数理解析研究所講究録
第 371 巻 1979 年 65-73



# 一様分布と積分の近似計算について

(華羅庚, 王元著:「数論在近似分析中的応用」の紹介)

名工大 数学教室 江田義計

[A]

s は正整数とし, $G_s$ は s-dim 空間の単位立方体, $0 \leq x_i \leq 1$ $(1 \leq i \leq s)$ を表わすとする. $n_l$ $(1 < n_1 < n_2 < \cdots)$ も正整数とし $P_{n_l}(k) = (x_1^{(n_l)}(k), \cdots, x_s^{(n_l)}(k))$ $(1 \leq k \leq n)$ を $G_s$ 中の点集合とする. ここで $0 \leq x_i^{(n_l)}(k) < 1$ $(1 \leq i \leq s)$ である. 任意の $\hat{\gamma} = (\gamma_1, \cdots \gamma_s) \in G_s$ に対し $N_{n_l}(\hat{\gamma}) = N_{n_l}(\gamma_1, \cdots, \gamma_s)$ で点 $P_{n_l}(k)$ $(1 \leq k \leq n)$ で不等式 $0 \leq x_i^{(n)}(k) < \gamma_i$ $(1 \leq i \leq s)$ すべてに適合するものの個数を表わす. もし $\sup_{\gamma \in G_s} \left| N_{n_l}(\hat{\gamma})/n_l - |\hat{\gamma}| \right| = \varphi(n_l)$, $|\hat{\gamma}| = \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_s$ であれば点集合 $P_{n_l}(k)$ $(1 < n_1 < \cdots)$ は偏差 $\varphi(n_l)$ をもつという

もし $\varphi(n_l) = o(1)$ であれば点集合 $P_{n_l}(k)$ $(1 < n_1 < \cdots)$ は一様分布をなし偏差 $\varphi(n_l)$ をもつという. 特に $n_l = l$ に対し $x_1^{(l)}(k) = x_1(k), \cdots x_s^{(l)}(k) = x_s(k)$ $(l = 1 \cdots)$ のとき点列 $P(k) = (x_1(k), \cdots, x_s(k))$ $(k = 1, 2 \cdots)$ は $G_s$ 上一様分布をなし偏差 $\varphi(n)$ をもつという (Weyl. 1916).

Roth (1954) による次の偏差の下界についての評価はこれ以後の理論の基本となるものである

定理1. $s \geq 2$ とする. 任意の点列 $P_n(k)$ $(1 \leq k \leq n)$ に対し

常に次式を得る：

$$\varphi(n) > 2^{-2s-4}(s-1)^{-\frac{s-1}{2}} n^{-1} (\log_2 n)^{\frac{s-1}{2}}$$

次の定理2による指数和と偏差の評価を用いて定理3の合同式の解と偏差についての結果を得る． $\bar{x} = \max(1, |x|)$, $\|\hat{\gamma}\| = \bar{\gamma}_1 \cdots \bar{\gamma}_s$, $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i$ （内積）をそれぞれ表わすとする．

定理2. $r$, $h$ は正整数とし，$h > r/\eta$ $(0 < \eta < 1/6)$ すると任意の $\hat{\gamma} \in G_s$ に対し常に $\left| \frac{1}{n} N_n(\hat{\gamma}) - |\gamma| \right| < \varphi(n)$ であり，ここで

$$\varphi(n) = \sum_{|m_i| \leq h}{}' \frac{1}{\|\pi \hat{m}\|} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{2\pi i (m, P_n(k))} \right| + (5s+6)\eta$$

$$+ \frac{s 2^s r^{r-1}}{\pi^{s+r} \eta^r h^r} (\log 64h)^{s-1},$$ ここで $\sum'$ は和 $\sum$ で $\hat{m} \neq \hat{0} = (0, \cdots 0)$ を示す．（$s=1$ は Erdös, Turán 1948, 一般には Kokama (1950), Hlawka (1961), Hua-Wang (1973)）

定理3. 合同式 $(\hat{a}, \hat{m}) \equiv 0 \pmod{n}$ は区域 $\|\hat{m}\| \leq M$ $(M \geq 1)$ $\hat{m} \neq 0$ では解がないとする．このとき点集合 $\left(\left\{\frac{a_1 k}{n}\right\} \cdots \left\{\frac{a_s k}{n}\right\}\right)$ $(1 \leq k \leq n)$ は偏差 $\varphi(n) \leq c(s) M^{-1} (\log 3M)^s$ をもつ．

