数理解析研究所講究録
第 371 巻 1979 年 47-64

円卓問題のコンピュータによる解法

信州大 情報工学科 中村義作
田中正彦

1. 円卓問題とは

古くから知られた未解決問題の1つに，Dudeneyの円卓問題と呼ばれる組合せ問題がある。それは

n人が1つの円卓に座り，全部で${}_{n-1}C_2$回の並び換えをする。このとき，どの人の両隣りにも，同じ2人の組が2回以上こないようにするには，どのように並び換えればいいか。

というものである。自分を除いた$n-1$人から，2人を選ぶ仕方の数は${}_{n-1}C_2$通りであるから，どの人についても，あらゆる組合せの2人を1回ずつ両隣りに持たせることが必要である。これは一種のブロック・デザインと考えられるが，調べてみると大変な難問である。私見によると，この問題は釣り合い不完備型ブロック計画（BIBD）の構成問題[(1)]と同じ位にむずかしく，また同じ位に面白い数学的側面を持っているが，応用分野が少ないという理由で，専門の数学者はそれほど関心を持っていないようである。

Dudeneyの著書[(2)]によると，この問題のおこりは以下のよ

うである。英国の天才パズリスト H.E. Dudeney が Daily Mail を担当していた頃のある日（1905年10月13日），6人で10回座る場合の円卓問題を出題し，3日後に解答を発表した。これが契機となり，一般の n にたいする解法が当時の一流数学者の間で盛んに論議された。しかし，解法を発見するに至らなかった。ところが，当の Dudeney が 1917 年の著書(2) のなかで，円卓問題の一般解法を発見したと宣言した。しかも，そのあとの文章が心憎い。多くの優秀な数学者が今なお不吉な数 $n=13$ の解を求めているから，その楽しみを奪わないために，解を示さないというのである。そして，$3 \leqq n \leqq 12$ の解を与えたのち，他に $n \leqq 25$ のすべての解と $n=33$ の解をもっていると述べた。

また，1919 年の別の著書(3) によると，つぎの補足が加えられている。$n=p+1$（p は素数，以下も同じ）のときは，Bergholt によって易しい解法が発見された。ついで，私（すなわち Dudeney）が $n=10$ の解を発見し，これに基づいて，Bewley がすべての偶数に適用できる一般解法を得た。n が奇数のときは極めて難解であったが，すべての場合に適用できる巧妙な解法をついに私が発見した，と。

Dudeney はこのように宣言しながらも，73歳の生涯を閉じるまで，その解法を公表しなかった。このため，奇数にたい

するDudeneyの解法はもちろんのこと，偶数にたいする解法も分らないままである。このことは，数学遊戯を網羅的かつ数学的に紹介したAhrensの大著[4]に円卓問題が何も述べられていないことや，数学遊戯に関するBallの名著[5]がBergholtの論文しか引用していないことから明らかである。

2. 円卓問題のその後の経緯

ここで，円卓問題の解法に関するDudeney以後の研究経緯について触れておく。筆者の1人（中村）の調査によると，円卓問題に関する研究発表は数年前まで全くなされていなかったが，最近になって，日本の一部のパズル愛好家（中村もその1人）の間で盛んに研究され始めた。まず1972年8月に，武蔵野電気通信研究所で開かれたパズル研究会で，中村が$n=16$の解を発表し，ついで畏友の小林茂太郎氏が$n=13$の解を数理科学[6]に発表した。また，島内と難波の両氏は，Dudeneyの解があることを知らずに，$n \leqq 12$のすべての解と$n=p+1$の一般解法を数学セミナー[7]に発表した。一方，アマチュア研究家の木場氏は，小林氏の論文[6]から円卓問題を知り，精力的な研究を進めて$n=17, 26, 28, 33$の解に到達した。中村は，木場氏の研究を小林兄から聞き，木場宅を訪問することによって，木場氏の具体的な解を拝見した。1974

年の8月のことである。1975年に入って，中村はn=偶数の円卓問題がn個の頂点を持つ完全グラフのある種の色分け問題に結びつけられることに気づき，$n=2p$の一般解法を発見して，数学セミナー[8]に発表した。また，試行錯誤の方法によって$n=15, 19$の解も得ていたが，年賀パズルに使用する目的で発表しなかった。ところが，中村の論文[8]に刺激された櫛田氏は，nが偶数と奇数のそれぞれにたいする模索的解法を発見し，私的なパズル雑誌[9],[10]に$n=36, 40, 50$の解と$n=15, 19, 21, 23, 25$の解を発表した。このため，中村の$n=15, 19$の解は未発表のままで終った。

