数理解析研究所講究録
第 372 巻 1979 年 1-16

複素解析空間上の formal Poincaré and Dolbeault 補題について

京大 数理研 藤木 明

X を複素多様体，Y を X の解析的部分集合，$U = X - Y$，$j: U \to X$ を包含写像とする。また $\Omega_X^\cdot$，$\mathcal{E}_X^\cdot$ を各々 X 上 holomorphic，また(は) C^∞ の，de Rham 複体とする。$\mathcal{I}$ を X 内での Y の定義イデアル，$\bar{\mathcal{I}}$ を $\mathcal{I}$ の(複素)共役とし，$\mathcal{J} = (\mathcal{I} + \bar{\mathcal{I}})\mathcal{E}_X$，($\mathcal{E}_X = \mathcal{E}_X^0$ は X 上複素数値 C^∞ 関数の層) とおく。 この時，$\Omega_X^\cdot$，$\mathcal{E}_X^\cdot$ の Y に沿っての完備化，$\hat{\Omega}_X^\cdot$，$\hat{\mathcal{E}}_X^\cdot$ を次のように定義する。

$$\hat{\Omega}_X^\cdot = \varprojlim \Omega_X^\cdot/\mathcal{J}^{n+1}\Omega_X^\cdot, \qquad \hat{\mathcal{E}}_X^\cdot = \varprojlim \mathcal{E}_X^\cdot/\mathcal{J}^{n+1}\mathcal{E}_X^\cdot$$

この時次が成立する。

定理 1. $\quad 0 \to \mathbb{C}_Y \to \hat{\mathcal{E}}_X \xrightarrow{d} \hat{\mathcal{E}}_X^1 \to \hat{\mathcal{E}}_X^2 \to \cdots\cdots$

は $\mathbb{C}_Y$ の resolution を与える，つまり上の列は完全列。ここに $\mathbb{C}_Y$ は Y の $\mathbb{C}$ をファイバーとする constant sheaf.

同様に formal Dolbeault complex

$$\hat{\mathcal{E}}_X^{0,\cdot} = \varprojlim \mathcal{E}_X^{0,\cdot}/\mathcal{J}^{n+1}\mathcal{E}_X^{0,\cdot}$$

を考えると，

<u>定理2.</u> $0 \to \hat{\mathcal{O}}_X \to \hat{\mathcal{E}}_X^{0,1} \to \hat{\mathcal{E}}_X^{0,2} \to \hat{\mathcal{E}}_X^{0,3} \to \cdots\cdots$

は $\hat{\mathcal{O}}_Y$ の resolution を与える。 $(\hat{\mathcal{O}}_X = \hat{\Omega}_X^0)$

定理1,2をあわせて直ちに次の系を得る。

<u>系.</u> $0 \to \mathbb{C}_Y \to \hat{\mathcal{O}}_X \to \hat{\Omega}_X^1 \to \hat{\Omega}_X^2 \to \cdots\cdots$ (formal analytic Poincaré lemma). Sasakura[11], Hartshorne[4].

今 $\mathcal{J}^\infty \mathcal{E}_X^\cdot = \varprojlim_n \mathcal{J}^{n+1}\mathcal{E}_X^\cdot = \bigcap_n \mathcal{J}^{n+1}\mathcal{E}_X^\cdot$ とおくと実は定理1より詳しく次が成立する。

<u>定理1'.</u> 次の可換図式が存在し、各行は完全列、かつ下行は上行の resolution を与える。

$$(1)\qquad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & j_!\mathbb{C}_U & \longrightarrow & \mathbb{C}_X & \longrightarrow & \mathbb{C}_Y & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & \mathcal{J}^\infty\mathcal{E}_X^\cdot & \longrightarrow & \mathcal{E}_X^\cdot & \longrightarrow & \hat{\mathcal{E}}_X^\cdot & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

(ここに $j_!$ は direct image with proper supports, 従って $j_!\mathbb{C}_U$ は定数層 $\mathbb{C}_U$ を Y 上零とおいて X に拡張したものに他ならない。)

<u>注意 1.</u> 定理2に対応する図式は次のようになる。

$$(2)\qquad \begin{array}{ccccccccccc} 0 & \to & j_!\mathcal{O}_U & \longrightarrow & \mathcal{O}_X & \longrightarrow & \hat{\mathcal{O}}_X & \longrightarrow & \hat{\mathcal{O}}_X/\mathcal{O}_X & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ 0 & \to & \mathcal{J}^\infty\mathcal{E}_X^{0,\cdot} & \longrightarrow & \mathcal{E}_X^{0,\cdot} & \longrightarrow & \hat{\mathcal{E}}_X^{0,\cdot} & \longrightarrow & 0 & & \end{array}$$

よって、定理2は、$\mathcal{H}^0(\mathcal{J}^\infty\mathcal{E}_X^{0,\cdot}) \cong j_!\mathcal{O}_U$, $\mathcal{H}^1(\mathcal{J}^\infty\mathcal{E}_X^{0,\cdot}) \cong \hat{\mathcal{O}}_X/\mathcal{O}_X$, $\mathcal{H}^i(\mathcal{J}^\infty\mathcal{E}_X^{0,\cdot}) = 0$, $i \geq 2$ を意味し、逆にこれは定理2を帰結する。

<u>注意 2.</u> Y が各点で局所既約なら $\mathcal{J} = \{\phi \in \mathcal{E}_X;\ \phi(y) = 0\ \ \forall y \in Y\}$, つまり Y 上消える C^∞ 函数の全体。(cf. Kantor[7], Malgrange[8])

