数理解析研究所講究録
第 372 巻 1979 年 134-140

Holonomic Quantum Fields 概説

京大数研　三輪 哲二

以下は，佐藤幹夫・神保道夫両氏との最近の研究の紹介であり，研究集会以後の進展が中心である。

§1　回転の理論

W を 内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を持つ N 次元直交空間，$\Lambda(W)$, $A(W)$, $O(W)$, $G(W)$ をそれぞれ外積代数，クリフォード代数，直交群，クリフォード群とする。$\langle ww'\rangle + \langle w'w\rangle = \langle w, w'\rangle$ を満たす双一次形式 $\langle\ \ \rangle$ が与えられると，同型 $Nr : A(W) \longrightarrow \Lambda(W)$ が定義される。$a \in A(W)$ に対して $Nr(a)$ の定数部分を $\langle a\rangle$ と書き，a の期待値と呼ぶ。完全列

$$(1)\qquad 1 \longrightarrow GL(1,\mathbb{C}) \longrightarrow G(W) \longrightarrow O(W) \longrightarrow 1$$

により，$G(W)$ の元 g は，それの引き起こす W の回転 T により定数倍を除き特徴づけられる。すなわち $v_1, \cdots, v_N$ を W の基底 $J = (\langle v_j, v_k\rangle)_{j,k=1,\cdots,N}$ $K = (\langle v_j v_k\rangle)_{j,k=1,\cdots,N}$ を内積と期待値の表とし，$E_+ = J^{-1}K$, $E_- = J^{-1}\,{}^tK$ とおく。$E_\pm$ が射影にな

っている時，$N_r(g)$ は次の公式で与えられる。

(2) $$N_r(g) = \langle g \rangle \exp(\rho/2)$$
$$\langle g \rangle^2 = n_r(g) \det(E_+ + E_- T)$$
$$\rho = \sum_{j,k=1}^{N} R_{jk} v_j v_k, \quad RJ = (Y_+^{-1} - Y_-^{-1})(E_+ Y_- + E_- Y_+)$$

ここで $Y_\pm$ は次の条件を満たす行列とする。

(3) $$T = Y_+^{-1} Y_-, \quad E_- Y_+^{\pm 1} E_+ = 0, \quad E_+ Y_-^{\pm 1} E_- = 0$$

$n_r(g)$ は定数倍の不定さを調節する因子で，ここでは説明を省く。$g \otimes g^{-1} \in G(W \oplus W)$ は，$T \in O(W)$ から定数倍の不定さなしに決まる。W が無限次元の時，$\det(E_+ + E_- T)$ が発散しても，$\langle g \otimes g^{-1} \rangle = \langle g \rangle \cdot \langle g^{-1} \rangle = \det(E_+ + E_- T) \cdot \det(E_+ + E_- T^{-1})$ は有限の答を与える事が多い。

§2. 自由場

ここでは，無限次元のWとしてどんなものを取るかを説明する。S次元ミンコフスキー空間 X^{Min} におけるディラック方程式を考える。

(4) $$(i\not\partial - m)\psi(x) = 0, \quad \bar{\psi}(x)(i\overleftarrow{\not\partial} + m) = 0$$

ここで $\not\partial = \sum_{\mu=0}^{S-1} \gamma^\mu \partial_\mu$, $\partial_\mu = \partial / \partial x^\mu$, γ^μ は $r \times r$ のディラック行列とする。$\psi = {}^t(\psi_1, \cdots, \psi_r)$ $\bar{\psi} = (\bar{\psi}_1, \cdots, \bar{\psi}_r)$ は たて あるいは よこに並べた

スピノルだが，‾は複素共役を意味しない。(4)を満たす w の全体を W，$\bar{w}$ の全体を $\overline{W}$ とし 直和 $\widehat{W} = \overline{W} \oplus W$ に次の内積を入れる。

(5) $\langle \hat{w}, \hat{w}' \rangle = \int_{\text{spacelike}} \left(\bar{w}(x)\, d^{s-1}x\, w'(x) + \bar{w}'(x)\, d^{s-1}x\, w(x) \right)$

ここで $d^{s-1}x = \sum_{\mu=0}^{s-1} \gamma^\mu dx_{\hat{\mu}}$, $dx_{\hat{\mu}} = (-)^\mu dx^0 \wedge \cdots \overset{\mu}{\vee} \cdots \wedge dx^{s-1}$

