数理解析研究所講究録
第371巻 1979年 78-82

不定方程式 $m^2 = \frac{1}{3}(n^3 + 2n)$ の解について

筑波大 数学 内山三郎

本稿の目的は標記の方程式の整数解 m, n の決定について報告することである．一松信教授（私信）によれば，この方程式は MacMahon の‘色つき三角形’に関する問題から生じたもので，$n \leqq 5000$ までの正整数解として $n = 1, 2$ および 24 しかないことが知られている． A. Baker の結果（1968）から，我々の方程式の解はすべて

$$0 \leqq n \leqq \exp\{(9 \cdot 10^6)^{10^6}\}$$

の範囲内にあることが分るが，この上界はあまりに大きい．我々は W. Ljunggren の結果 [1, 2] を用いることにより，問題の正整数解は実際に上記のものだけであることの証明ができる；即ち，標記の不定方程式の整数解は $n = 0, 1, 2$ および 24 によってあたえられるものだけである．

$n \equiv 0$, 1 または 2 (mod 3) に応じて 3 つの場合に分けて考察する．

(1) $n \equiv 0 \pmod 3$ なる解　$n = 3x$ とおけば $m^2 = x(9x^2+2)$ で $d = \mathrm{g.c.d.}(x, 9x^2+2) = 1$ または 2．若しxが奇数ならば $d = 1$ となり，$x = Y^2$，$9x^2+2 = X^2$，$\mathrm{g.c.d.}(X, Y) = 1$ でなければならない．　xを消去すれば $X^2 - 9Y^4 = 2$ を得るが，これは mod 3 で不可能である．よって，xは偶数，$d = 2$ となり，$x = 2Y^2$，$9x^2+2 = 2X^2$，$\mathrm{g.c.d.}(X, Y) = 1$．　xを消去すれば

$$X^2 - 18Y^4 = 1,$$

あるいは $X^2 - 2(3Y^2)^2 = 1$ を得る．

さて不定方程式 $u^2 - 2v^2 = 1$ の非負整数解は $u = u_{2m}$，$v = v_{2m}$ $(m = 0, 1, 2, \cdots)$ によってあたえられる．ここに

$$u_n + \sqrt{2}\, v_n = (1+\sqrt{2})^n \quad (n = 0, 1, 2, \cdots).$$

数列 u_n, v_n は

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 1, \quad u_{n+1} = 2u_n + u_{n-1} \quad (n \geqq 1),$$

$$v_0 = 0, \quad v_1 = 1, \quad v_{n+1} = 2v_n + v_{n-1} \quad (n \geqq 1)$$

で定まる．　次の関係は容易に示される：

$$\mathrm{g.c.d.}(u_m, v_m) = \mathrm{g.c.d.}(u_m, u_{2m}) = \mathrm{g.c.d.}(u_{2m}, v_m) = 1 \quad (m \geqq 0);$$

$$u_n^2 - 2v_n^2 = (-1)^n \quad (n \geqq 0);$$

$$u_{m+n} = u_m u_n + 2 v_m v_n \quad (m, n \geqq 0),$$

とくに　$u_{2n} = u_n^2 + 2v_n^2 \quad (n \geqq 0);$

$$v_{m+n} = u_n v_m + u_m v_n \qquad (m, n \geqq 0),$$

とくに $$v_{2n} = 2 u_n v_n \qquad (n \geqq 0).$$

これらにより先ず次の事実を知る：

$n \equiv 2 \pmod 4$ のとき，このときに限り $u_n \equiv 0 \pmod 3$,

$n \equiv 0 \pmod 4$ のとき，このときに限り $v_n \equiv 0 \pmod 3$.

