数理解析研究所講究録
第 373 巻 1979 年 68-90

代数方程式に対する Newton 反復法と Halley 反復法

東大 工学部 佐藤幸平

§0 プロローグ

Newton が 1669 年 Barrow に送った論文「無限項を有する方程式による解析に就て」[1] は微積分学に関する彼の最初の論文であるが，その後半世紀近く公表されなかったために Leibniz の誤解を招くことになる。現在我々が Newton 法と呼んでいる方程式の反復解法は，この問題の論文の中に（恐らく始めて一般的な形で）記されているが，それは2項定理を応用して近似1次方程式を作る操作の反復という形式を採っており，微分との関係は明示されず，従ってそこでは少なくとも一応代数方程式だけを対象としているように見える。2項定理の代りに Taylor 展開を用いて，同じ方法が超越方程式にも適用できることを初めて示したのは Simpson だといわれている。[7]

Newton はその反復法の説明の後に「1次方程式の代りに2次方程式で近似することにすれば，より早くよい結果に到達

するであろう。」と述べている．このアイディアを実際に，一般性のある計算方式の形に纏めたのが，Newton と親交のあった天文学者 Halley である．彼は２項展開によって得られる近似２次方程式の根の１つに，平方根の近似式

$$a \gg b \text{ ならば } \sqrt{a^2 + b} \fallingdotseq a + ab/(2a^2 + b/2) \tag{1}$$

を組み合わせた有理計算を繰返せば「極めて早くかつ容易に」根の正確な近似値に到達することを示した [2]。ここでも，Newton [1] と同様，代数方程式だけが念頭に置かれているように見える．それを超越方程式にも適用可能な

$$z \to z - f(z)f'(z)/[f'(z)^2 - f(z)f''(z)/2] \tag{2}$$

またはこれと同値の形式に初めて書き下したのが誰なのかは今の所明らかでない．（p. 11脚注 2) 参照）．

Newton 法が方程式 $f(z) = 0$ の左辺に２次接触する１次整式の零点を求めることに相当するのに対し，Halley 法は $f(z)$ に３次接触する分数１次関数の零点を求めることに相当する．従って $f(z)$ が整式の場合，f とその導関数から四則演算で作られる有理関数による反復法の内，$f(z) = 0$ の単根に常に２次以上に収束する最低次のものが Newton 法，常に３次以上に収束する最低次のものが Halley 法である．Newton 法と Halley 法とはこのように，形式的な単純性の面で相隣るだけでなく，実用性の面でも匹敵していることをここで示したいと思う．

§1. 1変数有理反復法の一般論

Φは1変数有理関数，Φの定義域は複素数または∞とする。簡単のため「Φによる反復法」$\{z, \Phi(z), \Phi^2(z), \Phi^3(z), \ldots\}$をIt[$\Phi$]と略記する。$x$が$\Phi$の不動点のとき，$\{z \mid \lim_{n\to\infty} \Phi^n(z) = x\}$を$\mathcal{U}(x)$，$\mathcal{U}(x)$の開核を$U(x)$と記す。$U(x)$の成分を，不動点$x$に至るIt[$\Phi$]の収束領域と呼び，その内$x$に接触するものを$x$に至るIt[$\Phi$]の直接収束領域，然らざるものを同じく間接収束領域と呼ぶ。xに至る直接収束領域を$\underset{\circ}{D}(x)$と略記する。