1976年になって，喜安氏と池野氏と中村は，木場氏の解法を参考にしながら$n=p^k+1$の一般解法を研究し，ついに三重可遷群による解法を発見した。これは，ひとまず武蔵野電気通信研究所の所内資料[11]に発表したが，1979年に別の研究とあわせて数理科学[12]に発表した。一方，これとは別に，中村は$n=k$の解から$n=2k-1$の解を導く一般的な方法を発見した。しかし，これについては，発見のアナウンスを数理科学[13]にしただけで，具体的な方法は未発表である。その理由は，すべてのnを覆う解法が見つかったとき，同時に発表したいと考えているからである。1977年になって，喜安氏が$n=p+2$（ただし，pは$4m+3$型の素数で，3が平

方非剰余のとき）の解法を発見した。さきの$n=p^k+1$の解法とあわせて数理科学[12]に発表したのは，この喜安氏の解法である。

以上が，中村の把握している円卓問題の研究経過のすべてである。なお，うえの説明で「解」と「解法」を意図的に区別したが，これらはつぎの意味を持つ。解というのは，試行錯誤でもシラミツブシ的でも何でもいいから，とにかく特定のnにたいして具体的な並び換えの手順を与えたものである。これにたいして解法というのは，ある数学的な裏付けの下に，少なくとも無限個のnにたいして並び換えの手順を与えうるものである。この意味では，表題も“コンピュータによる解”とすべきであった。

3. 完全グラフの色分けによる解

nが偶数のときは，n頂点の完全グラフにたいするある種の色分けから，円卓問題の解が導かれる。n頂点の完全グラフをとり，どの1つの頂点から出る$n-1$本の枝もすべて異なる色で塗り分けるようにして，完全グラフのすべての枝を$n-1$色で塗り分けてみる。このとき，どの2色の枝を交互にたどる閉路（これは必ず閉路になる）も，n個の頂点を通る閉路——すなわちハミルトン閉路——になれば，おのおの

のハミルトン閉路を円卓への座り方に対応させることによって，円卓問題の解が得られる。これを，$n=6$ の具体例で示そう。

図１は，６頂点の完全グラフの15本の枝を０，１，２，３，４の５色で塗り分けたもので，どの２色の枝を交互にたどっても，図２のようにハミルトン閉路ができる。図２が円卓問題の解を与えていることは，

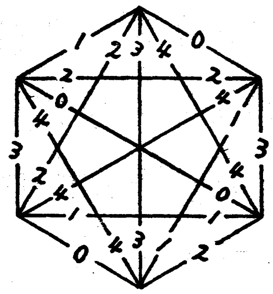
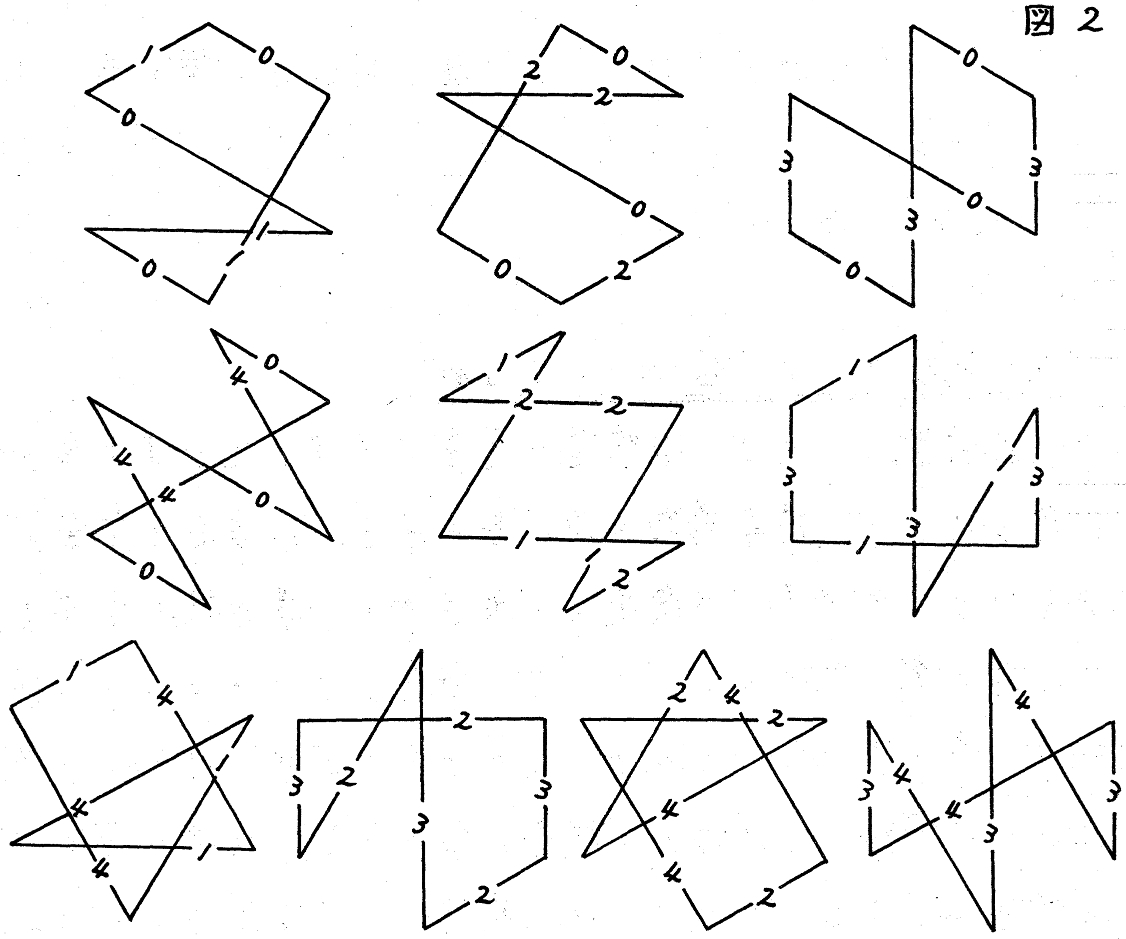