$\hat{h} = (h_0, h_1, \cdots, h_s)$, $(h_0 = 1)$. $\hat{m}^{(0)} = (m_0, m_1, \cdots, m_s)$ を整数ベクトルとし $\hat{m} = (m_1, \ldots, m_s)$ とおく $\langle (\hat{\gamma}, \hat{m}) \rangle \geq b \|\hat{m}\|^{-a}$ と仮定し常数 $a, b$ は $s \geq a \geq 1$, $b > 0$ とする．ここで $\left| h_i/n - \gamma_i \right| \leq d n^{-1-g}$ $(d > 0$ 定数$)$ $(1 \leq i \leq s)$ とし $0 \leq g \leq \frac{1}{s} < 1$ とする．このとき正定数 $c(b, d, s) < 1$ があって区域 $\|\hat{m}^{(0)}\| \leq c(b, d, s) n^{\frac{1+g}{1+a}}$, $\hat{m}^{(0)} \neq 0$ に於て合同式 $(\hat{h}, \hat{m}^{(0)}) = \sum_{i=0}^{s} h_i m_i \equiv 0 \pmod{n}$ は解をもたない

ことが分るのである。かくて有理近似と偏差に関する次の定理4～6を得る。

定理4. 任意の整数ベクトル $\hat{m} \neq 0$ に対し $\langle(\hat{\gamma},\hat{m})\rangle \geqslant b\|\hat{m}\|^{-a}$ を仮定する。定数 $a, b$ は $1 \leq a \leq 1+\frac{1}{2s}$, $b>0$ とする。$\left|\frac{h_i}{n}-\gamma_i\right| \leqslant d n^{-1-g}$ $(1 \leq i \leq s)$ とする。$d, g$ は正定数で $0 \leqslant g \leqslant \frac{1}{s}$ とすると点列 $\left(\{\frac{k}{n}\},\{\frac{h_1 k}{n}\},\dots,\{\frac{h_s k}{n}\}\right)$ $(1 \leq k \leq n)$ は偏差 $\varphi(n)= c(b,d,s)\, n^{-(1+g)/(1+a)} (\log 3n)^{s+1}$ をもつ。

定理5 上記と同じ仮定のもとで点列 $P_n(k)=\left(\{\gamma_1 k\},\dots,\{\gamma_s k\}\right)$ $(1 \leq k \leq n)$ は偏差 $\varphi(n)=c(b,s)\, n^{-1+2s(a-1)} (\log 3n)^{1+s\delta_{1,a}}$ をもつ $\delta_{\alpha,\beta}$ は Kronecker の記号である。

更に同じ仮定のもとで

定理6. 整数 $q$ が $1 \leqslant q \leqslant n^{(1+g)/(2-2s(a-1))}$ のとき、点集合 $\mathfrak{P}\left(\{\frac{h_1 k}{n}\},\dots,\{\frac{h_s k}{n}\}\right)$ $(1 \leq k \leq q)$ は偏差 $\varphi(q) = c(b,d,s)\, q^{-1+2s(a-1)} (\log 3q)^{1+s\delta_{1,a}}$ をもつ。

[B]

$G_s \ni \hat{\gamma}$ とし、もし $P(k)=\left(\{\gamma_1 k\},\dots,\{\gamma_s k\}\right)$ $(1 \leq k \leq n)$ なる点集合は偏差 $\varphi(n)= c(\hat{\gamma},\varepsilon)\, n^{-1+\varepsilon}$ となるとき「佳点集合」といい「最佳分布点集合」ともいおう（定理1）又 $\hat{\gamma}$ を「佳点」という

定理4の不等式によれば、それに適合するベクトルの存在と具体的な構成問題とに佳点集合の構成問題は帰着される。

具体的に佳点を構成するのは最近のことで、この方面の結

果に関しては Roth の有名な結果を拡張した Thue-Siegel-Roth の定理（Schmidt 1970）や指数関数に関する有理近似についての結果（Baker 1965）が著しい。

定理7. $\hat{\alpha}=(\alpha_1,\dots,\alpha_s)$ とし $\alpha_i$ $(1\le i\le s)$ は一組の実代数的数とし，$1,\alpha_1,\dots,\alpha_s$ は有理数体上一次独立ならば，任意の整数ベクトル $\hat{m}\neq 0$ に対し $\langle(\hat{\alpha},\hat{m})\rangle > c(\hat{\alpha},\varepsilon)\|\hat{m}\|^{-1+\epsilon}$ となる