証明は次の2段階にわかれる。

Step 1: Y が X 内で divisor with normal crossings の場合に具体的な構成によって定理を示す。

Step 2. 一般の場合は, $f:\tilde{X}\to X$ なる固有双有理形写像で, $\tilde{X}$ 非特異かつ $\tilde{Y}=f^{-1}(Y)$ とおく時 イ) $f|_{\tilde{X}-\tilde{Y}}:\tilde{X}-\tilde{Y}\cong X-Y$, ロ) $\tilde{Y}=f^{-1}(Y)$ が $\tilde{X}$ 内で divisor with normal crossings をなす, の2条件をみたすものをとり (cf. Hironaka [6]), $(\tilde{X},\tilde{Y})$ に対する結果 (Step 1) から (X,Y) に対する結果を導く。

以下 Step 2 について述べる。

まず問題は局所的であるから, X は $\mathbb{C}^m=\mathbb{C}^m(z_1,\cdots,z_m)$ の開集合とみなしてよい。さらに $z_i=x_{2i-1}+\sqrt{-1}\,x_{2i}$ とおいて $\mathbb{C}^m$ を $\mathbb{R}^{2m}=\mathbb{R}^{2m}(x_1,\cdots,x_{2m})$ と同一視する。ここでもちろん $\dim_{\mathbb{C}}X=m$. $n=2m$ とおき $I=(i_1,\cdots,i_n)$ で整数 $i_\alpha\geqq 0$ の n 組を表す。$|I|=\sum_\alpha i_\alpha$ とおく。

定義 1. [8, I, Def. 2.3] a) 整数 $k\geqq 0$ に対し, Whitney の意味での Y 上の C^k 関数の層 ${}_k\tilde{\mathcal{E}}_Y$ を次の前層より定める: V を Y の任意の開集合とする時, ${}_k\tilde{\mathcal{E}}_Y(V)=\{(g_I)\,;\ |I|\leqq k,\ g_I$ は Y 上の連続関数で以下に述べる条件(#)をみたす$\}$。 b) $\tilde{\mathcal{E}}_Y=\varprojlim_k {}_k\tilde{\mathcal{E}}_Y$ とおき Y 上の (Whitney の意味での) C^∞ 函数の層という。(${}_k\tilde{\mathcal{E}}_Y$ の定義から自然にそれらが射影的系をなすことがわかる。)

さて条件(#)を説明する。まず任意の $y\in Y$ と Y 上の連続関数

の組 $G=(g_I)$ に対し，多項式 $T_y^kG(x)$ を式

$$T_y^kG(x)=\sum_{|I|\leq k}(x-y)^I/I!\,g_I(y)$$

で定義する。ここに $(x-y)^I=\prod_\alpha(x_\alpha-y_\alpha)^{i_\alpha}$，$I!=i_1!\cdots i_n!$。この T_y^kG を用いて $R_y^k(G)=(R_y^k(G)_I)$，$|I|\leq k$，を式

$$R_y^k(G)_I=g_I-\partial^I(T_y^kG)/\partial x^I$$

により定義する。この時条件(#)とは

(#) $\forall I$ に対し $|R_y^k(G)_I(x)|=o(|x-y|^{k-|I|})$ $\forall x,y\in Y$，$|x-y|\longrightarrow 0$

定義により，自然写像 $r:\mathcal{E}_X\to\tilde{\mathcal{E}}_Y$ が存在する。実際，$r(h)=(\partial^Ih/\partial x^I)_I$ とすればよい。今 r の核を $\mathcal{E}_{X,Y}$ と表す。明らかに，$\mathcal{E}_{X,Y}$ は X 上の C^∞ 函数で，Y の各点で任意階の導関数が零になるもの，つまり flat along Y なるものの全体を表す。

<u>定理</u>(Whitney)［8，I，Th. 4.1］ r は全射であり従って次は完全列である。

(3) $\quad 0\to\mathcal{E}_{X,Y}\to\mathcal{E}_X\to\tilde{\mathcal{E}}_Y\to 0$

さて我々の第1の observation は，(1)の下行($\cdot=0$)が(3)と自然に同形になり従って上の Whitney の定理により完全列となることである。まず定義から自然な包含写像 $\iota:\mathcal{J}^\infty\mathcal{E}_X\longrightarrow\mathcal{E}_{X,Y}$ が存在することに注意する。ι がさらに全射でもあることは，次の Malgrange の定理よりの結論である。

<u>定理</u>(Malgrange)［8，VI，Th. 1.1′］ U を $\mathbb{R}^n$ の開集合，$f_1,\cdots,f_b$

を U 上の実解析関数, ϕ を U 上の C^∞ 関数とする。この時次は同値である。 1) $\exists\,\psi_i$, $1\le i\le b$, C^∞ 関数 on U s.t. $\phi=\sum_{i=1}^{b}\psi_i f_i$

2) 各 $u\in U$ に対し，$T_u\phi$, T_uf_i を u における ϕ, f_i の Taylor 級数, $\{T_uf_i\}$ を u における形式的巾級数環 $\hat{\mathcal{O}}_{U,u}$ 内において T_uf_i の生成するイデアルとする。この時 $T_u\phi\in\{T_uf_i\}$ $\forall u\in U$.

