w)=f(w) & (\text{for } w\in O_f(x)\cap[\frac{1}{k},1]) \\ g_k(z)=f(z) \\ g_k(y')=z \end{cases}$$

とおく。

(場合(iii)) 上の2つの場合に使用されなかった各 $w \in [0, \frac{1}{k})$ に対しては、$g_k(w) = w$ とおく。

以上の様に定義すると、$\#\mathbb{O}(g_k) = +\infty$ となり、$g_k \notin \mathcal{E}$.

一方、$d(f, g_k) \leq \frac{1}{k}$ である。 kは任意であったから、

fは、expansive ではない homeo. で、いくらでも近く、近似することができる。

<u>2.10. 定理</u> $\mathcal{E}$ は $\mathcal{H}$ に於て、dense である。

(証明) $\forall g \in \mathcal{H}$ および $\forall k \geq 1$ に対して、

$[\frac{1}{k}, 1]$ に於ては、2.9.定理の証明中の、場合(i), (ii) の様に、周期軌道を作り、 $[0, \frac{1}{k})$ に於ては、2.5. 補題の homeo. f_1 を使って、J上の expansive homeo. を構成すればよい。

3°. より一般的な結果について。

2.9.定理の証明のポイントは、fixed point の十分小さな近傍上で、homeo. を id. に修正することであった。この事に注目すれば、1°. に於て述べた、より一般的な結果を得る。

証明には、次の2つの定理を必要とする。

<u>3.1. 定理</u>(V.K.A.M. Gugenheim [2]) MをPL n-cell 又は、PL n-sphere とする。Mから自分自身への、向きを保つ、PL homeo. は、id. に PL isotopic である。

3.2. 定理 (Regular neighborhoods の一意性)

MをPL多様体、PをM内のcompact polyhedron、N_1, N_2を、共にPのMに於るregular nbd.とする。
この時、次の性質を満すPL homeo. $h: M \to M$が存在する。

$h(N_1) = N_2$, $h|_P = id.$ $h|_{M-K} = id.$

(KはM内の適当なcompact set)

(1°で述べた定理の証明)

W, U_1, U_2を、共に、m_0を含み、次の条件を満す、closed PL n-cellとする。

$$\begin{cases} \text{(i)} & \text{diameter}(W) < \frac{1}{2k}, \ W\text{は}m_0\text{以外に fixed pt. を含まない.} \\ \text{(ii)} & m_0 \in \text{Int}\, U_2 \subset U_2 \subset \text{Int}\, U_1 \subset U_1 \subset \text{Int}\, W, \\ \text{(iii)} & U_2 \subset \text{Int}\, f(U_1) \\ \text{(iv)} & f(U_1) \subset \text{Int}\, W \end{cases}$$

ここで、U_2, $f(U_2)$は共に、m_0のregular nbd.だから、
3.2.定理より、$\exists$PL homeo. $\varphi: W \to W$, $\exists$compact nbd K of $U_2 \cup f(U_2)$ in Int $f(U_1)$ s.t.

$$\begin{cases} \text{(i)} & \varphi(f(U_2)) = U_2 \\ \text{(ii)} & U_2 \cup f(U_2) \subset \text{Int}\, K \\ \text{(iii)} & \varphi|_{W-K} = id. \\ \text{(iv)} & \varphi(m_0) = m_0 \end{cases}$$

そこで、

$$f_1 = \begin{cases} f & \text{on } M - \mathrm{Int}\, W \\ \varphi \circ f & \text{on } W \end{cases}$$

とおく. f_1 は PL homeo. で. $f_1(U_2) = U_2$, $f_1(m_0) = m_0$ である. $\mathrm{Bd}\, U_2 \times [0, \varepsilon]$ を. $\mathrm{Bd}\, U_2$ の. $W - \mathrm{Int}\, U_2$ に於る collar nbd で. $\mathrm{Bd}\, U_2 \times [0, \varepsilon] \subset \mathrm{Int}\, f(U_1)$ となるものとする.

3.1. 定理から. $\exists$PL homeo. $H: \mathrm{Bd}\, U_2 \times [0, \varepsilon] \to \mathrm{Bd}\, U_2 \times [0, \varepsilon]$ s.t.

$$\begin{cases} H(x, \varepsilon) = (x, \varepsilon) \\ H(x, 0) = (f_1^{-1}(x), 0) \end{cases}, \quad \text{for all } x \in \mathrm{Bd}\, U_2$$

そこで. Hを. $M - (\mathrm{Bd}\, U_2 \times [0, \varepsilon) \cup U_2)$上. id. map として拡張する.

$$g_k = \begin{cases} H \circ f_1 & \text{on } M - \mathrm{Int}\, U_2 \\ id. & \text{on } U_2 \end{cases}$$

とおく.

作り方から. g_kは expansive ではなく. かつ.

$$d(f(x), g_k(x)) < \frac{1}{2k} \quad \text{for all } x \in M.$$

となる.

REFERENCES.

[1] B.F. BRYANT, Expansive self-homeomorphisms of a compact metric space, Amer. Math. Monthly, 69 (1962) 386-391.

[2] V.K.A.M. GUGENHEIM, Piecewise linear isotopy, Proc. London Math. Soc., 31 (1953) 29-53.

[3] E. HEMMINGSEN - W. REDDY, Expansive homeomorphisms on homogeneous spaces, Fund. Math. LXIV (1969) 203-207

[4] J.F. JAKOBSEN - W.R. UTZ, The nonexistence of expansive homeomorphisms of a closed 2-cell, Proc. J. Math., 10 (1960) 1319-1321.

[5] T. O'BRIEN, Expansive homeomorphisms on compact manifolds, Proc. Amer. Math. Soc., 24 (1970) 769-771

[6] T. O'BRIEN - W. REDDY, Each compact orientable surface of positive genus admits an expansive homeomorphisms, Pacific J. Math., 35 (1970) 737-741.

[7] W. REDDY, The existence of expansive homeomorphisms on manifolds, Duke Math. J., 32 (1965) 627-632.

[8] M. SEARS, Expansive self-homeomorphisms of the Cantor set, Math. Systems Theory, 6 (1972) 129-132.

[9] W.R. UTZ, Unstable homeomorphisms, Proc. Amer. Math. Soc., 1 (1950) 769-774.

[10] R.F. WILLIAMS, A note on unstable homeomorphisms, Proc. Amer. Math. Soc., 6 (1955) 308-309.