数理解析研究所講究録
第372巻 1979年 17-44

コーシー・リーマン(c.r.)多様体上のポアンカレ補題と，スタイン多様体の境界におけるド・ラーム コホモロジー論

早大・理工　郡 敏昭

強擬凸領域の境界となる多様体，さらに $\mathbb{C}^n$ 内の実超平面となる多様体の性質を抽象した s.p.c (strongly pseudo convex) manifold や c.r. (cauchy-rieman) manifold の研究は Kohn の $\bar{\partial}$-Neumann 問題の解法，その境界への reduction により始められ多くの研究者により為されてきた。

一方 ド・ラーム コホモロジー論として呼ばれる 閉解析部分集合の 補空間となる解析空間のコホモロジー を この閉解析部分集合上に特異性を持つ正則微分形式のつくる複体のコホモロジーで表わそうという定理 も Atiyah-Hodge，Grothendieeck 等 多くの人々に研究されてきている。

そこで Stein 多様体の自然な境界に特異性を持つ(持たないときは 別の制限を持つ)正則微分形式の複体コホモロ

ジーにより Stein 多様体のコホモロジーを表わそうという C.R.型（実・複素型）ド・ラーム コホモロジー論を試みてみたい。

境界における正則形式の特異性を調べる以上 $\Omega^{\cdot}_X/(j_-)_*(\Omega^{\cdot}_X)$ なる層を調べることがまず必要になる。ただし j_- は領域 D の全空間 X への inclusion である。Local cohomology 論を境界に適用した formal theory によりこの特異性の層を表現する（§1）

次に境界に沿っての正則形式（c.r. holomorphic form）と，その近傍の正則形式との比較が問題になるであろう。§2では C.R.多様体上の正則形式の複体についてポアンカレ補題を示す。この応用として s.p.c. manifold に対し Hodge 分解 $H^{\cdot}(M,\mathbb{C}) \cong \bigoplus_{p+q=m} \mathcal{H}^{p,q}$，$\mathcal{H}^{p,q}$ は (c.r.) Laplacian の調和空間，が Kohn－Tanaka の結果と合わせて導かれる。

§3で最初に述べた試みを行なう。擬凸領域の $\mathbb{C}$－係数コホモロジーは，境界に近づくとき法線方向にのみ正則性を欠く正則微分形式の Hypercohomology により表現される。とくに Stein ならそのような形式の複体コホモロジーとして表現されるであろう。（最後の点は未完である）

§1. Local cohomology論と Andreotti - Grauert の結果による General nonsense

1.1. Xを位相空間，DをXの部分領域で相対コンパクト，BをDの境界とする。

$j_+ : (\overline{D})^c \hookrightarrow X$， $j_- : D \hookrightarrow X$， $j : D \cup (\overline{D})^c \hookrightarrow X$

を injections とする。

Xの開集合Uに対し，$U_+ = U \cap (D)^c$，$U_- = U \cap \overline{D}$，

$\mathring{U}_+ = U \cap (\overline{D})^c$，$\mathring{U}_- = U \cap D$ とおく。

$\mathcal{F}$を X上の sheaf of abelian group とする。

$\underline{\Gamma}_b(\mathcal{F})$： $U \longmapsto \Gamma_{U \cap B}(U, \mathcal{F})$ なる準層の決める層，

$\underline{\Gamma}_{ex}(\mathcal{F})$： $U \longmapsto \Gamma_{U_+}(U, \mathcal{F})$ なる準層の決める層，

$\underline{H}^q_b(\mathcal{F})$ (resp. $\underline{H}^q_{ex}(\mathcal{F})$)： $\underline{\Gamma}_b(\mathcal{F})$ (resp. $\underline{\Gamma}_{ex}(\mathcal{F})$) の q次導来函手，

としよう。$\underline{H}^q_b(\mathcal{F})$，$\underline{H}^q_{ex}(\mathcal{F})$，の台は$B$に含まれる。

(提案：$\underline{H}^q_b(\mathcal{F})$ をq次境界コホモロジー，$\underline{H}^q_{ex}(\mathcal{F})$を$q$次彼岸コホモロジーと呼んではどうか)

1.2. Local cohomology の一般論より

(1.2.1) $$0 \to \underline{\Gamma}_b(\mathcal{F}) \to \mathcal{F} \to j_*(\mathcal{F}|X \setminus B) \to \underline{H}^1_b(\mathcal{F}) \to 0 \text{ exact},$$
$$j_*(\mathcal{F}|X \setminus B) = (j_-)_*(\mathcal{F}|D) \oplus (j_+)_*(\mathcal{F}|(\overline{D})^c)$$

(1.2.2) $$0 \to \underline{\Gamma}_{ex}(\mathcal{F}) \to \mathcal{F} \to (j_-)_*(\mathcal{F}|D) \to \underline{H}^1_{ex}(\mathcal{F}) \to 0 \text{ exact},$$

および，$p \geq 1$ に対し，

(1.2.3)
$$\underline{H}^{p+1}_{b}(\mathcal{F}) \cong R^{p}(j_+)_*(\mathcal{F}|(\overline{D})^c) \oplus R^{p}(j_-)_*(\mathcal{F}|D),$$
$$\underline{H}^{p+1}_{ex}(\mathcal{F}) \cong R^{p}(j_-)_*(\mathcal{F}|D),$$

を得る。

1.3. X を (reduced) analytic space，D を X の相対コンパクトな強擬凸領域とし，$\mathcal{F}$ を X 上の coherent sheaf of $\mathcal{O}_X$-module とする。

Andreotti - Grauert : Théoremes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes ; Bull. Soc. Math. France 90 (1962) の P. 225 (Théorème 5) より

$\forall x \in B$ は $H^r(\mathring{U}_-, \mathcal{F}) = 0$ $(r \geq 1)$ なる性質を持つ開集合 U よりなる基本近傍系を持つ。したがって

