数理解析研究所講究録
第 371 巻 1979 年 18-30

不定方程式 $\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ について

東女大・文理 山本幸一

1. 以下特にことわらない限り文字は自然数を表わす.

分数 $\frac{a}{n}$ は高々 a 個の相異る単位分数の和である. このことは Fibonacci, Sylvester 以来よく知られた結果である. また, そこに現われる最大の分母を $n(n-1)$ で抑えることが出来ることも Farey 数列の理論等から知られている. ([1] 参照)

われわれは各単位分数の相異るという制限を落として, ただ $\frac{a}{n}$ をいくつかの単位分数の和に分解する問題を考える.

既約分数 $\frac{2}{n}$ は 2 個の単位分数の和である. $\frac{3}{n}$ は 2 個の単位分数の和であることもあり, また 3 個の単位分数の和にしかならないこともある.

<u>補題 1</u>. 既約分数 $\frac{a}{b}$ が 2 個の単位分数の和になるために必要かつ十分な条件は, $a \mid r+s$, $rs \mid b$ を満たす r, s の存在することである.

[証明] $\frac{a}{b}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ で $(x, y)=d$, $x=dx_0$, $y=dy_0$ とすれば,

$\frac{a}{b}=\frac{x_0+y_0}{dx_0y_0}$ で右辺が既約分数だから $a|x_0+y_0$．また $\frac{da}{b}=\frac{x_0+y_0}{x_0y_0}$ の右辺が既約分数だから $x_0y_0|b$．

補題2．既約分数 $\frac{a}{b}$ を単位分数2個の和に表わす方法（順序を区別する）の数は，$r\equiv-b \pmod a$, $r|b^2$ なる r の個数 $\tau_a(b^2)$ に等しい．

[証明] $\frac{a}{b}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ ならば $axy=b(x+y)$, $(ax-b)(ay-b)=b^2$ で，$ax-b=r$ は $r>0$, $r\equiv-b \pmod a$ をみたす r^2 の約数であり，逆にそのような r から $x=\frac{b+r}{a}$ とおいて解を得る．

たとえば $n=p_1p_2\cdots p_r$ で各 p_i が素数 $\equiv 1 \pmod 3$ ならば，$\frac{3}{n}$ は2個の単位分数の和にはならない．

次に $a=4$ の場合 $\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ は，$n>1$ について常に解けることを P. Erdös と E. G. Straus は推測したのであるが，この問題は現在まだ解決されていない．実験的には $n<10^8$ までは成立つことが確かめられている．

$a=5, 6$ についても同様に $\frac{a}{n}$ が $n>1$ の時3個の単位分数の和になるものと推測される．$\frac{8}{n}$ はたとえば $n=11$ について3個の単位分数の和ではない．

a が与えられたとき $\frac{a}{n}$ は有限個の例外値をのぞき，任意の n について3個の単位分数の和になると A. Schinzel は予想している．

また a をも動かせば3個の単位分数の和にならない $\frac{a}{n}$ は無

限に多く存在する。([3])

2. 不定方程式

$$(*)\qquad \frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$$

で，n が偶数ならば $a=2$ の場合に帰着して解はいつもあるから，始めから n は奇数 >1 であると仮定する．

$x>\frac{n}{4}$ は明白であるが，$x\leqslant y\leqslant z$ であるとすれば $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\leqslant\frac{3}{x}$ より $x\leqslant\frac{3n}{4}$．ゆえに $x=\frac{n+s}{4}$ とおけば $0<s<2n$ で，x を固定したとき

$$\frac{4}{n}-\frac{1}{x}=\frac{s}{n\,\frac{n+s}{4}}$$

を2つの単位分数の和に書く方法の数が $\tau_s(n^2x^2)$ だから，不定方程式 (*) の解の総数は

$$\sum_{\substack{0<s<2n\\ s\equiv -n\ (\mathrm{mod}\ 4)}} \tau_s\left(n^2\left(\frac{n+s}{4}\right)^2\right)<\infty .$$