εは任意に与えられた正数。

定理8. $\hat{\beta}=(\beta_1,\dots,\beta_s)$ とし $\beta_i=e^{\gamma_i}$ $(1\le i\le s)$ であり，$\gamma_i$ $(1\le i\le s)$ は一組の相異なる非零有理数とすると，任意の整数ベクトル $\hat{m}$ に対し $\langle(\hat{\beta},\hat{m})\rangle > c(\hat{\beta},\epsilon)\|\hat{m}\|^{-1+\epsilon}$，$(\epsilon>0)$

これから

定理9. 点集合 $P(k)=(\{\alpha_1 k\},\dots,\{\alpha_s k\})$ $(1\le k\le s)$ は偏差 $\varphi(n)=c(\hat{\alpha},\varepsilon)\,n^{-1+\varepsilon}$ をもつ。

定理10. 点集合 $P(k)=(\{\beta_1 k\},\dots,\{\beta_s k\})$ $(1\le k\le n)$ は偏差 $\varphi(n)=c(\hat{\beta},\varepsilon)\,n^{-1-\varepsilon}$ をもつ。

さて，$\hat{h}=(h_1,\dots,h_s)$ とし有理ベクトル $\hat{h}/n=(h_1/n,\dots,h_s/n)$ に対し「格子点集合」$(\{\frac{h_1}{q}k\},\dots,\{\frac{h_s}{q}k\})$ $(1\le k\le n(\le q))$ が偏差 $\varphi(n)=c(s,\epsilon)\,n^{-1+\varepsilon}$ $(\varepsilon>0)$ をもつならば上記点集合は佳格子点集合といい $\hat{h}$ と $q$ とを $n=q$ のとき mod $q$ の極値係数という。

[C]

有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の $s$ 次代数体 $F_s=F/\mathbb{Q}=\mathbb{Q}(\alpha)$ とする。その実

共役体の個数を $r_1$ 個, 虚の共役の個数を $2r_2$ とし $s=r_1+2r_2$, $r=r_1+r_2$ とおく, $\gamma_i$ $(1\le i\le r)$ を $\sum_{i=1}^{r_1}\gamma_i+\sum_{j=1}^{r_2}2\gamma_j=0$ を満足する任意の実数の一組とする, このとき

定理 11. 不等式 $c^{-1}e^{\gamma_i}\le|\eta^{(i)}|\le ce^{\gamma_i}$ $(1\le i\le r)$ を満足する単数 $\eta\in F_s$ がある, ここに $c=c(F_s)$. 従ってまた任意の実数 $\gamma$ に対して $c^{-1}e^{\gamma}\le|\eta|\le ce^{\gamma}$ かつ $c^{-1}e^{-\frac{\gamma}{s-1}}\le|\eta^{(i)}|\le ce^{-\frac{\gamma}{s-1}}$ $(i\le i\le s)$ となる $\eta\in F_s$ がある. $c=c(F_s)$. これから

定理 12. 増大する単数列 $\eta_\ell$ $(\ell=1,2,\cdots)$ で $\eta_\ell>\ell$, $|\eta_\ell^{(i)}|\le c(F_s)\,\eta_\ell^{-\frac{1}{s-1}}$ $(2\le i\le s)$ となるものがある. $n_\ell=\sum_{i=1}^{s}\eta_\ell^{(i)}$ および $h_j^{(\ell)}=\sum_{i=1}^{s}\eta_\ell^{(i)}\omega_j^{(i)}$ $(1\le j\le s)$ とおくと $n_\ell$, $h_j^{(\ell)}$ はすべて $(1\le j\le s)$ 有理整数である. このとき次の整数底 $\omega_j$ の有理近似式が得られる:

$$\left|h_j^{(\ell)}/n_\ell-\omega_j\right|\le c(F_s)\,n_\ell^{-1-\frac{1}{s-1}}\qquad(1\le j\le s)$$

右辺は $\omega$ にも関係し指数は $-1-\frac{1}{s-1}-\varepsilon$, $\varepsilon>0$ には出来ない.

特に実円分体において, 素数 $p\geqslant 5$ とし $s=\frac{1}{2}(p-1)$ とおき $f(x)=x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+x+1=0$ の根 $e^{2\pi i\ell/p}$ $(1\le\ell\le p-1)$ とする. $Q_s=Q\left(\cos\frac{2\pi}{p}\right)$ は $s$ 次の完全(共役がすべて実となる)実代数体である. $s$ 次実円分体という. $\omega_\ell=2\cos\left(\frac{2\pi}{p}g^{\ell}\right)$ とおく, ここで $g$ は $p-1$ 中ではじめて $\equiv1 \bmod p$ ($p$ の原始根) $g^{p-1}\equiv1 \pmod p$ と云そう) $\Omega=[\omega_{i+j}]$ $(1\le i,j\le s)$, $S=\Omega'\Omega$ とおく. 前定理におけるように単数列を作り $\eta_0=\sum_{i=1}^{s}k_i^{(\ell)}\omega_i$ とお