(1.3.1)
$$R^p(j_-)_*(\mathcal{F}|D) = 0, \quad p \geq 1 .$$

同上 P232 (Théorème 9) より

$\forall x \in B$ は $H^r(\mathring{U}_+, \mathcal{F}) = 0$，$1 \leq r \leq \mathrm{dimh}\,\mathcal{F} - 2$，
$$\Gamma(\mathring{U}_+, \mathcal{F}) \cong \Gamma(U, \mathcal{F})$$

なる性質をもつ開集合 U よりなる基本近傍系を持つ。したがって

(1.3.2)
$$R^p(j_+)_*(\mathcal{F}|(\overline{D})^c) = 0, \quad 1 \leq p \leq \mathrm{dimh}\,\mathcal{F} - 2,$$
$$(j_+)_*(\mathcal{F}|(\overline{D})^c) \cong \mathcal{F} \quad (\text{on } B).$$

1.4. $\quad \underline{\Gamma}_{b}(\mathfrak{F}) = 0$

$$\underline{H}^1_{b}(\mathfrak{F}) \cong (j_-)_*(\mathfrak{F}|D)$$

$$\underline{H}^p_{b}(\mathfrak{F}) = 0 \qquad 2 \leq p \leq \dim \mathfrak{F} - 1$$

が B上で成り立つ。(2行目以外は X全体で成立)

証明。 最後の式は (1.2.3), (1.3.2), (1.3.1) よりわかる。

さて $\mathfrak{U} \longmapsto \Gamma_{\mathfrak{U}_-}(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$ なる準層の決める層を $\underline{\Gamma}_{in}(\mathfrak{F})$,

その導来函手を $\underline{H}^p_{in}(\mathfrak{F})$ (此岸コホモロジー!) としよう。

$$0 \to \Gamma_{\mathfrak{U}_-}(\mathfrak{U}, \mathfrak{F}) \to \Gamma(\mathfrak{U}, \mathfrak{F}) \to \Gamma(\mathring{\mathfrak{U}}_+, \mathfrak{F}) \to H^1_{\mathfrak{U}_-}(\mathfrak{U}, \mathfrak{F}) \to$$
$$\to H^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{F}) \to \cdots$$

なる exact 列より

$$0 \to \underline{\Gamma}_{in}(\mathfrak{F}) \to \mathfrak{F} \to (j_+)_*(\mathfrak{F}|(\overline{D})^c) \to \underline{H}^1_{in}(\mathfrak{F}) \to 0$$

なる exact 列を得るが, (1.3.2) より $\underbrace{\mathfrak{F} \cong (j_+)_*(\mathfrak{F}|(\overline{D})^c)}_{\text{B上で}}$

だったから

$$\underline{\Gamma}_{in}(\mathfrak{F}) = \underline{H}^1_{in}(\mathfrak{F}) = 0 \quad \text{on } B.$$

一方

$$0 \to \Gamma_{B\cap\mathfrak{U}}(\mathfrak{U}, \mathfrak{F}) \to \Gamma_{\mathfrak{U}_-}(\mathfrak{U}, \mathfrak{F}) \to \Gamma(\mathring{\mathfrak{U}}_-, \mathfrak{F}) \to H^1_{\mathfrak{U}\cap B}(\mathfrak{U}, \mathfrak{F}) \to$$
$$\to H^1_{\mathfrak{U}_-}(\mathfrak{U}, \mathfrak{F}) \to \cdots$$

なる exact 列より

$$0 \to \underline{\Gamma}_{b}(\mathfrak{F}) \to \underline{\Gamma}_{in}(\mathfrak{F}) \to (j_-)_*(\mathfrak{F}|D) \to \underline{H}^1_{b}(\mathfrak{F}) \to$$
$$\to \underline{H}^1_{in}(\mathfrak{F}) \to \cdots$$

なる exact 列を得る。これより, B上で,

$$\Gamma_b(\mathcal{F})=0\ ,\qquad \underline{H}^1_b(\mathcal{F})\cong(i)_*(\mathcal{F}|D)\quad 。$$

1.5. $0\to\mathcal{F}'\to\mathcal{F}\to\mathcal{F}''\to 0$ を X 上の連接層の完全列とし，$\Gamma_{ex}(\mathcal{F}'')_x=0$ としよう。（$\mathcal{F}''$ が locally free sheaf of $\mathcal{O}_X$-module の subsheaf なら この条件は満たされる。） このとき 列

$$0\to\underline{H}^1_{ex}(\mathcal{F}')_x\to\underline{H}^1_{ex}(\mathcal{F})_x\to\underline{H}^1_{ex}(\mathcal{F}'')_x\to 0$$

は 完全になる。

1.6. X を n 次元複素解析多様体とする。$\Omega^\bullet_X$ を正則微分形式のつくる複体とする。 正則ポアンカレ補題より

列：$0\to Z(\Omega^p)\to\Omega^p\xrightarrow{d}Z(\Omega^{p+1})\to 0$ ，$p\geqq 1$

は完全になる。ここに $Z(\Omega^p)=\{\varphi\in\Omega^p;\ d\varphi=0\}$.