3. また一般性を失うことなしに $n=p$ は素数と考えてもよい．その際，次の2つの型に分類される:

$$(\mathrm{I})\qquad \frac{4}{p}=\frac{1}{x}+\frac{1}{py}+\frac{1}{pz},\qquad xyz\not\equiv 0\pmod p,$$

$$(\mathrm{II})\qquad \frac{4}{p}=\frac{1}{px}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z},\qquad xyz\not\equiv 0\pmod p.$$

Mordell [2] が著者の前論文 [4] を紹介するに当って，合同條件 (I) の $xyz\not\equiv 0$ に，疑義をさしはさんでいるようだが，それはそのままでよい．念の為詳しく説明してみると，ともか

く(*)で $x\equiv y\equiv z\equiv 0 \pmod{p}$ は不可能，また $xyz\not\equiv 0 \pmod{p}$ も不可能であるから，x, y, z のうち1個又は2個が p で割切れる．前の場合 $\frac{4}{p}=\frac{1}{px}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$，$yz\not\equiv 0 \pmod{p}$ ならば $\frac{4}{p}-\frac{1}{px}=\frac{4x-1}{px}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ の分母が p で割切れないので $p|4x-1$．ゆえに $x\not\equiv 0 \pmod{p}$．また後の場合 $\frac{4}{p}=\frac{1}{x}+\frac{1}{py}+\frac{1}{pz}$，$x\not\equiv 0 \pmod{p}$ ならば，$d=(y,z)$，$y=dy_0$，$z=dz_0$ とおいて $\frac{4}{p}-\frac{1}{x}=\frac{4x-p}{px}=\frac{1}{pd}\left(\frac{1}{y_0}+\frac{1}{z_0}\right)$，$\frac{4x-p}{x}=\frac{y_0+z_0}{dy_0z_0}$，$\frac{d(4x-p)}{x}=\frac{y_0+z_0}{y_0z_0}$ で右辺が既約分数だから $x=y_0z_0s$，$d(4x-p)=(y_0+z_0)s$ となる．特に $s\not\equiv 0 \pmod{p}$．そして $s|p$ と $s|(4x-p)d$ より $s|pd$，$s|d$ を得る．今 $d=d_0s$ とおけば $y_0+z_0=d_0(4x-p)$．さて $y\equiv 0 \pmod{p}$ が成立つと仮定すれば，$y_0\not\equiv 0 \pmod{p}$ より $d\equiv d_0s\equiv 0 \pmod{p}$，$d_0\equiv 0 \pmod{p}$ となる．ゆえに $d_0\geqq p$ で，$u(4x-u)\geqq 4x-1 \quad (0<u<4x)$ より

$$x=y_0z_0s\geqq y_0z_0\geqq y_0+z_0-1=d_0(4x-p)-1\geqq p(4x-p)-1\geqq 4x-1-1=4x-2,$$

$3x\leqq 2$ なる矛盾を生ずる．よって $y\not\equiv 0 \pmod{p}$．また $z\not\equiv 0 \pmod{p}$．

4. 定理1．(I)に解があるための必要かつ十分な條件は

$$p\equiv -q \pmod{4rs}, \quad r+s\equiv 0 \pmod{q}$$

を満たす q, r, s の存在することである．

[証明] $\frac{4}{p}-\frac{1}{x}=\frac{4x-p}{px}=\frac{1}{p}\frac{4x-p}{x}$ で，$\frac{4x-p}{x}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ ならば $q=4x-p$，$x=\frac{p+q}{4}$ について $\frac{q}{\frac{p+q}{4}}$ が2つの単位分数の和で，補題1から $q|r+s$，$rs|\frac{p+q}{4}$ なる r, s の存在に帰着する．

定理2．(II)に解があるための必要かつ十分な條件は

$$pq\equiv -1 \pmod{4rs}, \quad r+s\equiv 0 \pmod{q}$$

を満たす q, r, s の存在することである.

［証明］ $\frac{4}{p}-\frac{1}{px}=\frac{4x-1}{px}=\frac{q}{x}=\frac{q}{\frac{pq+1}{4}}$, $q=\frac{4x-1}{p}$ に補題1を適用して $q\,|\,r+s$, $rs\,\Big|\,\frac{pq+1}{4}$ なる r, s の存在に帰着する.