実際 もし $h_1=\cdots=h_d=0$ が X における Y のイデアル層の生成元とする時, $\{f_i\}=\{\mathrm{Re}\,h_j, \mathrm{Im}\,h_k\}$ とおけば, $\{T_uf_i\}=\mathcal{O}_{X,u}$, $\forall u\in X$, が成立し, (あるいはもっと一般に, h_j 達の共通零点が Y と一致するならば, 同様のことが成立し), また一方 $\phi\in\mathcal{E}_{X,Y}$ ならば, $T_u(\mathrm{Re}\,\phi)=T_u(\mathrm{Im}\,\phi)=\{0\}$, $\forall u\in Y$, が成立するから, 上の定理により, $\mathrm{Re}\,\phi$ 及び $\mathrm{Im}\,\phi$ が, 従って ϕ が h_i 及び $\bar{h}_j$ の一次結合でかける。よって $\phi\in J^\infty\mathcal{E}_X$ である。

さてこの同形性により自然写像 $\hat{\mathcal{E}}^{\cdot}_Y\to\hat{\mathcal{E}}^{\cdot}_X$ が存在する。これを β とすると β は単射である。次に逆写像 $\gamma=\beta^{-1}:\hat{\mathcal{E}}^{\cdot}_X\to\tilde{\mathcal{E}}^{\cdot}_Y$ を構成しよう。$\varphi\in\hat{\mathcal{E}}^{\cdot}_X$ をとり $\varphi=(\varphi_m)_m$, $\varphi_m\in\mathcal{E}^{\cdot}_X/J^{m+1}\mathcal{E}_X$, とおき, $\tilde{\varphi}_m\in\mathcal{E}_X$ を勝手な拡張とする。この時 $\gamma(\varphi)=(\partial^I\tilde{\varphi}_m/\partial x^I)_I$, $m=|I|$, $0\le m<\infty$, とおくと $\gamma(\varphi)$ は $\tilde{\varphi}_m$ の取り方によらず $\tilde{\mathcal{E}}_Y$ の well-defined な元を定めることが容易にわかる。$\gamma=\beta^{-1}$ なることも構成から明白である。よって我々は(1)下列の完全性を得た。

従って定理1'の主張を得るには, $J^\infty\mathcal{E}^{\cdot}_X=\mathcal{E}^{\cdot}_{X,Y}$ が $j_!\mathbb{C}_U$ の resolution であることを示せばよい。最初に

<u>補題 1.</u> $f: \tilde{X} \to X$ を Step 2 のとおりとする時次が成立。

$$f_* \tilde{\mathcal{J}}^\infty \mathcal{E}^{\cdot}_{\tilde{X}} = \mathcal{J}^\infty \mathcal{E}^{\cdot}_X .$$

ここに $\tilde{\mathcal{J}} = (\mathcal{J} + \bar{\mathcal{J}})\mathcal{E}^{\cdot}_{\tilde{X}}$, $\tilde{\mathcal{J}}$ は $\tilde{Y}$ の定義イデアルの層。

<u>証明.</u> D を X 上の任意の微分作用素とする。この時任意の $\tilde{x} \in \tilde{X}$ に対し $\tilde{x}$ の近傍で定義された微分作用素 $\tilde{D}_{\tilde{x}}$ および正則関数 $h_{\tilde{x}}$ が存在し，任意の $g \in \mathcal{E}_X$ に対し，$(Dg)\circ f = \tilde{D}_{\tilde{x}}(g \circ f)\cdot(1/h_{\tilde{x}})$ が成立する。(cf. Poly [9, 4.4]). さて任意の $\tilde{g} \in f_* \tilde{\mathcal{J}}^\infty \mathcal{E}_{\tilde{X}}$ に対し，明らかに一意的な連続関数 g on X が存在し $\tilde{g} = g \circ f$ となる。補題はこの g が C^∞ かつ $g \in \mathcal{J}^\infty \mathcal{E}_X$ を示せば示される。これは上の注意と次の事実から従う。任意の $g_1 \in \tilde{\mathcal{J}}^\infty \mathcal{E}_{\tilde{X}}$ と任意の $h_1 \in \mathcal{O}_{\tilde{X}}$ に対し $g_1/h_1 \in \tilde{\mathcal{J}}^\infty \mathcal{E}_{\tilde{X}}$ (cf. [8, IV. Prop. 1.4]).

これから直ちに定理 1′ が従う。実際，Step 1 での同形 $\tilde{j}_! \mathbb{C}_{\tilde{U}} \cong \tilde{\mathcal{J}}^\infty \mathcal{E}^{\cdot}_{\tilde{X}}$ に対し Rf_* を作用させると，左辺は，$Rf_*(\tilde{j}_! \mathbb{C}_{\tilde{U}}) \cong Rf_* R\tilde{j}_! \mathbb{C}_{\tilde{U}} \cong Rj_! \mathbb{C}_U \cong j_! \mathbb{C}_U$，右辺は，$Rf_* \tilde{\mathcal{J}}^\infty \mathcal{E}^{\cdot}_{\tilde{X}} \cong f_* \tilde{\mathcal{J}}^\infty \mathcal{E}^{\cdot}_{\tilde{X}} = \mathcal{J}^\infty \mathcal{E}^{\cdot}_X$ となる。(ただし計算はすべて $\mathbb{C}$ ベクトル空間の層のなすアーベル圏の derived category で考えている。) でてきた同形 $j_! \mathbb{C}_U \cong \mathcal{J}^\infty \mathcal{E}^{\cdot}_X$ が自然なものと一致する事も容易にわかる。

定理 2 のためにはさらに次の補題に注意する必要がある。

<u>補題 2.</u> $f: \tilde{X} \to X$ を Step 2 のとおりとする。この時次が成立する。

$$\hat{f}_* \hat{\Omega}^p_{\tilde{X}} \cong \hat{\Omega}^p_X \quad , \quad R^q f_* \Omega^p_X \cong R^q \hat{f}_* \hat{\Omega}^p_X \,, \quad q \geq 1 .$$

実際 Banica [1] により，$R^q f_*\widehat{\Omega^p_{\tilde X}} \cong R^q \hat f_* \hat\Omega^p_{\tilde X}$，$\forall q \geq 0$．ところが $q \geq 1$ の時，$R^q f_* \Omega^p_{\tilde X}$ の台は Y 上にあるから，$R^q f_* \widehat{\Omega^p_{\tilde X}} \cong R^q f_* \Omega^p_{\tilde X}$ である。また X は非特異だから $f_* \Omega^p_{\tilde X} \cong \Omega^p_X$ である。