1.5より，$p\geqq 1$ に対し，（B 上で，したがって X 上で），

$$0\to\underline{H}^1_{ex}(Z(\Omega^p))\to\underline{H}^1_{ex}(\Omega^p)\xrightarrow{\underline{H}^1_{ex}(d)}\underline{H}^1_{ex}(Z(\Omega^{p+1}))\to 0$$

は exact 列。 ゆえに

$$\underline{H}^1_{ex}(\Omega^1)\xrightarrow[\underline{H}^1_{ex}(d)]{}\underline{H}^1_{ex}(\Omega^2)\to\cdots\xrightarrow[\underline{H}^1_{ex}(d)]{}\underline{H}^1_{ex}(\Omega^n)\to 0$$

は exact となる。

さて $0\to\mathbb{C}\to\Omega^0_X=\mathcal{O}_X\xrightarrow{d}Z(\Omega^1_X)\to 0$, exact, だから，B上で，

$$0=\Gamma_{ex}(Z(\Omega^1))\to\underline{H}^1_{ex}(\mathbb{C})\to\underline{H}^1_{ex}(\Omega^0)\xrightarrow{\underline{H}^1_{ex}(d)}\underline{H}^1_{ex}(Z(\Omega^1))\to$$

$$\to \underline{H}^2_{ex}(\mathbb{C}) \to \underline{H}^2_{ex}(\Omega^0) = 0$$

なる完全列を得る。これより　B上で

$$\mathcal{H}^1(\underline{H}^1_{ex}(\Omega^\bullet_X)) \cong \frac{\underline{H}^1_{ex}(Z(\Omega^1))}{\underline{H}^1_{ex}(\Omega^0)} \cong \underline{H}^2_{ex}(\mathbb{C})$$

これは（1.2.3）より　$\cong R^1(j_-)_*(\mathbb{C}|D)$。　ところが

$$H^1(\mathring{U}_-, \mathbb{C}) = 0$$

だから，$R^1(j_-)_*(\mathbb{C}|D) = 0$。$\mathcal{H}^1(\underline{H}^1_{ex}(\Omega^\bullet_X)) = 0$．

同じく上記の長い完全列より

$$\mathcal{H}^0(\underline{H}^1_{ex}(\Omega^\bullet_X)) \cong \underline{H}^1_{ex}(\mathbb{C}).,$$

これは　(1, 2, 2)　より　$\cong (j_-)_*\mathbb{C}/\mathbb{C} \cong 0$。

以上より，B上で，したがってX上で，

$$0 \to \underline{H}^1_{ex}(\Omega^0_X) \to \underline{H}^1_{ex}(\Omega^1_X) \to \cdots\cdots \to \underline{H}^1_{ex}(\Omega^n_X) \to 0$$

が exact 列となることがわかった。

命題として書いておく。

命題．　Xを複素解析多様体，Dを相対コンパクトな擬凸領域としよう。　このとき，

$$0 \to \underline{H}^1_{ex}(\Omega^0_X) \xrightarrow[\underline{H}^1_{ex}(d)]{} \underline{H}^1_{ex}(\Omega^1_X) \xrightarrow[\underline{H}^1_{ex}(d)]{} \cdots \xrightarrow[\underline{H}^1_{ex}(d)]{} \underline{H}^1_{ex}(\Omega^n_X) \to 0$$

は完全列となる。　言い変えれば　complex（$\underline{H}^1_{ex}(\Omega^\bullet_X)$, $\underline{H}^1_{ex}(d)$）は　0 - complex と quasi - isomorphe。

1.7. 1.6と同様にして $\underline{H}^1_b(\Omega^\bullet_X)$ は $\mathbb{C}_B$ に quasi isomorph, すなわち

$$0 \to \mathbb{C}_B \to \underline{H}^1_b(\Omega^0_X) \to \underline{H}^1_b(\Omega^1_X) \to \cdots$$
$$\cdots \to \underline{H}^1_b(\Omega^n_X) \to 0 \quad \text{exact}$$

がわかる。ただし $\mathbb{C}_B$ は B上で $\mathbb{C}$ 他で0なる層を表わす。この証明より

$$\underline{H}^1_b(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}_B \quad , \quad \underline{H}^q_b(\mathbb{C}) = 0 \quad q \geqq 2$$

がわかる。$\underline{\Gamma}_b(\mathbb{C}) = 0$ もすぐわかる。

1.8 1.4 および spectral sequence argument により X上の coherent sheaf $\mathcal{F}$ に対し

$$H^{p+1}_B(X, \mathcal{F}) \cong H^p(B, \underline{H}^1_b(\mathcal{F}))$$

がしたがう。

さらに 1.7 より

$$H^{p+1}_B(X, \mathbb{C}) \cong H^p(B, \underline{H}^1_b(\mathbb{C}))$$
$$\cong H^p(B, \mathbb{C})$$

がしたがう。これは Thom-Gysin isomorphism である。

§2. C.R 多様体上の ポアンカレ補題

2.1. Mを C^∞−多様体，$T(M)$を接ベクトル束，$T^{\mathbb{C}}(M)$をその複素化とする。

$T^{\mathbb{C}}(M)$の部分ベクトル束 S で 条件

(2.1.1) $S \cap \overline{S} = 0$

(2.1.2) $[\xi, \eta] \in \Gamma(S)$ ，$\forall \xi, \eta \in \Gamma(S)$ に対し，

を満たすものが与えられたとき，組 (M, S) を C.R. 多様体と呼ぶ。

$f : M \to M'$ を二つの C.R.多様体 (M, S)，(M', S') の間の C^∞−写像とするとき，

$$df \otimes 1_{\mathbb{C}} : T^{\mathbb{C}}(M) \longrightarrow T^{\mathbb{C}}(M')$$

が S を S' に写す；$df \otimes 1_{\mathbb{C}}(S) \subset S'$，とき f を C.R. 写像と呼ぶ。

これにより C.R.多様体と C.R 写像のつくるカテゴリーが定まる。このカテゴリーは 直積，逆像 等を持っている。

2.2. (M, S) を C.R.多様体とする。exact 列

$$0 \to \overline{S} \xrightarrow[j]{} T^{\mathbb{C}}(M) \longrightarrow \mathcal{T}(M) \longrightarrow 0$$

により 正則接ベクトル束 $\mathcal{T}(M)$ を定義する。なぜ正則ベクトル束と呼ぶかは ここでは省略する。

M' を C^∞ 多様体, $f: M' \to M$ を C^∞-写像とするとき C.R. 構造 S の f による逆像が存在することは上に注意したが, それを S' とする。
$f_*: S' \longrightarrow f^*S = M' \times_M S$ を M' 上のベクトル束の射とし, これより $f_b: \hat{T}(M') \longrightarrow f^*\hat{T}(M)$ が導かれる。 f_b は単射になる。

