数理解析研究所講究録
第 371 巻 1979 年 106-116

$x^x \cdot y^y = z^z$ の整数解について

佐藤大八郎(Univ. of Regina)
一松 信 (京大・数理研)

0. はじめに

この報告は，標記の方程式に関する佐藤のノート(実質は文献[3]の線)を一松が整理したものである．じつは実験整数論にふさわしく，計算機によって未解決の $4xy < z^2$ の場合の解の探索や限界の評価を試みる予定であったが，結局そのための準備的考察に終った。しかし余り知られていないこの方程式に関する入門として記録した。

1. 歴史的経過

一見解がなさそうな(また Erdős がそう予想した)

$$x^x \cdot y^y = z^z \qquad (x, y, z > 1) \tag{1}$$

に無限に解があることを発見したのは，中国の Chao Ko[1] (柯召)である．彼の解(後述)はすべて代数的関係

$$4xy = z^2 \tag{2}$$

を満すが，逆に $4xy \geqq z^2$ を満す解は柯の解しかない

ことが証明されている。未解決の問題は，$4xy < z^2$ の解が存在するか？ である。佐藤は無いと予想している。これが正しければ，超越方程式 (1) の整数解が，代数方程式 (2) でつくされる点に興味がある。

Schinzel [2] は中国での講義録であり，一般には [3]，[4] によって知られるようになった。

2. 方程式の還元

一般性を失うことなく，$x \geqq y$ とする．（後に $x \neq y$ がわかる．）(1) の解について

(3) $s = x/z, \quad u = y/z \qquad (0 < u \leqq s < 1)$

とおくと，$z = (s^s u^u)^{-1/(s+u-1)}$ である．さらに

(4) x, y の G.C.D を D，$\alpha = x/D$，$\beta = y/D$，

$\gamma = z/D, \qquad \Delta = \alpha + \beta - \gamma$

とおく．また $\Omega = xy/z^2 = su$ とする。

補助定理1. $x + y > z$，すなわち $\Delta > 0$

証明 $(x+y)^{x+y} > x^{x+y} \geqq x^x y^y = z^z$.

n^n は $n\ (\geqq 1)$ において狭義の増加だから $x + y > z$.

系1. γ は整数である．

証明 $D^{x+y} \mid x^x y^y = z^z \mid z^{x+y}$. ゆえに $D \mid z$ である．

系2．$x \neq y$ である．したがって $x>y$ としてよい．

証明．Dで割って $\alpha+\beta>\gamma>\alpha\geqq\beta$ である．γは整数だから，$\beta\geqq 2$ である．しかしαとβは互いに素だから，$\alpha=\beta$ではありえない．したがって $x\neq y$ である．

補助定理2　$s^s u^u > [(s+u)/2]^{s+u}$

証明　$g(t)=t\log t$ $(t>0)$ は $g''(t)=1/t>0$ なので凸である．したがって $g(x)+g(y)>2g((x+y)/2)$ である．これを増加函数 e^{ξ} に代入すれば，$x^x y^y > [(x+y)/2]^{x+y}$ となり，両辺を z 乗に開いて z^{s+u} で割ればよい．

補助定理3　$z^{s+u-1}<2$，つまり $(\gamma D)^{\Delta}<2^{\gamma}$．

証明．$f(t)=t^{x+y}/2^t$ （x,y を固定）の対数微分をとると，$0<t<x+y$ において

$$f'(t)=\left(\frac{x+y}{t}-\log_e 2\right)f(t)>0 \quad (\log_e 2<1)$$

なので $f(t)<f(x+y)$ である．$x+y>z$ なので

$$(x+y)^{x+y}/2^{x+y} > z^{x+y}/2^{z}$$

である．これを整理して補助定理2を使うと

$$z^z=x^x y^y>[(x+y)/2]^{x+y}>z^{x+y}\cdot 2^{-z}$$

すなわち $z^{x+y-z}<2^z$ である．これをz乗に開く．(終)

(5)　α,γ のG.C.Dを d；β,γ のG.C.Dを δ

$$a=\alpha/d,\quad b=\beta/\delta$$

とおく．

定理1. $\gamma = d\delta$, $z = Dd\delta$

証明. $\alpha = ad$ と $\beta = b\delta$ とは互いに素だから a, b; a, δ; d, b; d, δ はすべて互いに素である. γ は d, δ の公倍数だから $\gamma = cd\delta$ (c は整数) である. $c = 1$ を示せばよい. 定義から $s = a/c\delta$, $u = b/cd$ は既約分数であり, c は a とも b とも互いに素である. そして