<u>定理2の証明。</u> Step 1で示された $(\tilde X, \tilde Y)$ に関する結果と，完全列

$$0 \to \mathcal{J}^\infty \mathcal{E}^{\cdot}_{\tilde X} \to \mathcal{E}^{\cdot}_{\tilde X} \to \hat{\mathcal{E}}^{\cdot}_{\tilde X} \to 0$$

に対し，Rf_* を作用させて long cohomology exact sequence をとった結果とから，

$$0 \to \mathcal{H}^0(\mathcal{J}^\infty \mathcal{E}^{0,\cdot}_X) \to f_* \mathcal{O}_{\tilde X} \to \hat f_* \hat{\mathcal{O}}_{\tilde X} \to \mathcal{H}^1(\mathcal{J}^\infty \mathcal{E}^{0,\cdot}_X) \to R^1 f_* \mathcal{O}_{\tilde X} \to$$

$$R^1 \hat f_* \hat{\mathcal{O}}_{\tilde X} \to \mathcal{H}^2(\mathcal{J}^\infty \mathcal{E}^{0,\cdot}_X) \to R^2 f_* \mathcal{O}_{\tilde X} \to R^2 \hat f_* \hat{\mathcal{O}}_{\tilde X} \to \cdots$$

を得る。補題2の $p=0$ の場合から，容易に $\mathcal{H}^0(\mathcal{J}^\infty \mathcal{E}^{0,\cdot}_X) \cong j_! \mathcal{O}_U$，$\mathcal{H}^1(\mathcal{J}^\infty \mathcal{E}^{0,\cdot}_X) \cong \hat{\mathcal{O}}_X / \mathcal{O}_X$，$\mathcal{H}^i(\mathcal{J}^\infty \mathcal{E}^{0,\cdot}_X) = 0$，$i \geq 2$ を得る。注意1によりこれで定理の証明が終わる。

一方同じ Step 1, Step 2 に従って系の証明も直接に得られることがわかった。（本質的に T. Bloom の [12, Prop. 3.1] の証明と同じ。）さらにこの方法では，笹倉氏の講演で述べられたような精密な形をも与えうる。（ここでは述べないが。）

<u>系の直接証明.</u> 補題2により，2つの複体 $f_* \Omega^{\cdot}_{\tilde X}$ と $\hat f_* \hat\Omega^{\cdot}_{\tilde X}$ の間の自然写像が quasi-isomorphism であることを見ればよい。このため2つのスペクトル列 $E_2^{p,q} = H^p(R^q f_* \Omega^{\cdot}_{\tilde X}) \Rightarrow \mathbb{R}^q f_* \Omega^{\cdot}_{\tilde X}$，$\hat E_2^{p,q} = H^p R^q \hat f_* \hat\Omega^{\cdot}_{\tilde X} \Rightarrow \mathbb{R}^q \hat f_* \hat\Omega^{\cdot}_{\tilde X}$ を比較する。普通の Poincare 補題及び Step 1 から $\mathbb{R}^q f_* \Omega^{\cdot}_{\tilde X} \cong \mathbb{R}^q \hat f_* \hat\Omega^{\cdot}_{\tilde X} \cong R^q f_* \mathbb{C}_{\tilde X}$ である。一方

補題2により $E_2^{p,q} \cong \hat{E}_2^{p,q}$, $q>0$, が成立する。これから $E_2^{p,0} \cong \hat{E}_2^{p,0}$ が従う。

この証明方法は、実際にはもう少し一般の結果を与える。[ ]. すなわち、

<u>定理3.</u> Xを複素空間、Yをその部分空間でXのsingular locusを含むものとする。この時次が成立する：自然写像

$$\alpha : \Omega^{\cdot}_{X|Y} \xrightarrow{\sim} \hat{\Omega}^{\cdot}_{X}$$

はquasi-isomorphism. ここで$\Omega^{\cdot}_{X|Y}$は$\Omega^{\cdot}_{X}$のYへのsheaf theoreticな制限。(Yが1点の時が上で述べたBloomの定理)

次に(1)及び(2)の下列のanalyticな表現を求めることを考える。$M(X)$をO_X-加群のなすアーベル圏、$\mathcal{C}(X)$をO_X-加群の複体$\{\mathcal{F}^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$でその微分$d_i : \mathcal{F}^i \to \mathcal{F}^{i+1}$が1階の微分作用素であるもののなす圏とする。$\mathcal{C}(X)$における射$f : \mathcal{F}^{\cdot} \to \mathcal{G}^{\cdot}$は$O_X$-線形写像$f^i : \mathcal{F}^i \to \mathcal{G}^i$の組で$d_{i+1}\cdot f^i = f^{i+1}\cdot d_i$を満たすもので与えられる。(詳しくは[5, §1]参照.) $M(X)$, $\mathcal{C}(X)$共にenough injectivesを持つアーベル圏である。($\mathcal{C}(X)$については[, Prop. 2.1]). $M(X)$は$F \in \mathrm{Ob}\,M(X)$に対し$F^{\cdot} \in \mathcal{C}(X)$を$F^0 = F$, $F^i = 0$, $i \neq 0$, で定義することにより$\mathcal{C}(X)$の部分圏とみなしうる。$DM(X)$, $D\mathcal{C}(X)$で$M(X)$及び$\mathcal{C}(X)$の導来圏を表す。上の注意により$DM(X)$を$D\mathcal{C}(X)$の部分圏とみなしてよい(cf. [3, p.377]). 以下Fで定義

する関手 $\mathcal{C}(X)\to\mathcal{C}(X)$, $D\mathcal{C}(X)\to D\mathcal{C}(X)$ については、この意味で、$M(X)$, $DM(X)$ を保存することが直ちにわかる。