2.3. (M, S) を C.R. 多様体とする。余接束 $E^n = \Lambda^n T^{\mathbb{C}}(M)^*$ の開集合 U 上の横断を U 上の n 次微分形式と呼ぶ。外微分を d とするとき複体 $(E^{\cdot}, d)$ は次のような Filtration を持つ: $F^p(E^n)$ は E^n の部分束で, U 上の横断は

$$F^p(E^n)(U) = \{ \varphi \in E^n(U) ;\ \forall x \in U \text{ に対し}, v_i \in \overline{S}_x, i = 1, 2, \cdots, n-p+1, u_j \in T^{\mathbb{C}}(M)_x, j = 1, 2, \cdots, p-1 \text{ なら } \varphi_x(u_1, \cdots u_{p-1}, v_1, \cdots v_{n-p+1}) = 0 \}_{\circ}$$

$dF^p(E^n) \subset F^p(E^{n+1})$ が成り立つ。

$$C^{p,q}(M) = F^p(E^{p+q}) / F^{p+1}(E^{p+q})$$

と置こう。
$C^{p,q}(M)$ の横断を型 (p, q) の微分形式と呼ぶ。

$$C^{p,q}(M) \cong \Lambda^p \hat{T}(M)^* \otimes \Lambda^q \overline{S}^*$$

である。

型(p,q)の微分形式φの外微分$d\varphi$は

$$d\varphi = d'\varphi + d''\varphi + \beta\varphi,$$

但，$d'\varphi$の型は$(p+1, q)$，$d''\varphi$の型は$(p, q+1)$，$\beta\varphi$の型は$(p+2, q-1)$，と分解され 残りの成分は0となる。

$f: M \to M'$をC.R.写像とする。M'上の微分形式φのfによる逆像を$f^*\varphi$と記すと，f^*は型を保存し，

$$\begin{array}{ccc} C^{p,q}(M) & \xleftarrow{\ f^*\ } & C^{p,q}(M') \\ d''\downarrow & & \downarrow d'' \\ C^{p,q+1}(M) & \xleftarrow{\ f^*\ } & C^{p,q+1}(M') \end{array} \qquad \text{可換}$$

となる。d', βも同様。

2.4.

$$\Omega^p_M = \ker\ d'': C^{p,0}(M) \longmapsto C^{p,1}(M)$$

とおく。

$$0 \to \Omega^0_M \xrightarrow{d} \Omega^1_M \xrightarrow{d} \cdots\cdots \xrightarrow{d} \Omega^{n-1}_M \xrightarrow{d} \Omega^n_M \longrightarrow 0$$

なる微分複体が得られる。

我々の目的はこの複体についてのポアンカレ補題である。

すなわち列

$$0 \to \mathbb{C} \xrightarrow{\varepsilon} \Omega^0_M \xrightarrow{d} \Omega^1_M \longrightarrow \cdots\cdots \longrightarrow \Omega^{n-1}_M \longrightarrow \Omega^n_M \to 0$$

が M についてどのような条件のもとに exact 列となるかを見ることにある。

微分計算

2.5. $E \to M$ を rank r のベクトル束，U を $\mathbb{C}^1$ 内の領域とするとき $\sigma: U \ni z \longmapsto \sigma_z \in \Gamma(M, E)$ が C^∞（又は 正則）であるとは $\sigma(x): U \ni z \longmapsto \sigma_z(x) \in E_x \cong \mathbb{C}^r$ が各 x について C^∞（又は正則）となることを言う。σ が C^∞ なら

$$\frac{\partial}{\partial z}\sigma, \frac{\partial}{\partial \bar z}\sigma \quad : U \longmapsto \Gamma(M, E)$$

も同じく C^∞ であり，U 内の rectifiable 曲線 γ に対し積分

$$\int_\gamma \sigma \, dz \in \Gamma(M, E)$$

が定義される。σ が正則なら この積分は γ の両端点にのみ依存して定まる。

2.6. U を $\mathbb{C}^1$ 内の領域，M を C^∞-多様体と

$$j_z : \begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & U \times M \\ \Psi & & \Psi \\ x & \longrightarrow & j_z(x) = (z, x) \end{array}, \quad z \in U,$$

同じく

$$j_x : U \longrightarrow U \times M, \quad j_x(z) = (z, x), \quad x \in M,$$

と記す.

$U\times M$ 上の p 次微分形式 φ は次のとき projetable と呼ばれる. $(z,x)\in U\times M$, ξ_i, $i=1,2,\cdots,p,\in T^{\mathbb{C}}_{(z,x)}(U\times M)$ に対し少なくともひとつの ξ_i が $\xi_i\in dj_x(T^{\mathbb{C}}_z(U))$ となっているなら

$$\varphi_{(z,x)}(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_p)=0 \quad .$$

$\varphi=\varphi_0+\varphi_1$ と φ を projetable 成分 φ_0 とそうでないものに分けると, $j_z^*\varphi_0=j_z^*\varphi$.

また $j_z^*\varphi_0=\sigma_z$ により $\sigma: U\longrightarrow\Gamma(\mathcal{E}^p(M))$ を定義するとき これが正則となる条件は

$$\frac{\partial}{\partial\bar z}\varphi_0((z,x);\xi_1,\cdots,\xi_p)=0,\quad \forall(z,x)\in U\times M$$
$$\forall\,\xi_1,\cdots\xi_p\in dj_z(T^{\mathbb{C}}_x(M))$$

である.

