数理解析研究所講究録
第 372 巻 1979 年 85-98

ある種の特異点を持ったsubvarietyによるChern類の実現について

名大理　　森本 宏

§0 導入

正則ベクトルバンドルのChern類を実現するsubvarietiesの存在については, A. Grothendieck [2], M. Cornalba and P. Griffiths [1]等の結果がある. この論文では正則ベクトルバンドルのChern類を, なるべく単純な特異点を持ったsubvarietyで実現することを考える. 詳しい証明は[3]参照.

この論文を通して, Mをn次元パラコンパクト(閉or開)複素多様体, $G_{g,m}$を$\mathbb{C}^{g+m}$内の原点を通るg-plane全体のなす複素グラスマン多様体, $\gamma_{g,m}=(E_{g,m}, \pi_{g,m}, G_{g,m})$を$G_{g,m}$上の普遍バンドル, すなわち$\tau\in G_{g,m}$及び$\tau$内のベクトル$v$との組$(\tau, v)$全体とし, $\xi=(E, \pi, M)$をM上のrankがgの複素正則ベクトルバンドルで次の仮定を満たすものとする.

<u>仮定</u>. ある整数m及びある正則写像$\Phi: M\to G_{g,m}$が存在し

て，$\xi \cong \Phi^*(\gamma_{q,m})$（解析的同値）を満たす．

われわれの主定理は以下の通りである．「準線型」，「実現」の定義については§1，§4参照．

<u>主定理</u>．任意の整数 $1 \leq k \leq n$ に対して，ξ の Chern 類 $C_k(\xi)$ は M の準線型な subvariety V で実現される．特に，V の特異点は σ-process のみにより解消され，$[n/2] \leq k \leq n$ なる k に対しては，V は non-singular にとれる．

特に M が Stein 多様体のときには，M 上の任意の正則ベクトルバンドルが上記の仮定を満たすことから次の系を得る．

<u>系</u>．Stein 多様体上の任意の正則ベクトルバンドルの Chern 類は，準線型な subvariety で実現される．

主定理の証明の方針は以下の通りである．$p = q+1-k$ と置き，$G_{q,p+m}$ を $\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^{q+m}$ 内の q-plane 全体のなす複素グラスマン多様体とし，$G_{q,p+m}$ 内の Schubert varieties $F_1 \supset F_2 \supset F_3$ を，

$$F_r = \{\tau \in G_{q,p+m} ; \operatorname{codim}(\pi_p(|\tau|)) \geq r\}$$

により定義する．ここで$|\tilde{\sigma}|$は$\tilde{\sigma}$の$\mathbb{C}^p\times\mathbb{C}^{q+m}$におけるcarrierで，$\pi_p$は射影$\mathbb{C}^p\times\mathbb{C}^{q+m}\to\mathbb{C}^p$とする．定義により$F_p$は$G_{q,m}$と双正則であるから，この双正則写像を通して写像$\Phi: M\to G_{q,m}$を$M$から$G_{q,p+m}$への写像とみなすことにする．$\xi$の全空間$E$から$\mathbb{C}^p$への正則写像$f$に対して，われわれはある正則写像$\Phi_f: M\to G_{q,p+m}$を対応させる．$\Phi$を$\Phi_f$に変形し，$\Phi_f$が$F_1$のすべてのstrata（i.e. F_1-F_2, F_2-F_3, $\cdots$, F_p）にtransverse-regularとなるようにできる．このΦ_fによって，F_1をpull backすれば求めるChern類の準線型なsubvarietyによる実現が得られる．

§1. 準線型なsubvarieties

p, qを$p\leq q$なる正整数とし，$\mathfrak{M}(p,q)$をp行q列複素行列全体とする．整数rに対して，

$$\mathfrak{M}_r(p,q)=\{A\in\mathfrak{M}(p,q);\ \mathrm{corank}(A)\geq r\}$$

と置く．ただし corank $= p-$ rank とする．$O_{p,q}$をp行q列零行列とすれば，

$$\mathfrak{M}_1(p,q)\supset\mathfrak{M}_2(p,q)\supset\cdots\supset\mathfrak{M}_p(p,q)=O_{p,q}$$

が成立する．

n次元複素多様体Mのsubvarietyの列

(1.1) $\qquad V_1\supset V_2\supset\cdots\supset V_p$

を考える.

定義1.2. 列(1.1)は次の条件をみたすときm位の準線型であると言う.

(a) V_pはnon-singularで, 任意の整数$2 \leq k \leq p$に対してV_kはV_{k-1}の特異点全体からなる.

(b) 分割$(V_1 - V_2) \cup (V_2 - V_3) \cup \cdots \cup V_p$は$V_1$のregular stratificationを与える.