定理1及び定理2で $q=r=s=1$ を考えれば

$$p\equiv -1 \pmod 4$$

なる時は (I) にも (II) にも解がある. 故にこれより後では, $p\equiv 1 \pmod 4$ なる p だけを考察することにする.

定理3. (II) に解があるための必要かつ十分な条件は,

$$q\equiv -1 \pmod 4,\quad rs\,\Big|\,\frac{q+1}{4},\quad r+sp\equiv 0 \pmod q$$

を満足する q, r, s の存在することである. また

$$q\equiv -1 \pmod 4,\quad rs\,\Big|\,\frac{q+1}{4},\quad 4r^2sp+1\equiv 0 \pmod q$$

を満足する q, r, s の存在することでもある.

［証明］ $\frac{4}{p}-\frac{1}{px}=\frac{4x-1}{px}=\frac{q}{p\,\frac{q+1}{4}}$, $q=4x-1$ に補題1を適用すると $rs\,\Big|\,\frac{q+1}{4}$, $r+sp\equiv 0 \pmod q$ なる r, s の存在に帰着する.

r の代りに $t\,\Big|\,\frac{q+1}{4}$ なる $\frac{q+1}{4t}$ を取れば, $\frac{q+1}{4t}+sp\equiv 0 \pmod q$, $s\frac{q+1}{4t}\,\Big|\,\frac{q+1}{4}$ は $s\,|\,t$, $1+4tsp\equiv 0 \pmod q$ と同値な条件であるが, $t=sr$ とおいて, $rs\,\Big|\,\frac{q+1}{4}$, $1+4rs^2p\equiv 0 \pmod q$ と同値になる.

定理4. (I) に解があるための必要かつ十分な条件は

$$q\equiv -1 \pmod 4,\quad rs\,\Big|\,\frac{p+q}{4},\quad r+sp\equiv 0 \pmod q$$

を満足する q, r, s の存在することである. また

$$q\equiv -1 \pmod 4,\quad rs\,\Big|\,\frac{p+q}{4},\quad 4r^2s+p\equiv 0 \pmod q$$

を満足する q, r, s の存在することである.

[証明] $\dfrac{4}{p}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{4x-p}{px}=\dfrac{q}{p\,\frac{p+q}{4}}$ に補題1を適用すれば $rs \,\Big|\, \dfrac{p+q}{4}$, $r+sp\equiv 0 \pmod{q}$ なる r, s の存在に帰着する.

r の代りに $t \,\Big|\, \dfrac{p+q}{4}$ なる $\dfrac{q+1}{4t}$ を取れば, $\dfrac{q+1}{4t}+sp\equiv 0 \pmod{q}$, $s\dfrac{q+1}{4t} \,\Big|\, \dfrac{q+1}{4}$ は $s \mid t$, $p+4ts\equiv 0 \pmod{q}$ と同値であるが, $t=rs$ とおいて $rs \,\Big|\, \dfrac{p+q}{4}$, $p+4rs^2\equiv 0 \pmod{q}$ とも書ける.

5. $n\equiv 1 \pmod{4}$ なる自然数の全体を $\mathfrak{N}=\mathfrak{N}_1$ で表わし, また $n\equiv 1 \pmod{4L}$ を満たす自然数の全体を $\mathfrak{N}_L$ と書く.

さらに $\mathfrak{N}$ の中で合同條件 $n\equiv k \pmod{m}$ を満足するものの全体を'被覆'と総称し, 記号 $\left\{\dfrac{k}{m}\right\}$ で表わすことにする.

定理1, 定理2では n を $\mathfrak{N}_1$ の中に制限する. そうして, 定理1では

$$E_q(r,s)=\left\{\frac{-q}{4rs}\right\},\quad ただし\ q \mid r+s,\quad q\equiv -1 \pmod{4},$$

定理2では

$$E_q'(r,s)=\left\{\frac{-1/q}{4rs}\right\},\quad ただし\ q \mid r+s,\quad q\equiv -1 \pmod{4},$$

定理3では

$$F_q(r,s)=\left\{\frac{-r/s}{q}\right\},\quad ただし\ rs \,\Big|\, \frac{q+1}{4},\quad q\equiv -1 \pmod{4},$$

$$G_q'(r,s)=\left\{\frac{-1/4r^2s}{q}\right\},\quad ただし\ rs \,\Big|\, \frac{q+1}{4},\quad q\equiv -1 \pmod{4}$$

とおく. 素数 $p\in\mathfrak{N}_1$ がこれら被覆の一つに属するならば (*) は解をもつことを定理1乃至3は示している.