(5)の被積分項は $s-1$ 閉形式で，積分は空間的超曲面上で行なう。$r \times r$ 行列

(6) $iS(x) = \int \frac{d^s p}{(2\pi)^s} e^{-ip\cdot x} \varepsilon(p_0)\, 2\pi \delta(p^2 - m^2)(\not{p} + m)$

は $(i\not{\partial}_x - m)\, iS(x-x') = 0$, $iS(x-x')(i\overleftarrow{\not{\partial}}_{x'} + m) = 0$ を満たす。固定した x につき $iS(x-x')$ の第 α 行を考えると，x' の函数として $\overline{W}$ に属すのでこれを $\psi_\alpha(x)$ と書く。同様に，固定した x' につき第 β 列を x の函数と考えたものを $\overline{\psi}_\beta(x')$ と書く。これらは，相互作用のないフェルミ粒子を表わし，自由場と呼ばれる。内積は

(7) $\langle \psi_\alpha(x), \overline{\psi}_\beta(x') \rangle = iS(x-x')_{\alpha\beta}$

で与えられる。次の期待値を採用する。

(8) $\langle \psi_\alpha(x) \overline{\psi}_\beta(x') \rangle = iS^{(+)}(x-x')_{\alpha\beta}$

$iS^{(+)}(x) = \int \frac{d^s p}{(2\pi)^s} e^{-ip\cdot x} \theta(p_0)\, 2\pi \delta(p^2 - m^2)(\not{p} + m)$

この時，$E_\pm$ は，(4)の解を $\mathrm{Im}\, x^0 \lessgtr 0$ で正則な解の境界値に分解する作用素になる。

§3. 外場による散乱

ここでは $\widetilde{W}$ における回転をどのように与えるかを述べる。$A(x) = (A_\mu(x))_{\mu=0,\cdots,s-1}$ を $x^0 \longrightarrow \pm\infty$ で消える $r\times r$ 行列の s 個の組とし，この $A(x)$ を外場とするディラック方程式を考える。

(9) $(i\partial\!\!\!/ - A\!\!\!/(x) - m)w(x) = 0, \quad \bar{w}(x)(i\overleftarrow{\partial\!\!\!/} + A\!\!\!/(x) + m) = 0$

(9) の解 $w(x)$, $\bar{w}(x)$ から次のようにして2通りの(3)の解が作られる。

(10) $$w_{\substack{in\\out}}(x) = w(x) - \int d^sx'\, S_{\substack{ret\\adv}}(x-x')A\!\!\!/(x')w(x')$$

$$\bar{w}_{\substack{in\\out}}(x) = \bar{w}(x) - \int d^sx'\, \bar{w}(x')A\!\!\!/(x')S_{\substack{adv\\ret}}(x'-x)$$

ここで $S_{\substack{ret\\adv}}(x) = \pm\theta(x^0)S(x)$ であり $x^0 \longrightarrow \pm\infty$ で $w(x) \longrightarrow w_{\substack{out\\in}}(x)$, $\bar{w}(x) \longrightarrow \bar{w}_{\substack{out\\in}}(x)$ となる。$(\bar{w}_{in}, w_{in})$ を $(\bar{w}_{out}, w_{out})$ に移す変換は $\widetilde{W}$ の回転になる。これを $T[A]$，対応するクリフォード群の元を $\varphi[A]$ と書く。$\tau[A] = \langle\varphi[A]\rangle$, $\tau^*[A] = \langle\varphi[A]^{-1}\rangle$ に対して次の変分公式が成り立つ。

(11) $$\delta\log\tau[A] + \delta\log\tau^*[A]$$
$$= -\int d^sx\, \delta A\!\!\!/(x)\,\Phi(x,x;A),$$
$$\Phi(x,x';A) = S_c^A(x,x') + S_c^{*A}(x,x') - S_{ret}^A(x,x') - S_{adv}^A(x,x')$$

ここで S_c^A, S_c^{*A} etc. は外場 $A(x)$ のもとでの適当な境界条件を満たすグリーン函数であるが，定義は省略する。ただ， $S_c^A(x,x')\big|_{x=x'}$, $S_c^{*A}(x,x')\big|_{x=x'}$ etc. は発散するが， $\Phi(x,x';A)\big|_{x=x'}$ は有限の値を取る事を注意しておく。

§4. Wick 回転と Riemann－Hilbert の問題

X^{Min} における空間的な超曲面を Γ とし，$A(x)$ の台が Γ 上に退化した極限を考える。すなわち，回転 T が

$$w_{out}(\xi)=M(\xi)w_{in}(\xi),\ \overline{w_{out}}(\xi)=\overline{w_{in}}(\xi)M(\xi)^{-1}$$