さて $v_{4m} = 3Y^2$ $(m \geqq 0)$ とする． $v_{4m} = 4 u_m u_{2m} v_m$ に注意して3つの場合に分ける．

$m \equiv 0 \pmod 4$： この場合 $3 \mid v_m$ で

$$u_m = r^2, \quad u_{2m} = s^2, \quad v_m = 3t^2$$

でなければならない． r, s, t は $2rst = Y$ なる整数である． u_m, v_m のみたす関係式により

$$r^4 - 18t^4 = 1 \quad および \quad s^2 = r^4 + 18t^4$$

を得るが，t を消去すれば

$$s^2 = 2r^4 - 1.$$

Ljunggren [1; §2] によればこの不定方程式の正 (i.e. 非負) 整数解 r, s は

$$(r, s) = (1, 1) \quad および \quad (13, 239)$$

だけであって，前者からは $t = 0$, $v_m = 0$, $m = 0$, $Y = 0$, 従って $x = 0$ を得，後者は我々の要求をみたさない (即ち対応する解 x がない)． 解 n は 0 だけである．

$m \equiv 2 \pmod 4$： この場合 $3 \mid u_m$ で

$$u_m = 3r^2, \quad u_{2m} = s^2, \quad v_m = t^2 \qquad (2rst = Y)$$

を得て，これから　$s^2 = 9r^4 + 2t^4$　なる mod 3 で不可能な式に達する．

$m \equiv 1 \pmod 2$：　この場合は $3 \mid u_{2m}$ で

$$u_m = r^2, \quad u_{2m} = 3s^2, \quad v_m = t^2 \qquad (2rst = Y)$$

となり，関係

$$r^4 - 2t^4 = -1 \quad \text{および} \quad 3s^2 = r^4 + 2t^4,$$

従ってとくに

$$3s^2 - 2r^4 = 1$$

を得るが，Ljunggren [2; Satz II] によればこの方程式は高高1つの正整数解 r, s をもつ．よって $r = s = 1$ がその唯一の解でこれにより $t = 1$，$u_m = v_m = 1$，$m = 1$，$v_{4m} = v_4 = 12$，解 $n = 6Y^2 = 2v_4 = 24$ を得る．

(2) $n \equiv 1 \pmod 3$ なる解　$n = 3x + 1$ とおく．(1) におけると同様の考察により　$3x + 1$ は奇数で g.c.d.$(3x+1, 3x^2 + 2x + 1) = 1$ から　$3x + 1 = Y^2$，$3x^2 + 2x + 1 = X^2$，g.c.d.$(X, Y) = 1$，とおくことにより，x を消去して

$$3X^2 - Y^4 = 2$$

を得る．

(3) $n \equiv 2 \pmod 3$ なる解　$n = 3x - 1$ とおくと，(1)，(2) と同様にして $3x - 1$ は偶数，$3x - 1 = 2Y^2$，

$3x^2 - 2x + 1 = 2X^2$, g.c.d.$(X, Y) = 1$, でなければならないことを知る。 よって x を消去すれば

$$3X^2 - 2Y^4 = 1$$

となる。

さて、(2) および (3) における方程式は Ljunggren [2; Satz II] により、いずれも高々1つの正整数解 X, Y をもつ。よって $X = Y = 1$ がこれらの方程式の唯一の正整数解である。 これにより (2) の場合から解 $n = Y^2 = 1$, (3) の場合から解 $n = 2Y^2 = 2$ が導かれる。

(附記)

実験整数論予稿集 [3] に記したように、上記 (2), (3) の各場合にも、不定方程式 $m^2 = \frac{1}{3}(n^3 + 2n)$ の解 n の候補としての整数列を定めることができる。 これらを用いても本稿の結論を導くことができるが、これらの数列は、少くとも、実験的に解を見出すこと(あるいはある限界までに(他のものは)ないことを見るために)に用いられよう。

文　　献

[1] W. Ljunggren: Zur Theorie der Gleichung $x^2 + 1 = Dy^4$. Avh. det Norske Vid.-Akad. Oslo I. Mat.-Naturvid. Klasse (1942), Nr. 5.

[2] W. Ljunggren: Ein Satz über die diophantische Gleichung $Ax^2 - By^4 = C$ $(C = 1, 2, 4)$. Tolfte Skandinaviska Matematikerkongressen i Lund (1953), pp. 188 - 194.

[3] 内山三郎: 不定方程式 $m^2 = \frac{1}{3}(n^3 + 2n)$ の解について. 実験整数論予稿集 (1979. 10.15～10.17), pp. 11～12.