2.6. 多様体 V 上の, ベクトル場 ξ による Lie 微分は

$$(\theta_\xi\varphi)(\xi_1\cdots\xi_p)=\xi(\varphi(\xi_1,\cdots\xi_p))$$
$$-\sum_1^p\varphi(\xi_1,\cdots,[\xi,\xi_j],\cdots,\xi_p)$$

但 $\xi_i\in\Gamma(T^{\mathbb{C}}(V))$, $p=\mathrm{rank}\,\varphi$,

と定義される

多様体 $U\times M$; $U\subset\mathbb{C}^1$, において $\xi\in\Gamma(T^{\mathbb{C}}(U))$

なるベクトル場を $U \times M$ 上のベクトル場と考え その Lie 微分を θ_{ξ}, $\theta(\xi)$ と書く。

2.5 に述べたことは Lie 微分を用いて次のように述べられる: M C^{∞}-多様体, $U \subset \mathbb{C}^1$,

φ を $U \times M$ 上の rank p の微分形式とするとき,

(2.6.1) $z \longmapsto j_z^* \varphi$ が正則となるのは $j_z^* \theta(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}) \varphi = 0$ のときで, そのときにかぎる.

(2.6.2) $j_z^* \theta(\frac{\partial}{\partial z}) \varphi = \frac{\partial}{\partial z}(j_z^* \varphi)$, 右辺は 2.5 の意味.

(2.6.3) $j_z^* \theta(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}) \varphi = 0$ のとき

$$\int_{\gamma} j_z^* \theta(\frac{\partial}{\partial z}) \varphi \, dz = j_b^* \varphi - j_a^* \varphi,$$

ただし γ は a, b を結ぶ rectifiable curve で 左辺の積分は 2.5 の意味.

(2.6.4) $\sigma : U \longmapsto \Gamma(\mathcal{E}^p(M))$ が正則なとき

$$d_M \left(\int_{\gamma} \sigma \, dz \right) = \int_{\gamma} d_M \sigma \, dz$$

となることもわかる. ただし d_M は M 上の外微分。

2.7. 以上の結果を M が C.R. 多様体 (M, S) のときに もっとくわしく見よう。(2.8 で見る)

まず M 上のベクトル場 ξ に対し

$$(i_\xi \varphi)_x (v_1, v_2, \cdots, v_{p-1}) = \varphi_x(\xi(x), v_1, \cdots, v_{p-1}),$$

$$v_i \in T_x^{\mathbb{C}}(M), \quad i = 1, \cdots, p-1,$$

で定義される 内部積 i_ξ は次の性質をもつことに注意する。

φ が 型 (p, q) の微分形式 で $\xi \in \Gamma(\mathfrak{T}(M))$ なら $i_\xi \varphi$ は型 $(p-1, q)$ の微分形式 となり, $\xi \in \Gamma(\overline{\mathfrak{T}})$ なら $i_\xi \varphi$ は型 $(p, q-1)$ の微分形式になる.

これより次のことがわかる.

φ を 型 (p, q) の微分形式 とし $(\theta_\xi \varphi)_{(r,s)}$ で Lie 微分 $\theta_\xi \varphi$ の (r, s) 成分を記せば.

(2.7.1) $\xi \in \Gamma(\mathfrak{T}(M))$ なら

$$(\theta_\xi \varphi)_{(p,q)} = d' i_\xi \varphi + i_\xi d' \varphi$$

$$(\theta_\xi \varphi)_{(p-1,q+1)} = d'' i_\xi \varphi + i_\xi d'' \varphi$$

$$(\theta_\xi \varphi)_{(p+1,q-1)} = \beta i_\xi \varphi + i_\xi \beta \varphi$$

他の成分 は 0.

(2.7.2) $\xi \in \Gamma(\overline{\mathfrak{T}})$ なら

$$(\theta_\xi \varphi)_{(p,q)} = d'' i_\xi \varphi + i_\xi d'' \varphi$$

$$(\theta_\xi \varphi)_{(p+1,q-1)} = d' i_\xi \varphi + i_\xi d' \varphi$$

他の成分は 0,

2.8 (M, S) をC.R.多様体，Uを$\mathbb{C}^1$の領域とする．
$(U \times M,\ T^{1,0}(U) \times S)$ はC.R.多様体となり j_z，j_x，(2.6)，はC.R.写像となる．また正則接ベクトル束 $\hat{T}(U \times M)$ は $T^{1,0}(U) \times \hat{T}(M)$ と同型になる．

$U \times M$ または M の型 $(1,0)$，$(0,1)$，$(2,-1)$ の外微分をそれぞれ

$$\partial,\ \bar{\partial},\ B \qquad , \qquad d',\ d'',\ \beta$$

と書こう．

$$d = d_M = d' + d'' + \beta$$

$$d_{U \times M} = \partial + \bar{\partial} + B$$

である．また 2.3 より

$$j_z^* \partial = d' j_z^* \qquad 等$$

が成立つ．

$\zeta \in \Gamma(T^{\mathbb{C}}(U))$，$\varphi \in \Gamma(\mathcal{E}^{p,0}(U \times M))$ に対し $\theta(\zeta)\varphi$ は $(p-1, 1)$ 成分と $(p,0)$ 成分しか持たず，$(p-1, 1)$ 成分の方は

$$(\theta(\zeta)\varphi)(\xi_1, \cdots, \xi_{p-1}, \eta) = -\varphi(\xi_1, \cdots, \xi_{p-1}, dj_U([\zeta, w]))$$

で与えられる．但 $\xi_1 \cdots \xi_{p-1} \in \Gamma(\hat{T}(U \times M))$，$\eta = (w, \xi) \in \Gamma(T^{0,1}(U) \times \bar{S})$ で，$v \in \Gamma(T^{\mathbb{C}}(U))$ に対し $(dj_U(v))(z, x) = dj_x(v(z))$ と定義された．

これより $j_z^* \theta(\zeta)\varphi \in \Gamma(\mathcal{E}^{p,0}(M))$ がわかる．

(2.7.1) より，成分を見て，

$$j_z^*\theta\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi = j_z^*\left(\partial i\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi + i\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\partial\varphi\right)$$

$$j_z^*\left(\bar{\partial} i\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi + i\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\bar{\partial}\varphi\right) = 0 \quad \cdots\cdots\cdots(イ)$$