(c) 任意の整数$1 \leq k \leq p$及び任意の点$x_0 \in V_k - V_{k+1}$(ただし$V_{p+1} = \phi$)に対して, Mにおけるx_0のある近傍U, $\mathfrak{M}(k, m+k) \times \mathbb{C}^s$ $(s = n - k(m+k))$における$(O_{k,m+k}; 0)$のある近傍W, 及び双正則写像$\varphi : U \to W$が存在して, $\varphi(x_0) = (O_{k,m+k}; 0)$かつ, 任意の整数$1 \leq r \leq k$に対して,

$$\varphi(U \cap V_r) = W \cap (\mathfrak{M}_r(k, m+k) \times \mathbb{C}^s)$$

を満たす.

条件(a), (b)は条件(c)から導かれる. 列(1.1)がm位の準線型列で$V_k \neq \phi$ならば, MにおけるV_kの余次元は$k(m+k)$ $(1 \leq k \leq p)$となる.

<u>定義1.3.</u> Mの subvariety V が m位の準線型であるとは，$V_1 = V$ なる m位の準線型列(1.1)が存在するときを言う．このとき列(1.1)を associated sequence と言う．

特に余次元 $m+1$ の non-singular subvariety は m位の準線型な subvariety である．従って M自身も準線型と言うことにする．

$\mathfrak{M}(p, q)$, $G_{q, p+m}$ 内には次のような準線型列がある．

<u>補題1.4.</u> $\mathfrak{M}_1(p, q) \supset \mathfrak{M}_2(p, q) \supset \cdots \supset O_{p,q}$ は $\mathfrak{M}(p, q)$ 内の $q-p$ 位の準線型列である．

$O_{p,q}$ の近傍における準線型性は定義から明らかである．その他の点において条件(c)が成立することは証明を要するが，ここでは省略する．

上記の補題と Schubert variety の定義から，次の補題が得られる．

<u>補題1.5.</u> $G_{q, p+m}$ における Schubert variety の列 $F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_p$ は $q-p$ 位の準線型列である．

準線型性は，transverse-regular mapに関して次のような不変性を持っている．

補題1.6. M, Nを複素多様体，$V_1 \supset V_2 \supset \cdots \supset V_p$ をNにおけるm位の準線型列とする．正則写像$f: M \to N$ が，V_1のすべてのstrata (i.e. $V_1 - V_2$, $V_2 - V_3$, $\cdots$, V_p) に対してtransverse-regularならば，M内の列 $f^{-1}(V_1) \supset f^{-1}(V_2) \supset \cdots \supset f^{-1}(V_p)$ はm位の準線型列となる．

準線型なsubvarietyの特異点解消は次のように行われる．$V_1 \supset V_2 \supset \cdots \supset V_p$ をM内のm位の準線型列とする．このときV_p はnon-singularだから，V_pを中心とするσ-process $\sigma: \tilde{M} \to M$が考えられる．このσ-processによって$V_1 \supset V_2 \supset \cdots \supset V_{p-1}$から得られる列を$\tilde{V}_1 \supset \tilde{V}_2 \supset \cdots \supset \tilde{V}_{p-1}$と記すことにする．すなわち，

$$\tilde{V}_k = \text{closure of } \sigma^{-1}(V_k - V_p) \text{ in } \tilde{M}.$$

このとき$\tilde{V}_1 \supset \tilde{V}_2 \supset \cdots \supset \tilde{V}_{p-1}$は$\tilde{M}$において$m$位の準線型列をなすことが確められる．従って特に$\tilde{V}_{p-1}$はnon-singularとなり，$\tilde{M}$に対して$\tilde{V}_{p-1}$を中心とする$\sigma$-processを考えることができる．以下同様にしてinductiveに次の定理を得る．

定理 1.7. 準線型な subvariety の特異点は σ-process のみにより解消される.

§2 正則写像の特異点

$\xi = (E, \pi, M)$ を導入で述べた仮定をみたす rank が q の正則ベクトルバンドルとする. この節では全空間 E から複素ユークリッド空間への正則写像について考える. 以後 M を ξ の zero cross-section と同一視する.

正則写像 $f: E \to \mathbb{C}^p$ に対して, fibre 方向の微分:

$$d_x(f|F_x): T_x(F_x) \longrightarrow T_{f(x)}(\mathbb{C}^p)$$

を考える. ここで F_x は $x \in M$ 上の fibre, $f|F_x$ は f の F_x への制限とする. $x \in M$ が f の fibrewise regular point であるとは $d_x(f|F_x)$ の rank が maximum のとき, すなわち $p \geq q$ の場合には 1 対 1, $p \leq q$ の場合には onto のときを言う. またこのとき, f は x において fibrewise regular であるという.