図　１

図２



図から容易に理解できよう。

このような色分けは，$n=p+1$ と $n=2p$ のとき，つねに可能である。まず，$n=p+1$ のときは，n 個の頂点を0，1，2，…，$p-1$，∞で表示し，2つの頂点 i と j を結ぶ枝の色を (i, j) とかけば，

$(i, j) \equiv i+j \pmod{p}$，$i \neq \infty$，$j \neq \infty$ のとき

$(i, \infty) \equiv 2i \pmod{p}$

が目的の色分けとなる。また，$n=2p$ のときは，n 個の頂点を0，1，2，…，$2p-1$ と表示すれば

$(i, j) \equiv i+j \pmod{2p}$，$|i-j|$ が偶数のとき

$(i, j) \equiv 2i \equiv 2j \pmod{2p}$，$|i-j| = p$ のとき

$(2i, 2j+1) \equiv 2j-2i+1 \pmod{2p}$，その他のとき

が目的の色分けとなる。この証明は，中村の報告[8]に示されている。

4. $n=16$ にたいする完全グラフの色分け

$n=p+1$，$n=2p$ にたいしては，円卓問題の解法が完全グラフの色分けから得られたが，これで覆えない最初の n を調べると $n=16$ である。筆者らは，すべての偶数にたいして，色分けによる円卓問題の解が存在する（だろう）と予想していたので，コンピュータによる網羅的方法で，$n=16$ の

色分けを捜してみた。その結果，予想通りに1つの色分けが見つかった。図3がそれである。ただし，複雑で見にくくなるため，4つに分けて色を示した。この図を実際に調べてみ