を得る。

さて $\bar{\partial}\varphi = 0$ を仮定すれば 2.6 より

$j_z^*\theta\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi = 0$ がしたがう．実際

$$\left(j_z^*\theta\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi\right)(x;\xi_1,\cdots,\xi_p)$$

$$= \frac{\partial}{\partial z}\left(\varphi((z,x);dj_z\xi_1,\cdots,dj_z\xi_p)\right) = 0$$

ただし $\xi_i \in T_x^c(M)$, $i=1,\cdots,p$。

さらに (イ) 式に $\bar{\partial}\varphi = 0$ を代入して

$$d'' j_z^* i\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi = j_z^*\bar{\partial} i\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi = 0 \quad .$$

命題：φ を型 $(p,0)$ の $U\times M$ 上の微分形式で $\bar{\partial}\varphi = 0$。$\gamma$ を点 a, b をむすぶ U 内の rectifiable curve とする．このとき

$$d'\left(\int_\gamma j_z^* i\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi\, dz\right) + \int_\gamma\left(j_z^* i\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\partial\varphi\right)dz$$

$$= j_b^*\varphi - j_a^*\varphi$$

および

$$d''\left(\int_\gamma j_z^* i\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi\, dz\right) = 0$$

証. $j_z^* \theta(\frac{\partial}{\partial \bar z})\varphi = 0$ だから (2,6,3) より

$$\int_\gamma j_z^*\theta(\frac{\partial}{\partial \bar z})\varphi\, dz = j_b^*\varphi - j_a^*\varphi .$$

一方 $j_z^*\theta(\frac{\partial}{\partial \bar z}) = j_z^*(\partial i(\frac{\partial}{\partial \bar z}) + i(\frac{\partial}{\partial \bar z})\partial)$

$$= d' j_z^* i(\frac{\partial}{\partial \bar z}) + j_z^* i(\frac{\partial}{\partial \bar z})\partial ,$$

d' と積分が可換だから第一式は示された。

$d'' j_z^* i(\frac{\partial}{\partial \bar z})\varphi = 0$ を上に見たが、これより第二式がわかる。

ポアンカレ補題

2.9. MをC.R.多様体, Uを $\mathbb{C}^1$ の領域で点 0, 1 を含むとする。

C.R.写像 $h: U\times M \longrightarrow M$ が次の条件を満すとき h を M のひとつのC.R. contraction と呼ぶ。

(2.9.1) $h(1, x) = x \qquad \forall x \in M$

(2.9.2) $a \in C^\infty(U)$, $a(0) = 0$ と

C.R.写像 $h^1, h^2 : U\times M \longrightarrow M$ で

$$dh^1_{(0,x)} \circ dj_0 = 0$$

を満たすものが存在して

$$dh_{(z,x)} = dh^1_{(z,x)} + a(z)\, dh^2_{(z,x)}$$

と書ける。

命題. M を C.R. contraction h を持つ C.R. 多様体とする. M 上の型 $(p,0)$ の微分形式 φ が閉形式 $d\varphi = 0$ なら, 型 $(p-1,0)$ の微分形式 ψ で

$$\varphi = d\psi$$

$$d''\psi = 0$$

を満たすものが存在する。

証. $\Phi = h^*\varphi$ により $U\times M$ 上の型 $(p,0)$ の微分形式を定義する. $d_{U\times M}\Phi = 0$. 2.8 の命題より

$$d'\left(\int_\gamma j_z^* i\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\Phi \, dz\right) = j_1^*\Phi - j_0^*\Phi$$

$$d''\left(\int_\gamma j_z^* i\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\Phi \, dz\right) = 0,$$

ただし γ は U 内の $0, 1$ をむすぶ curve.

$$j_z^*\Phi(x, \xi_1, \cdots \xi_p) = \varphi(h(z,x); dh_{(z,x)}\cdot dj_z \xi_1, \cdots)$$

$$= \varphi(h(z,x); (dh^1_{(z,x)}\cdot dj_z + a(z)\, dh^2_{(z,x)}\cdot dj_z)\xi_1, \cdots)$$

となるから仮定より $j_0^*\Phi = 0$. また $j_1^*\Phi = \Phi$.

ゆえに

$$\psi = \int_\gamma j_z^* i\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) h^*\varphi \, dz$$

が答となる。

2.10. C.R.写像 $h: U \times M \to M$ が (2.9.1) および

(2.9.2)′ $h(0, x) = 0$, ただし 0 は M の fixed pt.

を満たせば h は C.R. contraction となる。

また h が $G \subset M$ なる 0 の近傍のみで C.R なら そこでポアンカレ補題が成立つので 2.9 の命題は局所的，大域的にともに正しい。

系. M の各点においてその近傍に C.R. contraction が存在すれば

$$0 \to \mathbb{C} \to \underline{\Omega}_M^0 \xrightarrow{d} \underline{\Omega}_M^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \underline{\Omega}_M^n \to 0$$

は exact となる。ただし $\underline{\Omega}_M^p$ は Ω_M^p の層化。

系 次のスペクトル列が存在する

$$E_1^{pq} = H^q(M, \underline{\Omega}_M^p) \Rightarrow H^{p+q}(M, \mathbb{C})$$

2.11 $n \geqq 3$ とし M を $2n-1$ 次元の強擬凸な C.R 多様体 (s.p.c. manifold) とすれば J. Kohn と N. Tanaka より $H^q(M, \underline{\Omega}_M^p)$ は C.R. 多様体に associate した Laplacian (hypoelliptic) の harmonic (p, q)-forms の全体 $\mathcal{H}^{p,q}(M)$ と isomorphe になる。

$$H^q(M, \Omega_M^p) \cong \mathcal{H}^{p,q}(M)。$$

このときは 2.10 の系のスペクトル列は退化するので

$$H^m(M, \mathbb{C}) \cong \bigoplus_{p+q=m} H^q(M, \Omega_M^p)$$
$$\cong \bigoplus_{p+q=m} \mathcal{H}^{p,q}(M)$$