以後 $p \leq q$ と仮定する.

定義 2.1. $1 \leq k \leq p$ なる各整数 k に対して, k-th fibrewise singular set $FS_k(f)$ を

$$FS_k(f) = \{x \in M;\ \mathrm{corank}(d_x(f|F_x)) \geq k\}$$

によって定義する.

$FS_k(f)$ は M の subvariety で $FS_1(f) \supset FS_2(f) \supset \cdots \supset FS_p(f)$ をみたす.

以後 $f: E \to \mathbb{C}^p$ を $f = (f^1, f^2, \cdots, f^p)$ と記す. 点 $x \in M$ におけるバンドル ξ の local triviality;

$$\psi = (z; \zeta) = (z^1, \cdots, z^n; \zeta^1, \cdots, \zeta^g) : \pi^{-1}(U) \to W \times \mathbb{C}^g \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^g$$

$$\psi(x_0) = (0; 0)$$

を一つ選ぶ. この local triviality (ψ, U, W) に対して, 正則写像 $\bar{f}_\psi : W \to \mathfrak{M}(p, g)$ を

$$\bar{f}_\psi(z) = \left(\frac{\partial f^i \circ \psi^{-1}}{\partial \zeta^j}(z; 0) \right)$$

によって定義する.

<u>定義 2.2.</u> $f: E \to \mathbb{C}^p$ が $x_0 \in M$ において一般の位置にあるとは, $\bar{f}_\psi$ が W において $\mathfrak{M}_1(p, g)$ のすべての strata に対して transverse-regular となるような x_0 における local triviality (ψ, U, W) が存在するときを言う.

K を M の任意の部分集合としたとき, $f: E \to \mathbb{C}^p$ が K の任

意の点で一般の位置にあるとき，f は K において一般の位置にあると言う．

さて，f が一般の位置にあることの意味について調べてみよう．$\Phi: M \to G_{q,m}$ を導入部の仮定により与えられた正則写像とする．$\hat{\Phi}: E \to E_{q,m}$ を全空間上への Φ の lift とし，$\varphi_{q,m}: E_{q,m} \to \mathbb{C}^{q+m}$ を $\varphi_{q,m}((\tau, v)) = v$ なる正則写像とする．$\Psi = \varphi_{q,m} \circ \hat{\Phi}$ とおけば Ψ は E から $\mathbb{C}^{q+m}$ への正則写像で，M の各点で fibrewise regular である．

今，正則写像 $f: E \to \mathbb{C}^p$ が与えられたとする．この f に対し，$\Psi_f: E \to \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^{q+m}$ を $\Psi_f(w) = (f(w), \Psi(w))$ によって定義する．Ψ_f も M の各点で fibrewise regular であるから，各点 $x \in M$ に対して，$d_x(f|F_x)$ による $T_x(F_x)$ の像は $\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^{q+m}$ 内の q-plane をなす．この対応により正則写像 $\Phi_f: M \to G_{q,p+m}$ を定義する．

写像 Φ_f のもとで，$FS_k(f)$ と F_k には次のような関係がある．

補題 2.3: $f: E \to \mathbb{C}^p$ に対して，

(a) 任意の $1 \leq k \leq p$ に対し，$FS_k(f) = \Phi_f^{-1}(F_k)$

(b) f が M において一般の位置にあることと，Φ_f が F_1 のすべての strata に対し transverse-regular であ

ることとは同値である.

この補題と補題1.5及び1.6から容易に次を得る.

定理2.4. $f: E \to \mathbb{C}^p$ が M において一般の位置にあれば, 列 $FS_1(f) \supset FS_2(f) \supset \cdots \supset FS_p(f)$ は $g-p$ 位の準線型列である.

§3 近似定理と存在定理

この節では, $f: E \to \mathbb{C}^p$ を一般の位置にある写像で近似できるかどうか, また M 全体で一般の位置にある写像が存在するかどうかを問題にしよう.