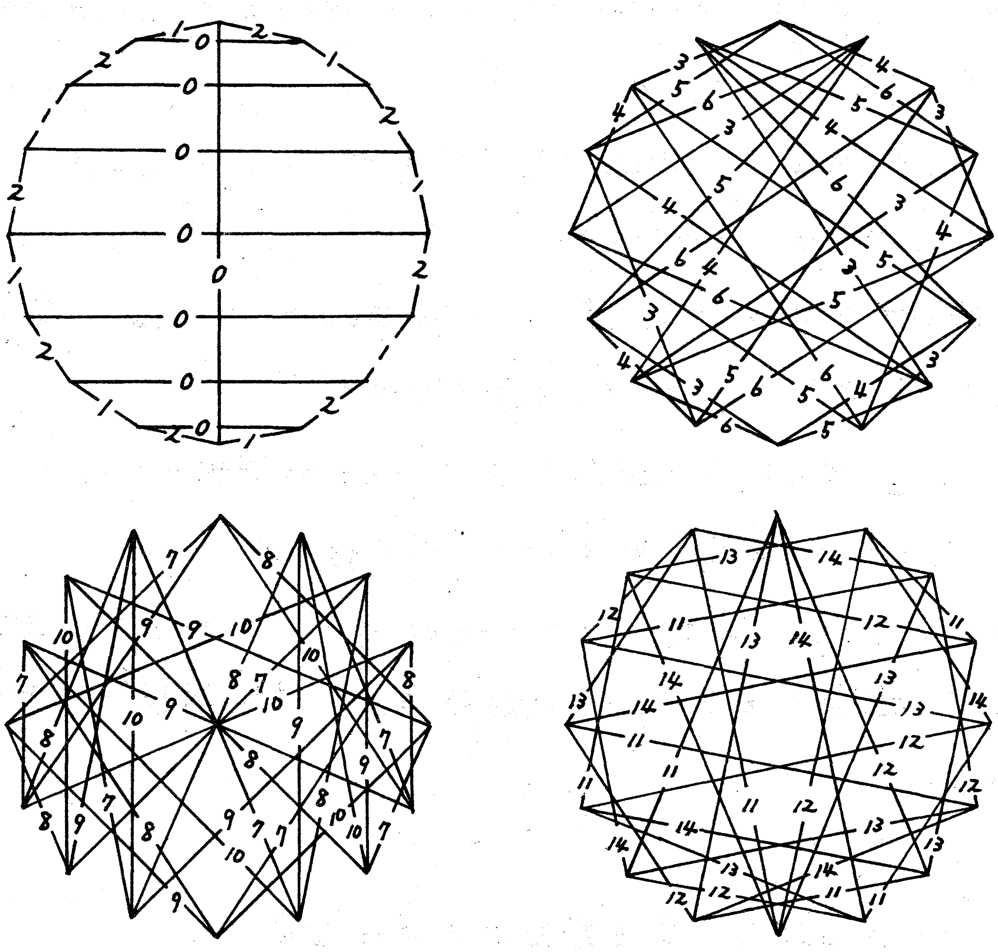


図 3

ると，0から14までのどの2色の枝を交互にたどっても，見事にハミルトン閉路ができている。しかし，これを見ても，より大きいnへの一般化は困難で，だいいち計算の組合せ数がnと共に急速に大きくなる。表1はその概数を示したもの

で，大型計算機でも，網羅的探索ではたちまち行き止まってしまう。そこで，若干の工夫を施したものがつぎの方法である。

n	組合せ数
6	12通り
8	34560通り
10	1.25×10^{12}通り
12	22ケタ
14	36ケタ
16	54ケタ
18	77ケタ
20	105ケタ

$\prod_{i=1}^{n-3} i!$ 通り

表 1

5. $n=16$ にたいする正規型の解

$n=16$ の完全グラフにたいしては，図3より遙かに簡明な色分けが存在する。まず，16個の頂点を0，1，2，⋯⋯，13，∞_1，∞_2 とし，頂点 i と頂点 j を結ぶ枝の色を (i, j) で表わす。すると，色が i $(i=0, 1, 2, \cdots, 13)$ となる8本の枝を

$$(i, i+2), (i+1, \infty_1), (i+3, i+7), (i+4, i+12)$$
$$(i+5, \infty_2), (i+6, i+11), (i+8, i+9), (i+10, i+13)$$

で決め，色が14となるものを

$$(0, 7), (1, 8), (2, 9), (3, 10)$$
$$(4, 11), (5, 12), (6, 13), (\infty_1, \infty_2)$$

で決めたものが目的の色分けとなる。ただし，頂点の番号は(mod. 13)で解釈するものとした。

この色分けを見やすくするため，円周を14等分し，各等分

点に反時計まわりに0, 1, 2, ……, 13 と頂点の番号をかく。すると，図4のように，0の色から13の色までは同色の8本の枝が巡回的に円周上をまわり，14の色は直径上に向い合っ