(6) $\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}D^{\Delta} = \gamma^{\gamma} = (cd\delta)^{\gamma}$

に代入すると, (6′) $c^{\gamma}d^{\gamma-\alpha}\delta^{\gamma-\beta} = a^{\alpha}b^{\beta}D^{\Delta}$ だから, $c^{\gamma} \mid D^{\Delta}$ となる. 補助定理3から $D^{\Delta} < 2^{\gamma}$ なので $c^{\gamma} < 2^{\gamma}$ つまり $c < 2$ である. c は正の整数だから $c = 1$ である (終)

系. $s = a/\delta$, $u = b/d$ が既約分数表示である.

意味は後に述べるが, ここで便宜上

(7) $r = d/a$, $S = b/\delta$ (有理数)

とおく. 定義から $xy/z^2 = su = S/r$ である. なお r が整数になることは, 後に証明する.

3. 柯(Ko) の解

[redacted]の解[1] は試行錯誤で求められたらしいが, データは次のとおりである:

(8) $r = 4$, $S = 1$, $a = 2^n$, $d = ra = 2^{n+2}$,

$\alpha = ad = 2^{2n+2}$, $b = \delta = 2a - 1 = 2^{n+1} - 1$, $\Delta = 1$

$\gamma = d\delta = 2^{n+2}(2^{n+1} - 1)$, $\beta = b\delta = (2^{n+1} - 1)^2$

$$D = 2^{(\delta-1-n)d}\,\delta^{2\delta} = 2^{(2^{n+1}-2-n)2^{n+2}} \cdot (2^{n+1}-1)^{2(2^{n+1}-1)}$$

$$x=\alpha D,\quad y=\beta D,\quad z=\gamma D, \qquad su=1/4$$

である． $(n=1, 2, 3, \cdots)$

初めの方の具体的な数字は次のとおりである：

n	x	y	z	D_n	~~Zの10進~~桁数
1	$16D_1$	$9D_1$	$24D_1$	$2^8\cdot 3^6$	7
2	$64D_2$	$49D_2$	$112D_2$	$2^{64}\cdot 7^{14}$	33
3	$256D_3$	$225D_3$	$480D_3$	$2^{352}\cdot 15^{30}$	143

この$n=1$が（あらゆる意味で）最小の解，$n=2$が2番目に小さい解であることが知られている．ただし$n=3$が3番目に小さい解であるか（つまり143桁以下に他の解がないか）どうかは未知である．あるとすれば，前記の佐藤の予想は正しくなく，新しい無限列の初りと期待される．（もっとも散発的な有限個の解である可能性もみられる．）

4. 諸量の評価

定理2. Δは奇数である．

証明. α, βは互いに素である．もしも共に奇数なら，その約数のd, δも奇数だからγもそう；ゆえに$\Delta=\alpha+\beta-\gamma$は奇数；$\alpha, \beta$の一方が偶数なら，他は奇数で，$\gamma^\gamma=\alpha^\alpha\beta^\beta$は偶数だから，やはり$\Delta$は奇数である．

補助定理4. $\Delta<\delta$, $\Delta<d$ である.

証明. $y^\beta = z^\gamma/x^\alpha = z^{d\delta}/x^{da} = (z^\delta/x^a)^d$

だから, y^β は d 乗数である. β と d とは互いに素だから, z^δ/x^a は整数であり, $y \geqq 2^d$ である. ゆえに

$$2^{d\Delta} \leqq y^\Delta < z^\Delta < 2^\gamma \text{(補助定理3)} = 2^{d\delta}$$

したがって $\Delta<\delta$ である. 式の形は対称だから, 同様にして $\Delta<d$ が示される.

補助定理5 $s>1/2$ $\delta \geqq 3$ である. なお $2a>\delta$ である.

証明. $2ad = 2\alpha > \alpha+\beta > \gamma = d\delta > \alpha = ad$

から $2a>\delta>a$. ゆえに $a \geqq 2$, $\delta \geqq 3$ である. また $s = a/\delta > 1/2$ である.

系1. $a|d$, すなわち γ は整数である. かつ $a^\alpha | d^{\gamma-\alpha}$.