定理4では $p\equiv 1 \pmod{4L}$ なる素数, すなわち $p\in\mathfrak{N}_L$ を考察

する．そして

$$F_q(r,s)=\left\{\frac{-r/s}{q}\right\},\quad ただし\ rs\,\Big|\,\frac{q+1}{4},\quad q\equiv -1 \pmod{4L},$$

$$G_q(r,s)=\left\{\frac{-4r^2s}{q}\right\},\quad ただし\ rs\,\Big|\,\frac{q+1}{4},\quad q\equiv -1 \pmod{4L}$$

とおく．$p\in \mathfrak{N}_L$ はこれらの被覆のどれかに属する時(*)の解を生ずる．

特に $F_3(1,1)=\left\{\frac{-1}{3}\right\}$ は $n\equiv -1 \pmod{3}$ なる n を被覆し，また $E_3(1,2)=\left\{\frac{-3}{8}\right\}$ は $n\equiv 5 \pmod{8}$ なる n を覆って，それらの $p=n$ に対しては(*)に解を生ずるから，われわれは(*)の可解性に関しては

$$p\equiv 1 \pmod{24}$$

なる素数 p だけを考慮すればよい．すなわち $\mathfrak{N}_6$ の中の p だけを取扱えばよいことになる．

6. $q=7$ については $F_7(1,1)=\left\{\frac{-1}{7}\right\}$, $F_7(2,1)=\left\{\frac{-2}{7}\right\}$, $F_7(1,2)=\left\{\frac{-4}{7}\right\}$. 従って7の平方非剰余なる n については(*)が解けるので，始めから $n=p$ は7の平方剰余と考えてよい．同様に $q=15$ については $F_{15}(1,1)=\left\{\frac{-1}{15}\right\}$, $F_{15}(2,1)=\left\{\frac{-2}{15}\right\}$, $F_{15}(4,1)=\left\{\frac{-4}{15}\right\}$, $F_{15}(1,2)=\left\{\frac{-8}{15}\right\}$ であるが，$\mathfrak{N}_6$ の中では $\left\{\frac{-1}{15}\right\}=\left\{\frac{-4}{15}\right\}=\emptyset$（空集合）で，$\left\{\frac{-2}{15}\right\}=\left\{\frac{-2}{5}\right\}$, $\left\{\frac{-8}{15}\right\}=\left\{\frac{-3}{5}\right\}$ だから，p はまた5の平方剰余であると考えてよい．つまり $n=p$ は mod 840 の平方剰余と考えてもよい：

$$n\equiv 1,\ 121,\ 361,\ 169,\ 289,\ 529 \pmod{840}.$$

$\mathfrak{N}_6$ に対する被覆 $E_q(r,s)$, $E'_q(r,s)$, $F_q(r,s)$, $G_q(r,s)$, $G'_q(r,s)$ のうち，分母を q とした時 $\left\{\frac{-s}{q}\right\}$ の形に直して 3 乃至 97 の素数

値qに対するsを表にまとめると次のようになる.

q	s
3	1
5	2,3
7	1,2,4
11	1,3,4
13	2,5,7,8
17	3,5,6,7
19	1,4,5,7,11
23	1,2,3,4,6,8,12,13,16
29	2,3,8,10,11,15
31	1,2,4,7,8,9,16
37	2,5,8,14,15,19
41	3,6,7,11,14,15
43	1,4,11,15,23
47	1,2,3,4,6,7,8,12,16,17,24,25,27,32,36
53	2,3,5,8,18,20,23,27,30,32
59	1,3,4,5,7,12,15,17,20,36,41
61	2,7,8,23,31,35
67	1,4,9,15,17,23,35
71	1,2,3,4,6,8,9,12,16,18,24,36,37,40,48
73	5,7,11,15,20,21,39,44
79	1,2,4,5,8,10,16,20,21,23,32,40,42,55,64
83	1,3,4,7,12,21,28,30,36
89	3,6,7,15,23,30,31,51
97	5,7,13,14,15,39