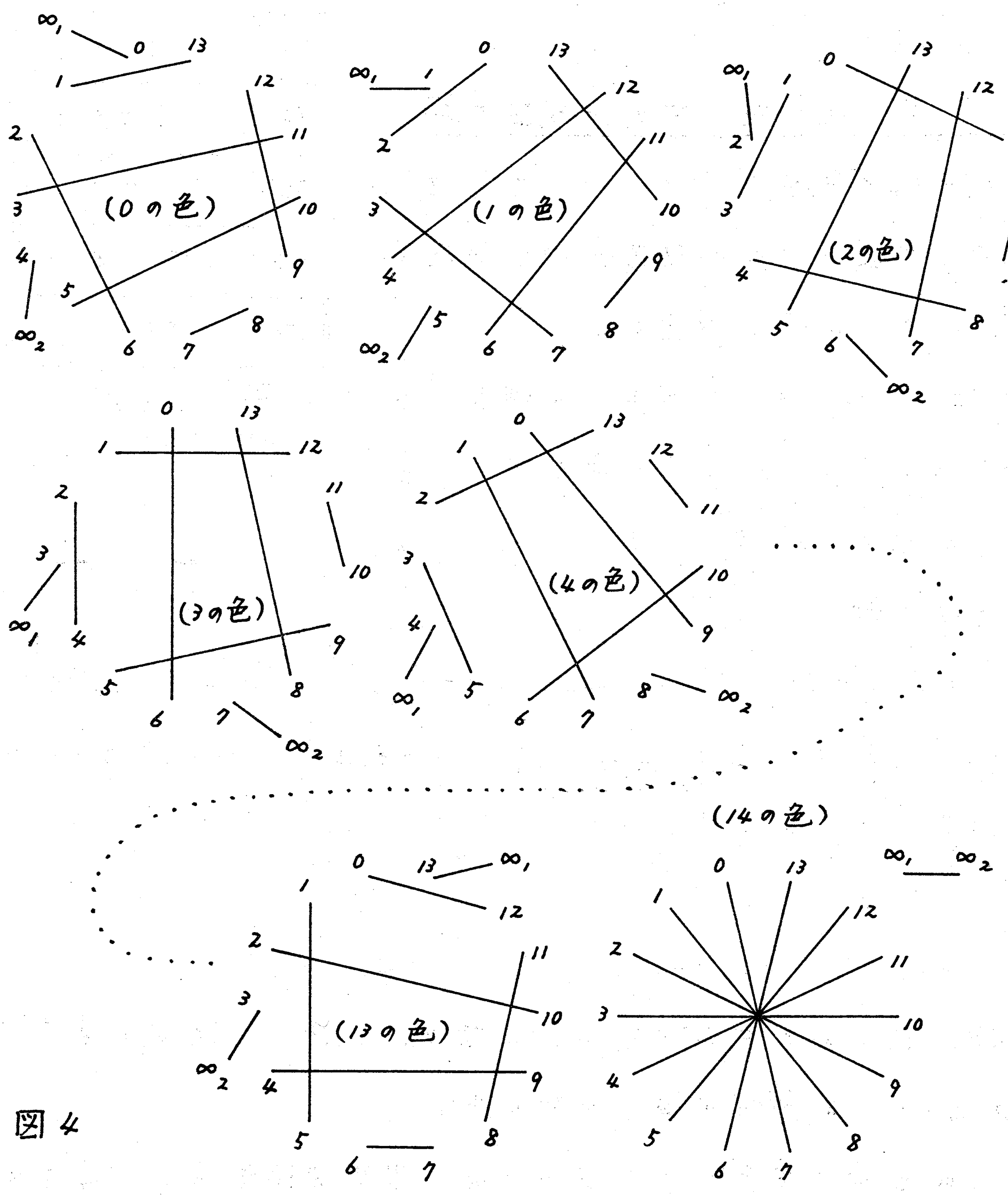


図4

た7本の枝と(∞_1, ∞_2)となる。このことから，このタイプの色分けができれば，0の枝を指定するだけで十分となる。以下では，このタイプの色分けを正規型の色分けと呼ぶ。

6. $n=p+1$ にたいする正規型の解

$n=p+1$ の完全グラフにたいしては，n 個の頂点を 0，1，2，…，$p-1$，∞ で表示したとき

$(i, j) \equiv i+j \pmod{p}$，$i \neq \infty$，$j \neq \infty$ のとき

$(i, \infty) \equiv 2i \pmod{p}$

が1つの色分けとなることを節3で述べた。ところが，この色分けから正規型の色分けをつねに作ることができる。まず，(mod. p)にたいする1つの原始根を r とし，$p-1$ 等分した円周上の各点に，反時計まわりに r^1, r^2, r^3, ……, $r^{p-1} \equiv 1$ とつける。すると，これが目的の正規型の色分けを与えている。たとえば，$n=12$ にたいして上式の色分けをすると，つぎのページの図5の左側の色分けが得られるが，これを原始根(この場合は，$r=2$)の表示に変えると，図5の右側の色分けに変換されて正規型となる。この証明は初等的なので省略する。このことから，正規型の色分けが簡明であるだけでなく，理論的にも1つの根拠をもつことになった。