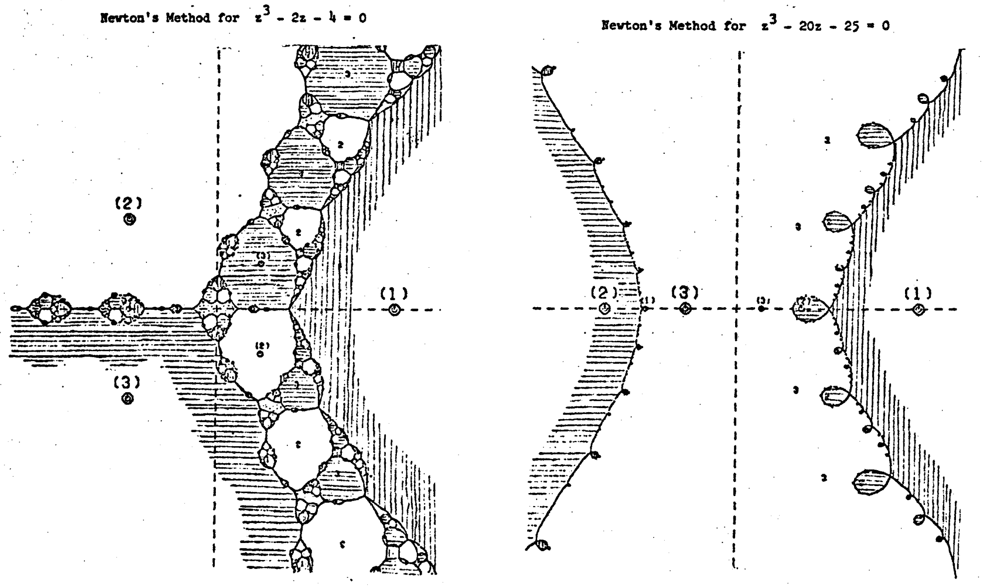
$x \in U(x)$のときxをIt[Φ]の安定不動点，$x \notin U(x) \neq \emptyset$または$U(x) = \emptyset$のとき$x$をIt[$\Phi$]の不安定不動点と呼ぶ。$x$がIt[$\Phi$]の安定不動点であれば$\mathcal{U}(x) = U(x)$となり，$\underset{\circ}{D}(x)$は1個しか存在しない。$x$がIt[$\Phi$]の安定不動点であってかつ$\underset{\circ}{D}(x) \neq U(x)$ならば$U(x)$は無数の間接収束領域を含む（Fig. 1 参照）

xがIt[Φ]の安定不動点であるための条件は，もし$x \neq \infty$ならば$|\Phi'(x)| < 1$，もし$x = \infty$ならば$1 < |\Phi'(\infty)| \leq \infty$であることが容易に知られる。故にいま，$\Phi$の不動点$x$に対し

$$\rho(x) = \begin{cases} \Phi'(x) & (x \neq \infty) \\ 1/\Phi'(x) & (x = \infty) \end{cases} \tag{4}$$

と定めれば，$|\rho(x)| < 1$が，xが安定であるための必要十分条件である。$\rho(x)$を不動点xの発散係数と呼ぶ。

Φが2次以上の有理関数のとき，$\rho(x) = 0$ならばxはΦの



i)　　　　　　　　ii)

Fig. 1. 有理反復法の安定不動点に至る収束領域の配置の例（3次方程式に対する Newton 法）．安定不動点（◎印）を含む収束領域が直接収束領域（D_0），他が間接収束領域である．ii) では安定不動点 (3) に至る収束範囲が直接収束領域だけである [15].

臨界点と一致する．その位数を m とすれば，$x \neq \infty$ の場合は x が $\Phi(z) - x$ の $m+1$ 位の零点であり，x の近くから出発した It[Φ] は x に $m+1$ (≥ 2) 次収束する．$x = \infty$ の場合は ∞ が Φ の $m+1$ 位の極であるが，この場合にも「It[Φ] は ∞ に $m+1$ 次収束する」ということにする．

同様に，$0 < |\rho(x)| < 1$ならば，$x \neq \infty$の場合にも$x = \infty$の場合にも，xの近傍から出発した$It[\Phi]$はxに1次収束するということにする.

有理関数Φと有理関数Ψの間に関係式$T\Phi T^{-1} = \Psi$（Tは1次関数）が成立するとき$\Phi \overset{T}{\to} \Psi$または$\Phi \simeq \Psi$と記し，$\Phi$は$T$により$\Psi$に同値変換される，または単に$\Phi$は$\Psi$に同値であるという。$\Phi \simeq \Psi$のとき，$It[\Phi]$と$It[\Psi]$とも同値であるといい，$It[\Phi] \simeq It[\Psi]$と略記する。

点集合Aが$It[\Phi]$において性質Pを有し，Tがどんな1次関数であっても$T(A)$が$It[\Psi]$において同じ性質Pを有するとき，性質Pは同値変換に際し不変であるという。不動点・収束領域・直接収束領域・間接収束領域・不動点の発散係数・反復法の収束次数等は，何れも同値変換に際し不変な性質である.