まず $\mathcal{C}(X)\to\mathcal{C}(X)$ なる左完全関手 $j_!^m(\mathcal{F}^\cdot)$, $\hat{\Gamma}(\mathcal{F}^\cdot)$ を

$$j_!^m(\mathcal{F}^\cdot)=\varprojlim_k \Sigma_k^\cdot(\mathcal{F}^\cdot),\qquad \hat{\Gamma}(\mathcal{F}^\cdot)=\varprojlim_k \mathcal{F}^\cdot/\Sigma_k^\cdot(\mathcal{F}^\cdot)$$

で定義する。ここに $\Sigma_k^\cdot(\mathcal{F}^\cdot)=\mathcal{I}^k\mathcal{F}^\cdot+d(\mathcal{I}^k\mathcal{F}^{\cdot-1})$. $Rj_!^m$, $R\hat{\Gamma}$ を夫々 $j_!^m$, $\hat{\Gamma}$ の導来関手とする。

<u>補題 3</u> $\mathcal{F}^\cdot\in Ob\,\mathcal{C}(X)$ に対し、次の functorial な triangle[†] が $D\mathcal{C}(X)$ において存在する。 ([†] cf. [3, I§1])

(4)
$$\begin{tikzcd}
 & \hat{\mathcal{F}}^\cdot \arrow[dl] & \\
Rj_!^m(\mathcal{F}^\cdot) \arrow[rr] & & \mathcal{F}^\cdot \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

<u>証明</u>. pro-$\mathcal{C}(X)$ で、自然数により添数づけられた $\mathcal{C}(X)$ の objects の射影系のなすアーベル圏とする。この時射影的極限 $\varprojlim$ は pro-$\mathcal{C}(X)\to\mathcal{C}(X)$ なる左完全関手とみられる。その右導来函手を $R\varprojlim$ で表す。さて今任意の $\mathcal{F}^\cdot$ に対し

$$0\to(\Sigma_k^\cdot(\mathcal{F}^\cdot))_k\to(\mathcal{F}^\cdot)_k\to(\mathcal{F}^\cdot/\Sigma_m^\cdot(\mathcal{F}^\cdot))_m\to 0$$

は、pro-$\mathcal{C}(X)$ における完全列。従って $R\varprojlim$ を作用させて $D\mathcal{C}(X)$ における triangle

$$\begin{tikzcd}
 & R\hat{\Gamma}(\mathcal{F}^\cdot) \arrow[dl] & \\
Rj_!^m(\mathcal{F}^\cdot) \arrow[rr] & & R\Gamma(\mathcal{F}^\cdot) \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

を得る。($(\mathcal{F}^\cdot)_k$ は $(\mathcal{F}^\cdot)_k=\mathcal{F}^\cdot$ なる constant system, $\mathcal{F}^\cdot \underset{dot.}{=} \Gamma(\mathcal{F}^\cdot)=\varprojlim(\mathcal{F}^\cdot)_k$) 明らかに $R\Gamma(\mathcal{F}^\cdot)\cong\mathcal{F}^\cdot$. 一方 $R^i\varprojlim=0$, $i\geq 2$ (Roos) (cf. [4,

I. Prop.4.1), また $\mathcal{F}^\cdot/\Sigma_k^\cdot(\mathcal{F}^\cdot) \to \mathcal{F}^\cdot/\Sigma_{k-1}^\cdot(\mathcal{F}^\cdot)$ surjective だから Mittag-Lefflerの条件をみたし $R^1\varprojlim(\mathcal{F}^\cdot/\Sigma_k^\cdot(\mathcal{F}^\cdot)) = 0^{*)} \Rightarrow R\varprojlim(\mathcal{F}^\cdot/\Sigma_k^\cdot(\mathcal{F}^\cdot)) \cong \varprojlim \mathcal{F}^\cdot/\Sigma_k^\cdot(\mathcal{F}^\cdot)$。(*) [4, I, Cor.4.3]) さらに $\varprojlim \mathcal{F}^\cdot/\Sigma_k^\cdot(\mathcal{F}^\cdot) \cong \varprojlim \mathcal{F}^\cdot/\mathcal{J}^k\mathcal{F}^\cdot = \hat{\mathcal{F}}^\cdot$. Q.E.D.

(4)を用いると(1),(2)のanalyticな表示が次のごとく得られる。

<u>命題1.</u> 1) (4)で $\mathcal{F}^\cdot = \Omega_X^\cdot$ とおく。すると(4)は, $D\mathcal{C}(X)$に於て, 完全列(1)の下行($\mathcal{C}(X)$内で考えている)に同伴なtriangleと自然に同形である。 2) $\mathcal{F}$をX上の解析的連接層とし, $\mathcal{F}^\cdot = \mathcal{F}$ (特に $\mathcal{F}^\cdot \in M(X)$) とする。この時(4)は, $DM(X)$において完全列(2)の下行 $\otimes\mathcal{F}$ に同伴な$DM(X)$におけるtriangleと自然に同形である。

(注). アーベル圏における完全列はその導来圏におけるtriangleを自然に定める。[3, P.63 Remark]

命題の証明の前に2)について解説しておく。まず定理2は任意の連接$\mathcal{O}_X$-加群$\mathcal{F}$に対しそのYに沿ってのformal completion $\hat{\mathcal{F}}$の自然なfine resolutionを与えることを見ておく。

<u>命題2.</u> $\forall x \in Y$ に対し $\hat{\mathcal{E}}_{X,x}$ は $\mathcal{O}_{X,x}$加群として忠実に平坦である。