く．$(h_1^{(l)}, \cdots, h_s^{(l)}) = (k_1^{(l)}, \cdots, k_s^{(l)})S$ で $h_i^{(l)}$ を $n_l = -\sum_{i=1}^{s} k_i^{(l)}$ で $n_l$ を定義する．このとき次の

定理 13. $\omega_i$ の有理近似式として $\left| h_i^{(l)}/n_l - \omega_i \right| < c(\mathbb{Q}_s) \cdot n_l^{-1-\frac{1}{s-1}}$ $(1 \leqq i \leqq s)$ を得る．

$p_1, \cdots, p_t$ を $t$ 個の相異る素数とする．$s = 2^t$ とし $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \cdots, \sqrt{p_t}) = D_s$ とし（実 Dirichlet 体という）ここでも上記の理論を具体化される．

[D]

$F_s = \mathbb{Q}(\alpha)$ は $s$ 次実代数体とし $\alpha$ は既約整係数方程式 $f(x) = x^s - a_{s-1}x^{s-1} - \cdots - a_1 x - a_0 = 0$ を満足し $\alpha(=\alpha^{(1)}) > 1$, $|\alpha^{(2)}| \leqq \cdots \leqq |\alpha^{(s)}| < 1$ をみたすものとする（このような数を Pisot - Vijayaraghavan 数という）$\rho = -\log|\alpha^{(s)}| / \log\alpha$ とおく．$S_l = \alpha^l + \alpha^{(2)l} + \cdots + \alpha^{(s)l}$ $(l = 1, 2, \cdots)$ とおいて $\left| S_{n+k}/S_n - \alpha^k \right| \leqq c(\alpha)\, S_n^{-1-\rho}$ $(1 \leqq k \leqq s-1)$ がえられるが更に $\mathbb{Q}(\alpha) \ni \xi$ を任意の数とし $Q_n = \sum_{i=1}^{s} \xi^{(i)} \alpha^{(i)n}$ とおくと回帰公式 $Q_n = a_{s-1}Q_{n-1} + \cdots + a_1 Q_{n-s+1} + a_0 Q_{n-s}$ をうる．$\hat{Q}_n = (Q_0, \cdots, Q_{s-1}) \neq \hat{0}$ である整数ベクトルとすると $1 \leqq k \leqq s-1$, $n > M(\hat{Q}, \alpha)$ に対し $|Q_n| > 1$, $\left| Q_{n+k}/Q_n - \alpha^k \right| \leqq c(\hat{Q}, \alpha)\, |Q_n|^{-1-\rho}$ をうる．$\omega_1 (=1), \omega_2, \cdots, \omega_s$ を $\mathbb{Q}(\alpha)$ の任意の一組の底とし $\omega_j = \sum_{k=1}^{s} t_{jk}\, \alpha^{k-1}$ $(2 \leqq j \leqq s)$ とすれば $t_{jk}$ $(2 \leqq j \leqq s, 1 \leqq k \leqq s)$ はすべて有理数である．$Q_n(j) =$

$\sum_{k=1}^{s} t_{jk} Q_{n+k-1} \quad (2 \leq j \leq s)$ で定義すると明かに $Q_n(j)$ は次の回帰公式

$$Q_n(j) = a_{s-1} Q_{n-1}(j) + \cdots + a_1 Q_{n-s+1}(j) + a_0 Q_{n-s}(j)$$

をもつ。ここで初期値 $Q_0(j), \cdots, Q_{s-1}(j)$ は $Q_0, \cdots, Q_{2s-2}$ と $t_{jk}$ によって確定している。そして次の定理を得る。

<u>定理14</u> $\left| Q_n(j)/Q_n - w_j \right| = O(|Q_n|^{-1-\rho}) \quad (2 \leq j \leq s)$

ここで $O$- 定数は $\hat{a}$, $\alpha$, $w_j^{\text{all}}$ に関係する。

これから次の定理を得る：

定理15. 点集合 $\left( \left\{\frac{k}{Q_n}\right\}, \left\{\frac{Q_n(2)}{Q_n} k\right\}, \cdots\cdots, \left\{\frac{Q_n(s)}{Q_n} k\right\} \right) \quad (1 \leq k \leq Q_n)$

は偏差

$$\varphi(Q_n) = c(\alpha, \varepsilon)\, Q_n^{-\frac{1}{2}-\frac{\rho}{2}+\varepsilon}$$ をもつ。