Φが2次以上の有理関数のとき，$It[\Phi]$の安定不動点に至る直接収束領域$\underset{\circ}{D}$は次の性質を有する（[5][14][15]参照）.

(1) $\underset{\circ}{D}$内には少なくとも1個，Φの臨界点が存在する．もし$\underset{\circ}{D}$がただ1個しかΦの臨界点を含まなければ（臨界点の位数に関係なく）$\underset{\circ}{D}$は単連結である．逆は成立しない.

(2) $\underset{\circ}{D}$の境界（以下$\partial\underset{\circ}{D}$と略記する）上には少なくとも1個，$\Phi$の不安定不動点が存在する．もし$\partial\underset{\circ}{D}$がただ1個しか

Φ の不安定不動点を含まなければ，D_0 は単連結である．これも逆は必らずしも真でない．

(3)　D_0 が単連結のとき，∂D_0 が単一閉曲線であるための必要十分条件は，∂D_0 上に存在する Φ の不安定不動点の数が D_0 内に存在する Φ の臨界点の位数の和に等しいことである．

(1)より，Φ が2次関数の場合には $D_0 = U$ 即ち（安定不動点に至る）間接収束領域は存在しないことが導びかれる．また(2)より，代数方程式に対する Newton 法のように不安定不動点が1個しか存在しない有理反復法の D_0 はすべて単連結であることが知られる．さらに(3)より，2次以上の代数方程式に対する Newton 法では D_0 のうち少なくとも2個は境界が単一閉曲線であることが容易に証明される．

$D_0(x) \neq U(x)$ のとき，x に至る $It[\Phi]$ の間接収束領域とは $\lim_{n\to\infty} \Phi^{-n}(D_0) - D_0$ の成分に他ならない．故にいま $\Phi^{-1}(D_0) - D_0$ の成分を D_1 と書き，$\Phi^{-n+1}(D_1)$ の成分を D_n と記すことにすれば，$D_1, D_2, D_3, \cdots$ は何れも x に至る間接収束領域で，$\bigcup_{n=0}^{\infty} D_n = U(x)$ である．D_n $(n \geq 1)$ を（x に至る）n 次間接収束領域と呼ぶ．

Newton 法のように ∞ が不安定不動点であるときには，間接収束領域の配列は，ある1点を相似中心とする相似比 $\rho(\infty)$ の相似図形列に漸近する（Fig. 1. 参照）．

§2. 2次方程式に対する Newton 法の一般化

完全平方でない2次方程式

$$f(z) \equiv z^2 + pz + q = (z - \alpha)(z - \beta) \qquad (\alpha \neq \beta) \tag{4}$$