証明. $2\alpha>\gamma>\alpha$ から $\alpha>\gamma-\alpha$. しかし定義から

$$a^\alpha b^\beta D^\Delta = d^{\gamma-\alpha}\ \delta^{\gamma-\beta}$$

であり, a と δ は互いに素だから $a^{\gamma-\alpha} | a^\alpha | d^{\gamma-\alpha}$. ゆえに $a|d$ である. しかも $a \geqq 2$ で $a^{\gamma-\alpha}<a^\alpha$ だから, $a<d$.

系2 $\gamma \geqq 2$, $a \geqq 2$, $d = \gamma a \geqq 4$. (上に含まれる)

系3. $u<1/2$ である.

証明. $2b\delta - d\delta = 2\beta-\gamma < \alpha+\beta-\gamma = \Delta < \delta$

から $2b<1+d$, すなわち $2b \leqq d$. しかし b と d とは互いに素だから $d \neq 2b$ であり, $u = b/d < 1/2$ である.

つぎに(7)の S を考察する。S が整数，あるいは K_0 の解のように $S=1$ が証明できると望ましいが，現在のところそれはできない．しかし以下のようにして，S を既約分数に表示したとき，分母が高々3であることは証明できる．

b, δ の G.C.D. を m とし

(9) $\qquad \delta = mP, \quad b = mL$

とおく．前の諸定義から，L, P；P, r；L, r；r, δ は互いに素であることに注意する．

<u>補助定理6</u>．P は1，2，3 のいずれかである．

<u>系</u>．$S=b/\delta=L/P$（既約分数）だから，S の分母 $\leqq 3$．

証明．補助定理3から $D^{\Delta}<2^{\gamma}$；また(6′)と a, δ が互いに素なことから（そして補助定理5系3により $\gamma-2\beta>0$ なので）

$$\delta^{\gamma-\beta} \mid b^{\beta} D^{\Delta} \quad つまり \quad P^{\gamma-\beta} m^{\gamma-2\beta} \mid L^{\beta} D^{\Delta},$$

そして L, P は互いに素だから $P^{\gamma-\beta} \mid D^{\Delta}$，したがって

(10) $\qquad P^{\gamma-\beta} \leqq D^{\Delta} < 2^{\gamma} < 2^{2(\gamma-\beta)} \qquad (\gamma-2\beta>0$ による$)$

となり，$P<4$ である（終）なお(10)から，$u<1-\log 2/\log 3 = 0.36907\cdots$ ならば，$P<3$ すなわち $P=1$ または 2 となる．つまり <u>$P=3$ は，u がかなり $1/2$ に近いときに限る</u>。

L の上限に関する評価がえられると有用である．（村の解では $L=P=1$ である．）

5. $\Omega \geqq 1/4$ の解が，柯の解に限ることの証明．

定義から，Δ は

(10) $$\Delta = \alpha+\beta-\gamma = ra^2 - ra\delta + s\delta^2$$

と，r, s の2次式で表現され，その判別式は $r(r-4s)$ である．したがってその負，0，正は，それぞれ $4xy >=< z^2$ に相当する．($\Omega = xy/z^2$)

<u>定理3.</u> $4xy > z^2$ である解は存在しない．

証明．(Mills [3] に基く．もっと簡単に証明できるかもしれない)．(10′) $4\Delta = r(2a-\delta)^2 + (4s-r)\delta^2$

であるが，補助定理4，5から $(\delta-2)^2 > 0$，すなわち

(11) $4\Delta \leqq 4(\delta-1) < \delta^2$ から $4s - r < 1$．((10′)と比較)

ゆえに $4s-r > 0$ ならば，$4s-r$ は整数ではなく，s の分母 P は3に限る．ゆえに $4s-r \geqq 1/3$ である．

δ が奇数なら，定理2により $\Delta \leqq \delta-2$ なので，補題5系2 ($r \geqq 2$) により，(10′) から ($2a-\delta \neq 0$)

$4(\delta-2) \geqq 4\Delta \geqq 2+\delta^2/3$，整理して $(\delta-6)^2 \leqq 6$．

しかし $P|\delta$ で，δ は3の倍数だから，該当する奇数の δ はない．δ を偶数とすれば，δ は6の倍数になる．(それと互いに素な $r(\geqq 2)$ は $r \geqq 5$ となる．) 補助定理5から，$|2a-\delta| \geqq 2$ なので，

$4(\delta-1) \geqq 4\Delta \geqq 5\times 2^2 + \delta^2/3$，整理して $(\delta-6)^2+36 \leqq 0$

となり，不可能である．(終)

定理4　$4xy=z^2$ である解は柄の解に限る.