なる Hodge 分解が得られる。　ここで M は local に C.R-contraction を持つとしておかねばならなかった。

Tanaka によればさらに

$$\mathcal{H}^{p,q}(M) \cong \mathcal{H}^{n-p,n-q-1}(M)$$

がわかっている。

こうして C.R-contraction を持つ s.p.c manifold の Hodge theory が得られた。

2.12. M が Stein manifold V の境界となっているとき, Tanaka-Kohn より

$$E_1^{pq} = H^q(M, \Omega_M^p) = 0 \qquad q \neq 0,\ n-1$$

したがって 2.10 の系より, de Rahm cohomology による

$$\mathcal{H}^i(\Gamma(M, \Omega_M^\cdot)) \cong H^i(M, \mathbb{C}), \quad 1 \leq i \leq n-2$$

がわかる。

§3. 複素多様体に埋められた強擬凸超曲面のコホモロジーの役割.

3.1. Xを複素多様体, $T_X^{1,0}$ を正則接ベクトル束とする。M を実余次元1 の部分多様体, Nをこの埋めこみの normal bundle とする。

$$S = T_M^{\mathbb{C}} \cap T_X^{1,0}$$

として, (M, S) は C.R. 多様体となる。inclusion

$$i : (M, S) \longrightarrow (X, T_X^{1,0})$$

は C.R. 写像となり,

$$i_b : \hat{T}_M \longrightarrow i^* T_X^{1,0} \cong M \times_X T_X^{1,0}$$

は injection となる (2.2) が Mの余次元が1だから

$$\hat{T}_M \cong i^* T_X^{1,0} .$$

可換図式

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \bar{S} \arrow[r] \arrow[d] & T_M^{\mathbb{C}} \arrow[r] \arrow[d] & \hat{T}_M \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr\wr"] & 0 \quad (\text{exacts}) \\
0 \arrow[r] & i^* T_X^{0,1} \arrow[r] & i^* T_M^{\mathbb{C}} \arrow[r] \arrow[d] & i^* T_X^{1,0} \arrow[r] & 0 \\
 & & N^{\mathbb{C}} \ (\text{exact}) \arrow[d] & & \\
 & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

より exact 列

$$0 \to \bar{S} \longrightarrow i^* T_X^{0,1} \xrightarrow[\nu]{} N^{\mathbb{C}} \longrightarrow 0$$

が得られる。（　$N^{\mathbb{C}}$ は正則ベクトルバンドルになることがわかる）

$$\mathcal{E}_X^{p,q} = \Lambda^p(T_X^{1,0})^* \otimes \Lambda^q(T_X^{0,1})^*$$

は M上で $\cong \Lambda^p(\hat{T}_M)^* \otimes \Lambda^q(T_X^{0,1})^*$

$$\mathcal{E}_M^{p,q} = \Lambda^p(\hat{T}_M)^* \otimes \Lambda^q(\bar{S})^*,$$

$$\mathcal{J}_M^{p,q} = \Lambda^p(\hat{T}_M)^* \otimes \Lambda^{q-1}(\bar{S})^* \otimes (N^{\mathbb{C}})^*$$

とおく。このとき　M上で

$$0 \to \mathcal{J}_M^{p,q} \longrightarrow \mathcal{E}_X^{p,q} \longrightarrow \mathcal{E}_M^{p,q} \to 0$$

は exact となる。したがって

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & \to & \Omega_X^p & \to & \Omega_M^p & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & \mathcal{E}_X^{p,0} & \cong & \mathcal{E}_M^{p,0} & & \\
 & & & & \downarrow \bar{\partial} & & \downarrow \bar{\partial}_b & & \\
0 & \to & \mathcal{J}_M^{p,1} & \to & \mathcal{E}_X^{p,1} & \to & \mathcal{E}_M^{p,1} & \to & 0 \\
 & & \downarrow \bar{\partial} & & \downarrow \bar{\partial} & & \downarrow \bar{\partial}_b & & \\
0 & \to & \mathcal{J}_M^{p,2} & \to & \mathcal{E}_X^{p,2} & \to & \mathcal{E}_M^{p,2} & \to & 0
\end{array}$$

矢はすべて exact

$\bar{\partial}$, $\bar{\partial}_b = d''_M$ の意味はふつうのとおり。

なる可換図式を得るので

$$\Phi_{M/X}^p = \ker \bar{\partial} : \mathcal{J}_M^{p,1} \longrightarrow \mathcal{J}_M^{p,2}$$

と置くと　M上で

$$0 \to \Omega_X^p \to \Omega_M^p \to \Phi_{M/X}^p \to 0$$

なる exact 列を得る。

3.2. M上の complex の exact 列

$$0 \to \Omega^\bullet_X \to \Omega^\bullet_M \to \Phi^\bullet_{M/X} \to 0$$

を考えよう。

Mが局所的に C.R. contraction を持つなら §2 のポアンカレ補題より quasi isomorphism

$$\Omega^\bullet_X \underset{Qis}{\cong} \mathbb{C} := \{ 0 \to \mathbb{C} \to 0 \to 0 \to \cdots \}$$ のこと。

$$\Omega^\bullet_M \underset{Qis}{\cong} \mathbb{C}$$

を得る。

したがって $\Phi^\bullet_{M/X} \underset{Qis}{\cong} 0$ 。

3.3 以下 M は 強擬凸な 余次元1 の閉超曲面 で C.R. 多様体と見るとき 局所的に C.R. contraction を持つとする。Mの囲む領域 を D とする。Dは強擬凸領域。