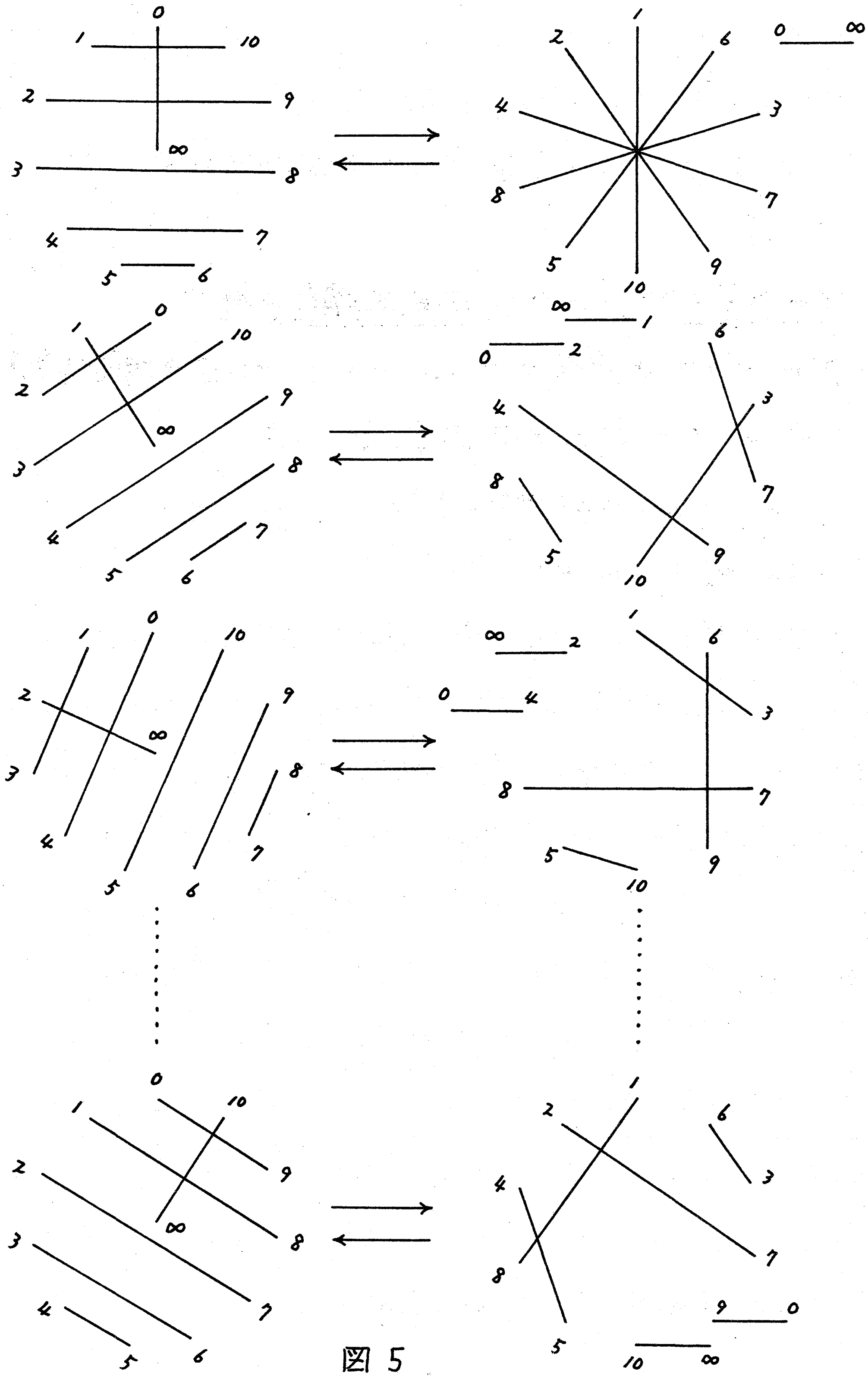

0
1
10
2
9
∞
3
8
4
7
5
6
1
2
6
0
∞
4
3
8
7
5
9
10
0
1
10
2
9
∞
3
8
4
7
5
6
∞
1
0
2
6
4
3
8
7
5
9
10
0
1
10
9
2
∞
3
8
4
7
5
6
1
∞
2
6
0
4
3
8
7
5
9
10
0
10
1
9
2
∞
8
3
7
4
5
6
1
2
6
4
3
8
7
9
0
5
10
∞

図 5

7. コンピュータによる正規型の色分けの探索

$n=p+1$ の完全グラフにたいする正規型の色分けはつねに存在し，また $n=16$ の完全グラフにたいしても正規型の色分けが存在した。そこで，偶数頂点の一般の完全グラフにたいしても，やはり正規型の色分けが存在するのではないかと予想をたて，コンピュータで網羅的に探索することにした。ここに「網羅的」といっても，色分けのタイプが正規型に限定されているため，計算の組合せ数は表1より遙かに減少する。n 頂点の完全グラフにたいする組合せ数は

$$f(n)=\frac{[(n-4)(n-6)(n-8)\cdots 6\cdot 4]^2}{(n-2)^{(n-6)/2}}$$

と概算され，$n \leqq 30$ ぐらいまでは計算できる。そこで，コンピュータにかけたところ，$n=10$ の完全グラフにたいしては，正規型の色分けは存在しないことが確認された。ところが，不思議なことに，それ以上の n については正規型の色分けがつぎつぎ見つかり，理論的な色分けが可能な $n=p+1$ の場合も含めると，$12 \leqq n \leqq 32$ の

n	$\log f(n)$	n	$\log f(n)$
10	0.9	24	6.4
12	1.5	26	7.4
14	2.2	28	8.4
16	2.9	30	9.4
18	3.7	32	10.5
20	4.6	34	11.5
22	5.5		

