数理解析研究所講究録
第372巻 1979年 99-101

代数的K群に関する Wassersteinの仕事

数理 青本和彦

難解なQuillenのK群の定義が、より直観的なBolodinのそれと同型である事を証明したWassersteinの論文を紹介する。

Aを結合環とする。M_nAを大きさnのAを元とするmatrix環とおく。$MA=\bigcup_{n=1}^{\infty}M_nA$とおき、GMAはMAの中の逆元を持つ元全体とする。$ⒽA=\{a=(a_{ij})\in MA \mid a_{i,j}=0,\ i\geqq j\}$,

$$\tilde{\Omega}A=\{a=(a_{ij})\ \ a_{ij}\in A,\ i,j\in \mathbb{N}$$

且つ 各行,各列に高々有限個のnon-zero元$\}$,

$\Omega A=\tilde{\Omega}A/MA$ とおく。又 $e:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ を単射として $e:\tilde{\Omega}A\to\tilde{\Omega}A$ を

$$(ea)_{ij} = \begin{cases} a_{kl} & i = ek,\ j = el \\ 0 & i \notin e\mathbb{N} \text{ 又は } j \notin e\mathbb{N} \end{cases}$$

によって定義する．

［定義1］ SA simplicial set with base pt 0: GMAの任意の有限集合Xに対して，

$\exists e : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ （単射），$(1+a)(1+b)^{-1} \in e\,\mathrm{\widehat{H}}A$

が任意の $a, b \in X$ でみたされる時 X を"単体"と呼ぶ．これによってGMAに導入される単体構造をSAと記す（Bolodin [2]）．

［定義2］ BolodinのKnを $K_nA = \pi_{n-1}SA$ $1 \leqq n < \infty$ によって定義する．

［定義3］ 群Gが与えられているとする．

$f : S \to S^+$ (morphism between simplicial objects) が次の性質をみたすとする：

i) S は $K(\Pi, 1)$ で $\pi_1(S) \cong G$

ii) $\mathrm{Ker}(\pi_1 f)$ は G の極大完全部分群

iii) $H_n(\omega' f) \cong 0$ $n > 0$，ここに $\omega' f$ はホモトピー・ファイバー．

この時 Quillen の K_nG $(1 \leqq n < \infty)$ を $\pi_n S^+$ とおく（[3]）．

以上のもとに

[定理] $K_nA \cong \pi_{n-1}GMA \quad 1 \leqq n < \infty$

(Wasserstein [1]).

文献

[1] Л. Н. Васерштейн, Основы Алгебраической К-Теории, Успехи Мат. Наук 31 (1976), 87–148

[2] И.А. Володин, Алгебраическая К-теория как экстраординарная теория гомологий на категорий ассоциативных колец с единицей, Изв. АН. 35(1971), 123–138

[3] D. Quillen, Higher algebraic K-theory I, Lec. Notes Math. 341 (1973), 77–139.