<u>Bochner extension</u> U open $\subset X$, $\omega = U \cap M$

$\varphi \in \Gamma(\omega, \Omega^p_M)$ とするとき φ は $U \cap D$ に holomorphic に extend される又 拡張は一意的 :

$$\exists_1 \tilde{\varphi} \in \Gamma(U \cap D, \Omega^p_X), \quad \tilde{\varphi} \in C^\infty(U \cap \bar{D})$$

$$\varphi = \tilde{\varphi} \text{ on } \omega .$$

この extension theorem より 写像

$$\Omega^\bullet_M \xrightarrow{\rho'} (j_-)_*(\Omega^\bullet_X \mid D)$$

が定義される。 ρ'と 1.4 の isomorphism $(j_-)_*(\Omega_X^{\cdot}|D) \cong \underline{H}_f^1(\Omega_X^{\cdot})$ と合成して

$$\rho^{\cdot} : \Omega_M^{\cdot} \longmapsto \underline{H}_f^1(\Omega_X^{\cdot})$$

なる complex の monomophism を得る.

以上よりM上のcomplex の exact 列の対応

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \Omega_X^{\cdot} & \longrightarrow & \Omega_M^{\cdot} & \longrightarrow & \Phi_{M/X}^{\cdot} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow \rho' & & \downarrow \sigma & & \\
0 & \longrightarrow & \Omega_X^{\cdot} & \longrightarrow & (j_-)_*(\Omega_X^{\cdot}|D) & \xrightarrow{\varepsilon} & \underline{H}_{ex}^1(\Omega_X^{\cdot}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \wr\| & & & & \\
 & & & & \underline{H}_f^1(\Omega_X^{\cdot}) & & & &
\end{array}$$

を得る. 才二行は (1.2.2) に他ならぬ.

1.6, 1.7 と 2.9 より縦列は Quasi isomorph となる.

すぐわかることとして例えば

$$\mathbf{H}^{\cdot}(M, \underline{H}_f^1(\Omega_X^{\cdot})) \cong \mathbf{H}^{\cdot}(M, \Omega_M^{\cdot}) \cong H^{\cdot}(M, \mathbb{C}) \underset{(1.8)}{\cong} H_M^{\cdot}(X, \mathbb{C}) .$$

3.4.

$$\Omega_X^{\cdot}(M) = \{ u \in (j_-)_*(\Omega_X^{\cdot}|D) \quad \varepsilon u \in \text{Image } \sigma \}$$

と置く。

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & \Omega_X^{\cdot} & \to & \Omega_X^{\cdot}(M) & \longrightarrow & \Phi_{M/X}^{\cdot} & \to 0 & & \text{exact on } \overline{D}. \\
 & \| & & \downarrow \text{QIS} & & \downarrow \text{QIS} & & & \\
0 \to & \Omega_X^{\cdot} & \longrightarrow & (j_-)_*(\Omega_X^{\cdot}|D) & \longrightarrow & \underline{H}^1_{ex}(\Omega_X^{\cdot}) & \to 0 & &
\end{array}$$

となる.

したがって

$$\begin{aligned}
H^{\cdot}(D, \mathbb{C}) &\cong \mathbf{H}^{\cdot}(\overline{D}, (j_-)_*(\Omega_X^{\cdot}|D)) \\
&\cong \mathbf{H}^{\cdot}(\overline{D}, \Omega_X^{\cdot}(M))
\end{aligned}$$

を得る. これは de Rahm cohomology による $H^{\cdot}(D, \mathbb{C})$ の表現で Atiyah-Hodge-Grothendieck の類似と考えられる.

3.5 3.4をもう少し見よう。ここはまだできていないがおそらく正しい。

$\Phi_{M/X}^{\cdot}$ はその定義より $\Omega^{\cdot}(N^{\mathbb{C}})$ すなわち normal bundle (それは M上正則線バンドルになる) $N^{\mathbb{C}}$ に値をとる正則形式である. D が強擬凸ならば $N^{\mathbb{C}}$ は negative になる. それは $M=\partial D$ の定義函数の局所表示 $U_j \cap M = \{f_j = 0\}$ $D \cap U_j = \{f_j < 0\}$ において, $g_{ij} = f_i/f_j$ が N を定義するので N 上の metric として $h_i \equiv f_i$ をとれば

$P_i = |g_{ij}| I_j$ 。 この curvature は Levi form に他ならない、ことから推測される。 N^C が negative なら $H^q(M, \Omega^p(N^C)) = 0$ となることがわかる (Tanaka)。

次に D を Stein と仮定すれば Kohn - Tanaka より $H^q(\bar{D}, \Omega^p_X) = 0 \quad q \neq 0$.

したがって exact 列

$$\to H^q(\bar{D}, \Omega^p_X) \to H^q(\bar{D}, \Omega^p_X(M)) \to H^q(M, \Omega^p(N^C)) \to$$

より $H^q(\bar{D}, \Omega^p_X(M)) = 0, \quad q \neq 0$.

これと 3.4 より

$$H^i(D, \mathbb{C}) \cong \mathcal{H}^i(\Gamma(\bar{D}, \Omega^{\cdot}_X(M)))$$

なる、Atiyah - Hodge 型の de Rham cohomology による表現が可能となった。

(注) D Stein のとき $H^i(D, \mathbb{C}) = 0 \quad i > n$,

$$H^i(D, \mathbb{C}) \cong \mathcal{H}^i(\Gamma(D, \Omega^{\cdot}_X)) \quad \forall i$$

は良く知られている。

文献.

De Rahm cohomology に関するものは略.

N. Tanaka. Lectures in Mathematics, Vol. 9, Dept. Math. Kyoto Univ. published by Kinokuniya

T. Kori. Exposé fait dans le Séminaire de G.A.G.AN. GRA.GRO. 1977/78; Lemme de Poincaré sur les variétés cauchy-riemanniennes. p.1 – p.20