表 2

すべてについて，正規型の色分けが見つかった。$n>32$ については，現在のところ，計算能力の点で網羅的探索は困難のようである。$n=p+1$ とならない n について，正規型の色分けを示すと図6のようになる。ただし，この図では0の

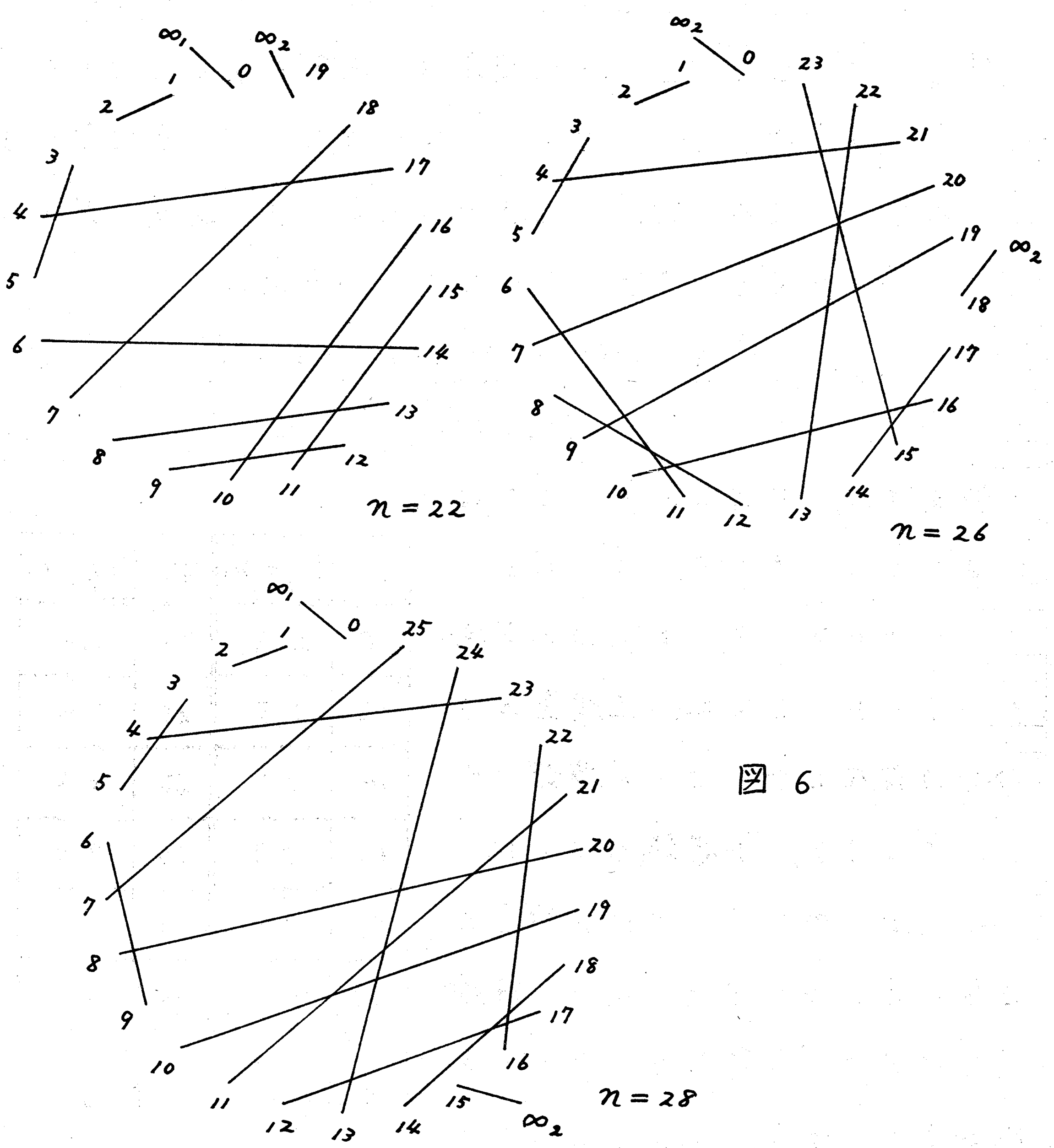


図 6

色をもつ枝についてだけ示した。その他の色の枝は，図4を参照すれば明らかであろう。

8. まとめと予想

Dudeneyの円卓問題にたいして，問題の内容と今日までの研究経緯を説明したのち，nが偶数の場合は，円卓問題がn頂点の完全グラフの枝の色分け問題に結びつけられることを述べた。これは，どの1つの頂点から出る$n-1$本の枝もすべて異なるように$n-1$色で塗り分け，しかもどの2色の枝を交互にたどる閉路もハミルトン閉路にするような問題で，$n=p+1$と$n=2p$のときは，理論的な色分けが可能である。この他のnについては，まず$n=16$のときをコンピュータによる網羅的探索で求め，これを足がかりにして正規型の色分けを導入した。そして，$n=p+1$のときは正規型の色分けが理論的に可能なことを示したのち，その他のnについても，コンピュータによる網羅的な探索をおこなった。この結果，$n=10$のときは正規型の色分けが不可能であるが，それ以外のn（$\leqq 32$）のときは正規型の色分けがつねに存在した。ただし，$n>34$になると，コンピュータの能力の面から，網羅的探索は困難のようである。

以上の検討から，筆者らは，$n=10$以外のすべてのnにた

いして，正規型の色分けが存在するのではないかと予想している。また，正規型に限定しなければ，当然すべてのnについて目的の色分けが存在すると予想している。しかし，その理論的な解明となると，現在のところ，どういう方向からアプローチするかの見当もついていない。

最後に，円卓問題の応用と関連研究について，一言ふれておく。節1では，円卓問題の応用分野が少ないと述べたが，皆無というわけではない。筆者の1人（中村）は，円卓問題が多重変成器の浮遊容量の分散均等化[14]に有用であることを指摘し，外国のある学者も血清学の分野[15]に応用できると述べている。よって，円卓問題がもっと多くの研究者に知られるようになれば，いろいろの応用分野が見つかるものと考えられる。また，関連研究としては，neighor design[16]と呼ばれるものがある。これは，円卓問題と同じように，何個かのものを円卓に並べて互いのバランスをとるのであるが，すべてのものを並べなくてもいいところが円卓問題と違っている。しかし，隣り合うものとのバランスをとるという観点では，円卓問題ときわめて似た考えをとっている。しかし，両隣りに並ぶものを同時に考慮しないという点もあって，理論の展開の方法はかなり異質のようである。