$(\xi\in\Gamma)$ で与えられるとしよう。ここで，$w_{\substack{in\\out}}(x)$ は，ディラック方程式の解をたてに N 個，$\overline{w}_{\substack{in\\out}}(x)$ はよこに N 個並べたものとし，$M(\xi)$ は Γ 上で実解析的な $N\times N$ 行列とする。この時 (2) 式に出てくる

$$F_{++}=Y_+^{-1}(-E_-)Y_+,\quad F_{+-}=Y_+^{-1}E_+Y_-$$
$$F_{-+}=Y_-^{-1}(-E_-)Y_+,\quad F_{--}=Y_-^{-1}E_+Y_-$$

の核函数を $F_{\varepsilon\varepsilon'}(x,x')$ $(\varepsilon,\varepsilon'=\pm)$ とすると，これらは，$\varepsilon\,\mathrm{Im}\,x^0<0$ ，$\varepsilon'\,\mathrm{Im}\,x^{0\prime}<0$ なる領域に解析接続される。そこで，$X^{Min}\longleftrightarrow \mathrm{Im}\,x^0=0$ から $X^{Euc}\longleftrightarrow \mathrm{Re}\,x^0=0$ $(\mathrm{Im}\,x^0=-x^s$ とおく$)$ に移って（これを Wick 回転という），そこで $F_{\varepsilon\varepsilon'}(x,x')$ を特徴づける事にする。

X^{Euc} 内の有界領域を D^+，その境界を Γ とする。Γ 上で定義された $N\times N$ 行列を $M(\xi)$ とする。次の性質を満たす $(x,x')\in X^{Euc}-\Gamma$ で定義された $rN\times rN$ 行列 $w(x,x')$ を (Γ, M) に対するグリーン函数という。（高次元の Riemann－Hilbert の問題）

(i) $(-\partial\!\!\!/_x + m)\, w(x,x') = \delta^s(x-x')$

(ii) $|w(x,x')| = O(e^{-m|x|})$ $\quad |x|\longrightarrow\infty$

(iii) $w(\xi^+, x') = M(\xi)\, w(\xi^-, x')$ $\quad (\xi\in\Gamma)$

但し $w(\xi^{\pm}, x') = \lim\limits_{D^{\pm}\ni x\to\xi} w(x,x')$, $D^- = X^{Euc}-D^+-\Gamma$

M が 1 に近いという仮定のもとに，グリーン函数は，ただひとつ存在し，以下の性質でも特徴づけられる。

(i)′ $w(x,x')\,(\partial\!\!\!/_{x'} + m) = \delta^s(x-x')$

(ii)′ $|w(x,x')| = O(e^{-m|x'|})$ $\quad |x'|\longrightarrow\infty$

(iii)′ $w(x, \xi'^+) = w(x, \xi'^-)\, M(\xi')^{-1}$ $\quad (\xi'\in\Gamma)$

X^{Min} における Γ として $x^0=0$ を取ると，D^+ が有界ではないが，Γ は X^{Euc} における $x^s=0$ とみなせる。この時 $F_{\varepsilon\varepsilon'}(x,x')$ の解析接続したものが，ちょうど $w(x,x')$ になる。

次に Γ を $\Gamma^{\delta p} = \{ \xi^{\delta p} = \xi + \delta p(\xi) \mid \xi \in \Gamma \}$ に微小変形する事を考える。$\Gamma^{\delta p}$ 上での $M^{\delta p}$ は $M^{\delta p}(\xi^{\delta p}) = M(\xi)$ と，不変な形で与える。この時 $(\Gamma^{\delta p}, M^{\delta p})$ に対するグリーン函数を $w^{\delta p}(x, x')$ とすると，微小変分 $\delta w(x, x') = w^{\delta p}(x, x') - w(x, x')$ は次の式で与えられる。

$$\delta w(x, x') = \int_\Gamma d\sigma(\xi)\, w(x, \xi) \sum_{\mu=1}^{s} \delta p^{\mu}(\xi) (n_\mu \partial - n \partial_\mu) M(\xi) \cdot \cdot w(\xi, x')$$

特に重要なのは，Γ 上の超曲面（X^{Euc} の中では余次元2）B が与えられ，B の外で $M(\xi) = 1$，B の中で $M(\xi) = M$ となる場合である。この時 $w(x, x')$ は，$X^{Euc} - B$ で多価のディラックの解となり，B のまわりで与えられたモノドロミー M を持つ。M を変えずに B を変形した時の変分公式も，上と同様に得られる。