<u>証明</u> $\tilde{\mathcal{F}}$ を presheaf $U \to \prod_{u\in U} \mathfrak{F}_u$; ($\mathfrak{F}_u$: $u\in U$における形式的巾級数環) により定義されるX上の$\mathcal{O}_X$-加群の層とする。各$x \in Y$に対して, 自然な環の包含関係 $\mathcal{O}_{X,x} \subseteq \hat{\mathcal{E}}_{X,x} \subseteq \tilde{\mathcal{F}}_x$ が存在する。$\tilde{\mathcal{F}}_x$ は [8, III. Cor.4.13] により忠実に平坦な $\mathcal{O}_{X,x}$-加

群であるから，任意のイデアル $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}_{X,x}$ に対し，$\mathfrak{a}\tilde{\mathfrak{J}}_x \cap \hat{\mathcal{E}}_{X,x} = \mathfrak{a}\hat{\mathcal{E}}_{X,x}$ なることを見れば十分である（cf. [8, III. Prop. 4.7]）．実際これは，[8, VI, Th. 1.2] の特殊な場合である。（そこの記号で $\mathfrak{a}\tilde{\mathfrak{J}}_x \cap \hat{\mathcal{E}}_{X,x} = \mathfrak{a}\tilde{\mathfrak{J}}_x(Y) \cap \hat{\mathcal{E}}_{X,x}$ となることに注意.） Q.E.D.

<u>系</u>　$\mathcal{F}$ を連接 $\mathcal{O}_X$-加群，$\hat{\mathcal{F}}$ を $\mathcal{F}$ の Y に沿っての formal completion とする。この時複体 $\mathcal{E}_X^{0,\cdot}(\hat{\mathcal{F}}) \overset{def}{=} \hat{\mathcal{E}}_X^{0,\cdot} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F} \cong \mathcal{E}_X^{0,\cdot} \otimes_{\mathcal{O}_{\hat{X}}} \hat{\mathcal{F}}$ は $\hat{\mathcal{F}}$ の自然な fine resolution を与える。

また $\mathcal{J}^\infty\mathcal{E}_X^{0,\cdot}(\mathcal{F}) = \mathcal{J}^\infty\mathcal{E}_X^{0,\cdot} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$，$\mathcal{E}_X^{0,\cdot}(\mathcal{F}) = \mathcal{E}_X^{0,\cdot} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$ とおくと，$\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{F}$ を (2) の下行に作用させることにより完全列

$$(5) \qquad 0 \to \mathcal{J}^\infty\mathcal{E}_X^{0,\cdot}(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{E}_X^{0,\cdot}(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{E}_X^{0,\cdot}(\hat{\mathcal{F}}) \to 0$$

を得る。命題 1　2) にいう '(2) の下行 $\otimes\mathcal{F}$' とは (5) に他ならない。

<u>命題 1 の証明</u>　1) ${}'\Sigma_k(\mathcal{E}_X^\cdot) = \mathcal{J}^k\mathcal{E}_X^\cdot + d(\mathcal{J}^k\mathcal{E}_X^{\cdot-1})$ とおく。pro-$\mathcal{C}(X)$ 内の完全列の可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \Sigma_k(\Omega_X^\cdot) & \longrightarrow & \Omega_X^\cdot & \longrightarrow & \Omega_X^\cdot/\Sigma_k(\Omega_X^\cdot) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & {}'\Sigma_k(\mathcal{E}_X^\cdot) & \longrightarrow & \mathcal{E}_X^\cdot & \longrightarrow & \mathcal{E}_X^\cdot/{}'\Sigma_k(\mathcal{E}_X^\cdot) & \to & 0
\end{array}$$

から triangles の間の写像

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \hat{\Omega}_X^\cdot & & & & \hat{\mathcal{E}}_X^\cdot & \\
\swarrow & & \nwarrow & \longrightarrow & \swarrow & & \nwarrow \\
Rj_!^\infty\Omega_X^\cdot & \longrightarrow & \Omega_X^\cdot & & R\varprojlim {}'\Sigma_k(\mathcal{E}_X^\cdot) & \to & \mathcal{E}_X^\cdot
\end{array}$$

が得られる（補題 3 参照）。$\hat{\Omega}_X^\cdot \to \hat{\mathcal{E}}_X^\cdot$，$\Omega_X^\cdot \to \mathcal{E}_X^\cdot$ は夫々上の系及び通常の Dolbeault-Grothendieck 補題により同形であるから上の triangles は同形である。一方 $\mathcal{E}_X^\cdot \to \hat{\mathcal{E}}_X^\cdot$ の surjectivity は

$R^1\varprojlim{}'\Sigma_k(\mathcal{E}_X^{\cdot})=0$ と同値であり、$R^i\varprojlim{}'\Sigma_k(\mathcal{E}_X^{\cdot})=0$, $i\geq 2$ とあわせて (cf. 補題3の証明), $R\varprojlim{}'\Sigma_k^{\cdot}(\mathcal{E}_X^{\cdot})\cong\varprojlim{}'\Sigma_k(\mathcal{E}_X^{\cdot})\cong\varprojlim\mathcal{J}^k\mathcal{E}_X^{\cdot}\cong\mathcal{J}^{\infty}\mathcal{E}_X^{\cdot}$ を得る。 2) $\mathcal{F}=\mathcal{O}_X$ の場合は可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathcal{J}^k & \to & \mathcal{O}_X & \to & \mathcal{O}_X/\mathcal{J}^k & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & \mathcal{J}^k\mathcal{E}_X^{0,\cdot} & \to & \mathcal{E}_X^{0,\cdot} & \to & \mathcal{E}_X^{0,\cdot}/\mathcal{J}^k\mathcal{E}_X^{0,\cdot} & \to & 0 \end{array}$$

から上と同様に示される。一般の場合は、$(Rj_!^{\infty}\mathcal{O}_X)\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{F}\cong Rj_!^{\infty}\mathcal{F}$ を示して $\mathcal{F}=\mathcal{O}_X$ の場合から導く。