引 用 文 献

(1) M. Hall : Combinatorial Theory, Blaisdell, 1967.

(2) H. E. Dudeney : Amusements in Mathematics, Dover, New York, 1970 (Thomas Nelson & Sons, 1917).

(3) H. E. Dudeney : The Canterbury Puzzles, Dover, New York, 1958 (Thomas Nelson & Sons, 1919).

(4) W. Ahrens : Mathematische Unterhaltungen und Spiele, I, II, Verlag und Druck von B. G. Teubner, 1918.

(5) W. W. R. Ball & H. S. M. Coxeter : Mathematical Recreations and Essays, 12-th ed., University of Toronto Press, 1974.

(6) 小林茂太郎："Dudeney の円卓問題, $n=13$ の解", 数理科学, No. 115, 1973.

(7) 島内剛一, 難波完爾："椅子の並べ方", 数学セミナー, No. 129, 1972.

(8) 中村義作："デュードニーの円卓問題と完全グラフの色分け", 数学セミナー, No. 159, 1975.

(9) 櫛田用二："円卓問題演習(偶数の場合)", 数芸パズル, No. 83, 1975.

(10) 櫛田用二："円卓問題演習(奇数の場合)", 数芸パズル, No. 84, 1975.

(11) 中村義作, 喜安善市, 池野信一: "三重可遷群による円卓問題の解法", 電気通信研究所 成果報告 第9598号, 1975.

(12) 喜安善市, 中村義作: "円卓問題の部分解ふたつ", 別刷数理科学, パズル IV, 1979.

(13) 中村義作: "いろいろの円卓問題", 別刷数理科学, パズル I, 1976.

(14) 中村義作: "組合せ理論の応用(2)", オペレーションズ・リサーチ, Vol. 22, No. 7, 1977.

(15) D. H. Rees: "Some Designs of Use in Serology", Biometrics, Vol. 23, 1967

(16) F. K. Hwang & S. Lin: "Neighor Designs", J. of Combinatorial Theory, Series A 23, 1977.