<u>定理16.</u> 点集合 $\left( \left\{\frac{Q_n(2)}{Q_n} k\right\}, \cdots\cdots, \left\{\frac{Q_n(s)}{Q_n} k\right\} \right) \quad (1 \leq k \leq g \leq Q_n^{\frac{1}{2}+\frac{\rho}{2}})$

は偏差

$$\varphi(g) = c(\alpha, \varepsilon)\, g^{-1+\varepsilon}$$ をもつ。

特に $s \geqq 2$ として $F(x) = x^s - x^{s-1} - \cdots - x - 1 = 0$ の最大根を $\eta \;(= \eta^{(1)})$ と他を $\eta^{(i)} \;(2 \leq i \leq s)$ とする。$\eta$ は PV-数になるが $2 - 2^{-(s-1)} < \eta < 2 - 2^{-s}$, $|\eta^{(i)}| \leq \eta - 1 \quad (2 \leq i \leq s)$ を得る。
$\hat{F} = (F_0, F_1 \cdots F_{s-1}) = (0, \cdots 0, 1) \quad (n \geqq s)$ とし $F_n(j) = F_{n+j-1} - F_{n+j-2} - \cdots - F_n \quad (2 \leq j \leq s)$ とおくと（広義 s-次元 Fibonacci 数という）（$s=2$ で普通の Fibonacci 数），$w_j = \eta^{j-1} - \eta^{j-2} - \cdots - \eta - 1 \quad (2 \leq j \leq s)$ であり次の関係を得る。

$$\left|\frac{F_n(j)}{F_n}-\omega_j\right| \le c(\eta)\,F_n^{-1-\frac{1}{2^s\log 2}-\frac{1}{2^{2s+1}}} \qquad (2\le j\le s).$$

これによって

定理17. 点集合 $\left(\left\{\frac{k}{F_n}\right\},\left\{\frac{F_n(2)}{F_n}k\right\},\cdots,\left\{\frac{F_n(s)}{F_n}k\right\}\right)$ $(1\le k\le F_n)$

は偏差

$$\varphi(F_n)=c(\eta)\,F_n^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{s+1}\log 2}-\frac{1}{2^{2s+1}}}$$

をもち，点集合 $\left(\left\{\frac{F_n(2)}{F_n}k\right\},\cdots,\left\{\frac{F_n(s)}{F_n}k\right\}\right)$, $1\le k\le q\le F_n^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{s+1}\log 2}+\frac{1}{2^{2s+1}}}$

は偏差

$$\varphi(q)=c(\eta,\varepsilon)\,q^{-1+\varepsilon} \quad \text{をもつ}$$

$s=2, 3$ では $c(\eta)F_n^{-1}(\log F_n)^2$, $c(\eta,\varepsilon)F_n^{-\frac{2}{3}+\varepsilon}$ の偏差をもつ.

[E]

一様分布と数値積分の間の関係は次の定理による.

定理18. $P_n(k)$ $(1\le k\le n)$ は偏差 $\varphi(n)$ の点集合とする. もし $f(\hat{x})$ が $S$-次元空間の点 $\hat{x}=(x_1,\cdots,x_s)$ の有界変動の関数とし $V(f)$ は $G_s$ での全変動とする. このとき

$$\left|\int_{G_s} f(\hat{x})\,d\hat{x}-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(P_n(k))\right| \le V(f)\,\varphi(n)$$

を得る. またもしこの不等式がすべての有界変動の関数について成立すれば $P_n(k)$ $(1\le k\le n)$ は偏差が $\varphi(n)$ を超える点集合となる.

かくて多くの積分近似公式が与えられることになる。

[F]

上記は

華羅庚，王元著：「数論在近似分析中的応用」（純粋数学と応用数学専著 第1号 [1978年，248頁，北京，科学出版社]

の簡単な紹介である．本書は1963年上記出版社刊の両氏著：「数値積分及其応用」160頁の改訂拡大版である．所謂数値積分法の数論的方法つまり一様分布集合の積分の近似計算への応用を上記[A]～[E]では原著の第1章から第5章までの一部を引用して紹介した．これらの章は特に両氏が1964年頃から最近まで活潑に進展されて来た所であり大変興味深い．くわしくは原著又は中国科学，科学通報 Scientia Sinica における原論文を参照していただきたい．

原著序において大変明解に数論的数値積分法の歴史その意味その位置づけ等のべられているがここでは一切省略させていただいた．

ベクトル $\hat{x}$ の記号は原著にはないが筆記の困難さの為にそのように記した．一部周知の記号もそのまま使用した．また文献も原著は親切であるがこれも略した．