次に今まで述べてきたことの 'dual' に対応する事実について簡単に述べる。

${}'\mathcal{D}_X^{\cdot}$ を X 上の currents の(複体の)芽のなす層, ${}'\mathcal{D}_{Y^\infty}^{\cdot}=\Gamma_Y({}'\mathcal{D}_X^{\cdot})$, つまり Y に台が含まれるような currents の層, ${}'\mathcal{D}_{X/Y^\infty}^{\cdot}={}'\mathcal{D}_X^{\cdot}/{}'\mathcal{D}_{Y^\infty}^{\cdot}$ とする。明らかな完全列

(5) $\quad 0\to{}'\mathcal{D}_{Y^\infty}^{\cdot}\to{}'\mathcal{D}_X^{\cdot}\to{}'\mathcal{D}_{X/Y^\infty}^{\cdot}\to 0$

が存在する。(5)は次の意味で(1)の下列の dual であることに注意しておく。V を X の任意の開集合とする時、通常の位相に関し $\Gamma(V,\mathcal{E}_X^{\cdot})$ は FS (Frechet-Schwartz)-複体であるが、この位相に関し $\Gamma(V,\mathcal{J}^{\infty}\mathcal{E}_X^{\cdot})$ は閉 (Whitney), よって $\Gamma(V,\mathcal{J}^{\infty}\mathcal{E}_X^{\cdot})$, $\Gamma(V,\hat{\mathcal{E}}_X^{\cdot})$ も自然に FS-複体の構造を持つ。一方 $\Gamma(V,\mathcal{E}_X^{\cdot})\times\Gamma_c(V,{}'\mathcal{D}_X^{\cdot})\to\mathbb{C}$ なる自然な perfect pairing に関し $\Gamma(V,\mathcal{J}^{\infty}\mathcal{E}_X^{\cdot})$ の零化空間が $\Gamma_c(V,{}'\mathcal{D}_{Y^\infty}^{\cdot})$ に他ならず、従って $\Gamma_c(V,{}'\mathcal{D}_{Y^\infty}^{\cdot})$, $\Gamma_c(V,{}'\mathcal{D}_{X/Y^\infty}^{\cdot})$ は夫々, $\Gamma(V,\hat{\mathcal{E}}_X^{\cdot})$, $\Gamma_c(V,\mathcal{J}^{\infty}\mathcal{E}_X^{\cdot})$ の位相 dual となり自然にDFS-

複体の構造を持つ。ここに c はコムパクト台を表す。さてこの意味で定理1の dual が存在するはずだがこれはすでに Poly [9] により得られている。

<u>定理</u> (Poly) 局所コホモロジー群の triangle と(5)に同伴なそれは

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & Rj_*\mathbb{C} \arrow[dl] & & & & {}'\mathcal{D}_{X|Y^\infty} \arrow[dl] & \\
R\underline{\Gamma}_Y(\mathbb{C}) \arrow[rr] & & \mathbb{C} \arrow[ul] & \cong & {}'\mathcal{D}_{Y^\infty} \arrow[rr] & & {}'\mathcal{D}_X \arrow[ul]
\end{tikzcd}
$$

同形。(X上の$\mathbb{C}$-ベクトル空間の層のなすアーベル圏の導来圏で。)

さて前と同様 (5) の analytic な表示を考えるのだが、その前に Dolbeault に対応する次の完全列にも注意しておく。

$$(6)\quad 0 \to \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, {}'\mathcal{D}^{n,\cdot}_{Y^\infty}) \to \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, {}'\mathcal{D}^{n,\cdot}_{X}) \to \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, {}'\mathcal{D}^{n,\cdot}_{X|Y^\infty}) \to 0$$

ここに $\mathcal{F}$ は任意の連接 $\mathcal{O}_X$-加群。実際，[, VII. Th. 2.4] により ${}'\mathcal{D}^{n,\cdot}_{Y^\infty,x}$ は injective な $\mathcal{O}_{X,x}$-加群である. ($x\in Y$)

共変左完全関手 $\mathcal{C}(X)\to\mathcal{C}(X)$ を次式で定義する。

$$\Gamma_{*Y}(\mathcal{F}^\cdot) = \varinjlim_k \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}^{k+\cdot}, \mathcal{F}^\cdot)$$

$$j^m_*(\mathcal{F}^\cdot) = \varinjlim_k \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{J}^{k+\cdot}, \mathcal{F}^\cdot)$$

完全列 $0\to\mathcal{J}^{k+\cdot}\to\mathcal{O}_X\to\mathcal{O}_X/\mathcal{J}^{k+\cdot}\to 0$ に左完全関手 $\varinjlim\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\ , \mathcal{F}^\cdot)$ を apply して $D\mathcal{C}(X)$ における triangle

$$
(7)\qquad
\begin{tikzcd}
 & Rj^m_*(\mathcal{F}^\cdot) \arrow[dl] & \\
R\underline{\Gamma}_*(\mathcal{F}^\cdot) \arrow[rr] & & \mathcal{F}^\cdot \arrow[ul]
\end{tikzcd}
$$

を得る。同様に関手 $\mathcal{C}(X)\to\mathcal{C}(X)$

$$\mathcal{H}om^m_{\mathcal{J}}(\mathcal{F}^\cdot, \Omega^n_X) = \varinjlim_k \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{J}^{k+\cdot}\mathcal{F}^\cdot, \Omega^n_X)$$

$$\mathcal{H}om^{\bullet}_{*Y}(\mathcal{F}^{\cdot}, \Omega_X^n) = \varinjlim_{k} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}^{\cdot}/\mathcal{J}^{k+1}\cdot\mathcal{F}^{\cdot}, \Omega_X^n)$$

を定義し triangle

$$(8)\qquad \begin{array}{ccc} & R\mathcal{H}om^{m}_{U}(\mathcal{F}^{\cdot}, \Omega_X^n) & \\ \swarrow & & \nwarrow \\ R\mathcal{H}om_{*Y}(\mathcal{F}^{\cdot}, \Omega_X^n) & \longrightarrow & R\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}^{\cdot}, \Omega_X^n) \end{array}$$

を得る。ここに $n = \dim X$.