近似定理を述べるために pseudonorm $\| \ \|_L$ について説明しておく. 全空間 E を $n+g$ 次元複素多様体とみなし, これを locally finite な $\{W_i\}_{i \in I}$ で cover する. このとき各 W_i は座標 $w_i = (w_i^1, \cdots, w_i^{n+g})$ をもつ compact な座標近傍と仮定してよい. E のコンパクトな部分集合 L 及び正則写像 $f: E \to \mathbb{C}^p$ に対し $\|f\|_L$ を,

$$\|f\|_L = \sup_{i \in I(L)} \sup_{w_i \in W_i} \Big\{ \sum_k |f^k(w_i)| + \sum_{k,l} \left| \frac{\partial f^k}{\partial w_i^l}(w_i) \right| + \sum_{k,l,m} \left| \frac{\partial^2 f^k}{\partial w_i^l \partial w_i^m}(w_i) \right| \Big\}$$

によって定義する．ただし $I(L) = \{i \in I ; L \cap W_i \neq \phi\}$ とする．

K を M のコンパクト部分集合としたとき，K は E におけるコンパクト部分集合とみなせるから，$f : E \to \mathbb{C}^p$ に対し上記の定義により $\|f\|_K$ が定義される．このとき $\|\ \|_K$ は単に K 上での写像の距離だけでなく，K の E におけるあるコンパクト近傍上での距離も計っていることに注意．

さて，近似に関しては次の定理が成立する．

<u>定理 3.1.</u>（近似定理）　$f : E \to \mathbb{C}^p$ を正則写像，K 及び L をそれぞれ M 及び E のコンパクト部分集合とする．このとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，正則写像 $g : E \to \mathbb{C}^p$ で，K において一般の位置にあり，$\|f - g\|_{K \cup L} < \varepsilon$ をみたすものが存在する．

この近似定理は，この論文において基礎をなす定理であるが，紙数の都合により証明は省略する．

M をコンパクト部分集合の増加列 $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ で覆い，上記の近似定理を各 K_n に対し次々に適用することにより，次の存在定理を得る．

<u>定理3.2.</u>（存在定理）任意の整数 $1 \leq p \leq g$ に対し，M において一般の位置にある正則写像 $f: E \to \mathbb{C}^p$ が少なくとも一つ存在する．

§4 主定理の証明の概略

主定理を証明する前に「実現」の定義を述べておこう．この節を通して H_*，H^* は $\mathbb{Z}$ 係数の singular homology 及び cohomology とする．

V を M 内の余次元 k の subvariety，V' を V の特異点全体とする．$H^0(V-V') \cong H^{2k}(M, M-V)$（[1] 参照）であるから，injection $(M, \phi) \to (M, M-V)$ を通して写像 $\psi_V^*: H^0(V-V') \longrightarrow H^{2k}(M)$ を得る．$\{V_m\}$ を $V-V'$ の連結成分，$\iota_m: V_m \to V-V'$ を inclusion，$\omega_m \in H^0(V_m)$ を canonical generator とし $\omega_V = \sum_m \iota_m^*(\omega_m)$ とする．V の M における fundamental cohomology class $\{V\} \in H^{2k}(M)$ を

$$\{V\} = \psi_V^*(\omega_V)$$

によって定義する．

<u>定義4.1.</u> M の subvariety V が cohomology class $c \in H^*(M)$ を実現するとは $c = \{V\}$ のときを言う．

さて $p = g - k + 1$ と置き，今 $f: E \to \mathbb{C}^p$ は M において一般の位置にあるとする．$\Phi: M \to G_{g,m}$ を仮定により与えられた正則写像とする．§2 で考えた写像 $\Phi_f: M \to G_{g,p+m}$ は補題 2.3 により F_1 のすべての strata に対し transverse-regular となっている．$\xi \cong \Phi_f^*(\gamma_{g,p+m})$（解析的同値）で，しかも F_1 は $\gamma_{g,p+m}$ の Chern 類 $c_{g-p+1}(\gamma_{g,p+m})$ を実現することから，F_1 を Φ_f で pull back してやれば，次の補題を得る．

<u>補題 4.2.</u> 正則写像 $f: E \to \mathbb{C}^p$ が M において一般の位置にあれば，subvariety $FS_1(f)$ は Chern 類 $c_{g-p+1}(\xi)$ を実現する．

存在定理（定理 3.2）から，M において一般の位置にある正則写像 $f: E \to \mathbb{C}^p$ が存在するから，上記の補題と定理 2.4 及び定理 1.7 により主定理が従う．

参考文献

[1] M. Cornalba and P. Griffiths : Analytic cycles

and vector bundles on non-compact algebraic varieties, Inventiones Math., 28, (1975), 1 – 106

[2] A. Grothendieck : La théorie des classes de Chern, Bull. Soc. Math. France, 86 (1958).

[3] H. Morimoto : Realization of Chern classes by subvarieties with certain singularities, Nagoya Math. Journal, to appear.

[4] R. Thom : Les singularités des applications différentiables, Ann. Inst. Fourier Grenoble, 6 (1955/56), 43 – 87.

[5] H. Whitney : Tangents to an analytic variety, Ann. Math., 81 (1965), 496 – 549.

[6] W. T. Wu : Sur les classes charactéristiques des structures fibrées sphériques, Act. Sci. et Ind., n° 1183.