また $E_q(r, s)$, $E'_q(r,s)$ から生ずる $\left\{\frac{-s}{q}\right\}$, $\left\{\frac{-1/s}{q}\right\}$ は次のようになる.

s	q
3	$q \equiv -1 \pmod{3}$
7	$q \equiv -1,-2,-4 \pmod{7}$
11	$q \equiv -1,-3,-4 \pmod{11}$
15	$q \equiv -1,-2,-8 \pmod{15}$
19	$q \equiv -1 \pmod{19}$
23	$q \equiv -1,-2,-3,-4,-6,-8,-12,-13,-16 \pmod{23}$
27	$q \equiv -1 \pmod{27}$
31	$q \equiv -1,-2,-16 \pmod{31}$
35	$q \equiv -1,-3,-12 \pmod{35}$
39	$q \equiv -1,-2,-20 \pmod{39}$
43	$q \equiv -1 \pmod{43}$
47	$q \equiv -1,-2,-3,-6,-8,-16,-24,-25,-32 \pmod{47}$
51	$q \equiv -1 \pmod{51}$
55	$q \equiv -1,-2,-28 \pmod{55}$
59	$q \equiv -1,-3,-20 \pmod{59}$
63	$q \equiv -1,-2,-32 \pmod{63}$
67	$q \equiv -1 \pmod{67}$
71	$q \equiv -1,-2,-3,-6,-12,-24,-36,-37,-48 \pmod{71}$
75	$q \equiv -1 \pmod{75}$
79	$q \equiv -1,-2,-40 \pmod{79}$
83	$q \equiv -1,-3,-28 \pmod{83}$
87	$q \equiv -1,-2,-44 \pmod{87}$
91	$q \equiv -1 \pmod{91}$
95	$q \equiv -1,-2,-3,-6,-16,-32,-48,-49,-64 \pmod{95}$
99	$q \equiv -1 \pmod{99}$

さらに $F_q(r,s)$, $G_q(r,s)$, $G'_q(r,s)$ から生ずる被覆は一般に次表で与えられる.

	s	q
L=1	1	$q\equiv -1 \pmod 4$
	4,1/4	$q\equiv -1 \pmod 4$
L=2	2,1/2	$q\equiv -1 \pmod 8$, $q\equiv 5 \pmod 8$
	8,1/8	$q\equiv -1 \pmod 8$, $q\equiv 5 \pmod 8$
	16,1/16	$q\equiv -1 \pmod 8$
L=3	3,1/3	$q\equiv -1 \pmod{12}$
	12,1/12	$q\equiv -1 \pmod{12}$
	36,1/36	$q\equiv -1 \pmod{12}$
L=6	6,1/6	$q\equiv -1 \pmod{24}$
	3/2,2/3	$q\equiv -1 \pmod{24}$
	24,1/24	$q\equiv -1 \pmod{24}$
	48,1/48	$q\equiv -1 \pmod{24}$
	72,1/72	$q\equiv -1 \pmod{24}$
	144,1/144	$q\equiv -1 \pmod{24}$

7. われわれの被覆 E, E', F, G, G' は $\mathfrak{N}_6$ つまり $n\equiv 1 \pmod{24}$ なる凡ての自然数 >1 を覆うのではない.

<u>定理 5</u>. 被覆 $E_q(r,s)$, $E'_q(r,s)$, $F_q(r,s)$, $G_q(r,s)$, $G'_q(r,s)$ は, 完全平方数を含むことはできない.

その証明は Legendre の記号, あるいはその拡張である Jacobi 記号, Kronecker 記号を使って検証によって得られるのであ

るが詳細はここでは省略する（[4] 参照）.