$\mathcal{F}^{\cdot}$ がすべて局所自明なら（たとえば $\mathcal{F}^{\cdot} = \Omega_X^{\cdot}$）

$$\Gamma_{*Y}(\mathcal{F}^{\cdot}) \cong R\mathcal{H}om_{*Y}(\mathcal{F}^{\cdot *}\otimes_{\mathcal{O}_X}\Omega_X^n, \Omega_X^n),\quad j^m_*(\mathcal{F}^{\cdot}) = R\mathcal{H}om^m_U(\mathcal{F}^{\cdot *}\otimes_{\mathcal{O}_X}\Omega_X^n, \Omega_X^n)$$

が成立することに注意。命題 1 の dual として次を得る。

<u>命題 3.</u> 1) $D\mathcal{C}(X)$ において，(5) に同伴な triangle と (7) で $\mathcal{F}^{\cdot} = \Omega_X^{\cdot}$ としたものは自然に同形である。

2) $\mathcal{F}$ を任意の連接 $\mathcal{O}_X$-加群とする時，(6) に同伴な triangle と (8) で $\mathcal{F}^{\cdot} = \mathcal{F}$ としたものは，$DM(X)$ において自然に同形である。

証明略。最後に以上の応用として Ramis-Ruget の才 1 双対定理 [ ] の 'meromorphic' analogue が得られることを注意しておく。

$\mathcal{F} \in \mathrm{Ob}M(X)$ に対し $\Gamma(\mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F})$ とする。Ψ を X の閉集合で U 内に含まれるもの全体からなる台の族とする。次の記号を用いる。 $H^i_{\Psi}(U, \mathcal{F}) = R^i(\Gamma\cdot j^m_!)(\mathcal{F})$, $Ext^i_{*Y,c}(X, \mathcal{F}, \Omega_X^n) = R^i(\Gamma_c\cdot\mathcal{H}om_{*Y}(\ \cdot\ , \Omega_X^n))(\mathcal{F})$, $Ext^i_{m,c}(U, \mathcal{F}, \Omega_X^n) = R^i(\Gamma_c\cdot\mathcal{H}om^m_U(\ , \Omega_X^n))(\mathcal{F})$.

（c : コムパクト support）

(4) と (8) から完全列

$$(9)\quad \cdots \longrightarrow H^i_{\Psi}(U, \mathcal{F}) \longrightarrow H^i(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^i(\hat{X}, \hat{\mathcal{F}}) \longrightarrow \cdots$$

$$(10)\quad \cdots \longleftarrow Ext^{n-i}_{m,c}(U, \mathcal{F}, \Omega_X^n) \longleftarrow Ext^{n-i}_{c}(X, \mathcal{F}, \Omega_X^n) \longleftarrow Ext^{n-i}_{*Y,c}(X, \mathcal{F}, \Omega_X^n) \longleftarrow \cdots$$

と得る。この時定理は次の形に述べられる。

<u>定理3</u> (9)の各項に自然なQFS(=quotient of FS)構造，(10)の各項に自然なQDFS(=quotient of DFS)構造，(9)と(10)の間の自然な$\mathbb{C}$-双線形pairingが存在し，このpairingは対応する各空間に同伴なHausdorff位相空間の間の位相双対を引き起こす。このようなQFS, QDFS構造は一意的である。さらにH^iのseparationとExt_c^{n-i+1}のseparationは同値である。(但しXは純次元nと仮定した。)

証明はMalgrangeのSerre双対定理の証明とほぼ同様である。([1, VII.§4]参照)。

文　献

[1] Banica, C., and Stanasila, O., Algebraic methods in the global theory of complex spaces, John Wiley 1976.

[2] Grothendieck, A., On the de Rham cohomology of algebraic varieties, Publ. Math. IHES 29 (1966), 95–103

[3] Hartshorne, R., Residues and Duality, Springer Lecture Notes 20 (1966).

[4] Hartshorne, R., On the de Rham cohomology of algebraic varieties, Publ. Math. IHES _ (1975).

[5] Herrela, M. and Lieberman, D., Duality and de Rham cohomology of infinitesimal neighborhoods, Invent. math. 13 (1971), 97–124.

[6] Hironaka, H., Bimeromorphic smoothing of a complex-analytic variety,

Warwick, 1971.

[7] Kantor, J.-M., Le complexe de Dolbeault-Grothendieck sur les espaces analytiques, Seminaire Lelong, 14e annee, 1973/74, Springer Lecture Note 474.

[8] Malgrange, B., Ideals of differentiable functions, Oxford Univ. Press, 1966.

[9] Poly, J.-B., Sur l'homologie des courants a supports dans un ensemble semi-analytique, Bull. Soc. Math. France, Memoire 38 (1974), 35-43.

[10] Ramis, J. P., et Ruget, G, Complexes dualisants et théorème de dualité en géométrie analytique complexe, Publ. IHES, 38, 77-91 (1970).

[11] Sasakura, N., Complex analytic de Rham cohomology I, Proc. Japan Acad., 49 (1973), 718-722, II, ibid. 50 (1974), 292-295, III, 51 (1975) 7-11, IV, 535-539.

[12] Brieskorn, E., Die Monodromie der isolierten Singularitäten von Hyperflächen, Manuscripta Math. 2 (1970), 103-161.