証明　このときは, 定義から $rP=4L$ であるが, L は r とも P とも互いに素だから, $L=1$, $rP=4$ でなければならない. しかし r と P も互いに素で, $P\leqq 3$ だから, $P=1$, $r=4$ である. そして $\Delta=(2a-\delta)^2$ である. (したがって δ は奇数である.)

さて補助定理5系1により, $r=4$ を使うと

$$a^\alpha \mid d^{\gamma-\alpha}=r^{\gamma-\alpha}a^{\gamma-\alpha} \text{ から } a^{2\alpha-\gamma}\mid r^{\gamma-\alpha}$$

となる. $a\geqq 2$ だから, a は2の累乗 2^n でなければならない. そして $d=4a=2^{n+2}$, $\alpha=ad=2^{2n+2}$ である.

a は b, δ と互いに素だから b, δ は奇である. $D=2^\nu M$ (M:奇) とすると, $a^\alpha b^\beta D^\Delta=d^{\gamma-\alpha}\delta^{\gamma-\beta}$ から2の指数を拾って $a^\alpha 2^{\nu\Delta}=d^{\gamma-\alpha}$, すなわち $d^{2\alpha-\gamma}2^{\nu\Delta}=2^{2\alpha}$ をうる. $2\alpha-\gamma=(2a-\delta)d$, $\Delta=(2a-\delta)^2$ だから, $(2a-\delta)\mid 2\alpha=2^{2n+3}$ となるが, $2a-\delta$ は正の奇数だから $=1$, $\Delta=1$, $\delta=2^{n+1}-1$ をうる. $P=1$, $L=1$ から $b=\delta$ であって, これは3. に述べた柄の解である. (終)

6. 試行錯誤

残された場合は, $4xy<z^2$, すなわち $r-4S>0$ の場合である. (11) はこのときも正しいが, $4S-r<1$ は左辺が

負では，なんら制限にならない．

この場合に解があるか，という問題のほかに，さらに x, y, z が奇数の解があるか（あるとすればこの場合のみ）という問題もある．柯のまねをして，$\alpha = p^A$，$\beta = q^B$，$\Delta = 1$，$\gamma = p^C \cdot q^E = \alpha + \beta - 1$，（$p, q$ は奇数；必ずしも素でない）となる場合があるかどうか計算機で少し探してみたが，α, β が単長整数に収まる範囲（34 ビットまで）の中には，次の2個しかなかった：（左辺が $\alpha+\beta-1$，右辺が γ）

$$3^3 + 13 - 1 = 3 \times 13 ; \quad 3^5 + 11^2 - 1 = 3 \times 11^2$$

しかしいずれも $D = \gamma^\gamma / \alpha^\alpha \beta^\beta$ が整数にならず，(1) の解にはならない．（$3^5 = 2 \times 11^2 + 1$ は特異な素数冪の関係である．）

一応の感じでは，たぶん $\Omega < 1/4$ である解はないが，万一あっても散発的な有限個と思われる．4．末の注意により，$\Omega < 0.1845\cdots$ ならば，S の分母は 1 か 2 となり，$r > 2L$ と狭められる（さらに S の範囲が 1 に近く限定される）ので，この場合をまず検討してみるべきかもしれない．

付記．本研究会でも多くの方が指摘していたが，本当の "Digital" 計算（末位まで完全）が 1000 ビット分くらい自由にできる Digital 計算機が，実験整数論用には至急ほしいことを痛感した．

参考文献

[1] Ko, Chao, Note on the Diophantine equation $x^x y^y = z^z$, J. Chinese Math. Soc. 2 (1940), pp.205-207

[2] Schinzel, A. Sur l'équation diophantine $x^x y^y = z^z$, Acta Sc.Nat. Univ. Szechuan 1958, pp.81-83 (Chinese)

[3] Mills, W.H., An unsolved Diophantine equation, report of the Institute of Number Theory, Boulder, Colorado, 1960, pp.258-268.

[4] Sierpinski, W., Elementary theory of numbers, Panstwowe Wydawnictowo Naukowe, 1964, pp.108-109.

[5] Sato, Daihachiro, Memorundum on the Diophantine equation $x^x y^y = z^z$; $x, y, z > 1$, 1979 Oct. 3, private communication.