8. 不定方程式 (*) が解けない素数 $p \equiv 1 \pmod{24}$ があるならば，被覆 F, G, G′ から

$p+1,\ p+4,\ 4p+1$ は $q \equiv -1 \pmod{4}$ なる素因数をもたない．

$p+2,\ 2p+1,\ p+8,\ 8p+1$ は $q \equiv -1 \pmod{8}$ なる素因数も，また

$q \equiv 5 \pmod{8}$ なる素因数ももたない．

$p+16,\ 16p+1$ は $q \equiv -1 \pmod{8}$ なる素因数をもたない．

$p+3,\ 3p+1,\ p+12,\ 12p+1,\ p+36,\ 36p+1$ は $q \equiv -1 \pmod{12}$ なる

素因数をもたない．

$p+6,\ 6p+1,\ 2p+3,\ 3p+2,\ p+24,\ 24p+1,\ p+48,\ 48p+1,\ p+72,\ 72p+1,$

$p+144,\ 144p+1$ は $q \equiv -1 \pmod{24}$ なる素因数を持たない．

さらに，被覆 E, E′ から

$p+3,\ 3p+1$ は $q \equiv -1 \pmod{3}$ なる素因子を持たない．

$p+7,\ 7p+1$ は $q \equiv -1 \pmod{7}$, $q \equiv -2 \pmod{7}$, $q \equiv -4 \pmod{7}$ なる

素因数をもたない

$p+11,\ 11p+1$ は $q \equiv -1 \pmod{11}$, $q \equiv -3 \pmod{11}$, $q \equiv -4 \pmod{11}$ なる

素因数をもたない．

………．　その始めの方の値が前§の p.9 に与えた表に示されている．

電子計算機による計算では，あらかじめ q を 11 から 97 までの素数として q による n の剰余が p.8 の表に示された値に

なるものを除く．$n\leqslant 10^8$, $n\equiv 1 \pmod{24}$ なる約42万個のうちほぼ40分の1が残る．それらに被覆F, G, G' による判定を，引続いてE, E' による判定を行なう．結果は完全平方数だけが最後に残留し，残留したものは凡て完全平方数であった．従って不定方程式(*) は $1<n\leqslant 10^8$ なる n について解を持つことが確かめられたことになる．なお素数性は考慮していないので，結果はまた $n\leqslant 10^8$ なる非完全平方数 n はある被覆 E, E', F, G, G' に含まれることを示している．故にこの事実が凡ての非完全平方数について成立つものと予想される．

9. 最後に不定方程式 $\frac{5}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ について一言述べる．この問題に対しても同様の被覆 E, F, G が作られるが，なおその外に，$H_q(r,s)$ なる新しい被覆が現われる：

$$r+sp^2\equiv 0 \pmod{q},\quad \text{ただし}\ rs \,\Big|\, \left(\frac{q+1}{5},\ 252\right).$$

このような事情のため，始めから

$$p\equiv 1 \pmod{278460},\quad 278460=2^2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 13\cdot 17$$

なる p だけを取り扱えばよい．mod $12168720=19\cdot 23\cdot 278460$ では9個の剰余類しか残らない．すなわち 'n が小さい' 所では $\frac{5}{n}$ の方が $\frac{4}{n}$ よりも始末がいいようである．しかし，$\frac{4}{n}$ では完全平方数が凡て残留するのに，$\frac{5}{n}$ の場合凡ての被覆E, F, G, H をくぐり抜ける数がどんな数であるのか，興味ある問題であるが，現在のところ筆者にはまだ特定できない．

$\frac{4}{n}$ の場合が難しく，しかも２次体の整数論に密着していることは事実で，この問題を $\frac{4}{n}$ に限定して提出した Erdös の洞察力には驚歎せざるを得ない．

文献

[1] M. N. Bleicher and Paul Erdös; Denominators of Egyptian fractions, *Journ. of Number Theory*, vol. 8 (1976), pp. 157-168.

[2] L. J. Mordell; *Diophantine Equations*, Academic Press, 1969.

[3] K. Yamamoto; On a conjecture of Erdös, *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ.*, vol. 18 (1964), pp. 166-167.

[4] K. Yamamoto; On the Diophantine equation $\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$, *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ.*, vol. 19 (1965), pp. 37-47.