に対する Newton 法，即ち

$$\Phi(z) = z - f(z)/f'(z) = (z^2 - q)/(2z + p) \tag{5}$$

による反復法の安定不動点は α と β，不安定不動点は ∞ である。この3点をそれぞれ 0, ∞, 1 に写す1次関数

$$T(z) = (z - \alpha)/(z - \beta) \tag{6}$$

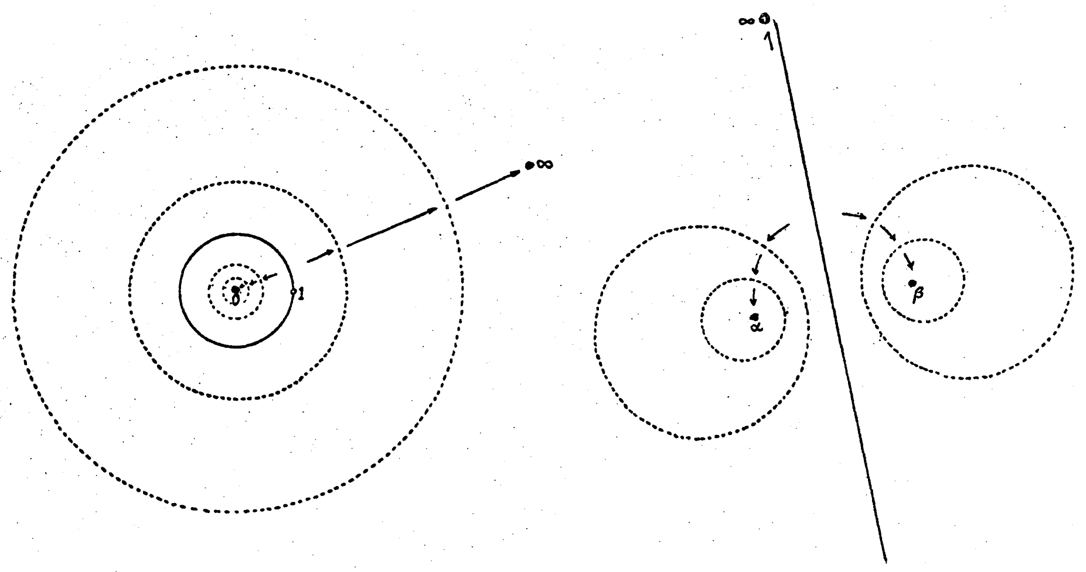
で Φ を同値変換すれば z^2 となる。逆に z^2 を

$$T^{-1}(z) = (\beta z - \alpha)/(z - 1) \tag{7}$$

で同値変換すれば $\Phi(z)$ が得られる。一方 It[z^2] においては，U(0), U(∞) が単位円の内外であるから，It[Φ]における U(α), U(β) は単位円の T^{-1} による写像すなわち直線 $|z - \alpha| = |z - \beta|$ で境された両半平面である。（Fig. 2. 参照）.

単位円の同心円 $|z| = m\ (\neq 1)$ 上の点から出発した It[Φ]は，$m \to m^2 \to m^4 \to \cdots$ に対応する同心円上の点を次々に経て 0 または ∞ に収束する。これらの同心円の T^{-1} による写像は $|z - \alpha| : |z - \beta|$ の値が $m, m^2, m^4, \cdots$ の Apollonius 円であることを利用して It[Φ]の誤差の上限を知ることができる。

ここで，It[z^n] $(n \geqq 3)$ が It[z^2] と全く同じ安定不動点 0, ∞ に至る同じ収束領域を有することに注意すれば，z^n $(n \geqq 3)$ を



It[z²]　　　It[(z² − αβ)/(2z − α − β)]

Fig. 2.　2次方程式に対する Newton 法と It[z²] との同値関係．（●は安定不動点，○は不安定不動点，実線は収束領域の境界を示す．）

T^{-1} で同値変換した関数

$$\Psi(n;\ z) = \frac{\beta(z-\alpha)^n - \alpha(z-\beta)^n}{(z-\alpha)^n - (z-\beta)^n} = \frac{z^n - q\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}s_{j-2}z^{n-j}}{\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}s_{j-1}z^{n-j}} \tag{8}$$

（ただし　$s_0 = 1$,　$s_1 = p$,　$s_j = ps_{j-1} - qs_{j-2}$　$(j \geqq 2)$）

は，It[Φ]と全く同じ収束範囲を有し，かつ安定不動点 α，β に n 次収束する反復法を定義することが知られる．

特に $p = 0$,　$q = -a \neq 0$　のときの Ψ(n; z) を SQ(a, n; z)　と書くことにすれば，

$$SQ(a,\ n;\ z) = \frac{z^n + \binom{n}{2} a z^{n-2} + \binom{n}{4} a^2 z^{n-4} + \cdots}{\binom{n}{1} z^{n-1} + \binom{n}{3} a z^{n-3} + \cdots} = \frac{\sum_{j=0}^{[n/2]} \binom{n}{2j} z^{n-2j} a^j}{\sum_{j=0}^{[\frac{n-1}{2}]} \binom{n}{2j+1} z^{n-2j-1} a^j} \qquad (9)$$

であり，It[SQ(a, n; z)] は　の平方根に n 次収束する反復法である。n = 2, 3, 4, 5 に対する It[SQ] の例を表1に示す。

n を大きく取れば It[Ψ(n; z)] はいくらでも早く α, β に収束するが，各ステップの計算に要する時間がほぼ n に比例して増大するから，Newton 法で同程度の精度改良を行なうのが平均 $\log_2 n$ ステップであることを考えると，実用的にはあまり意味がない．比較的小さな n の値に対して計算時間を比較して見ると，n = 3 に対する It[SQ] 即ち Halley 法による平方根の計算だけが，殆んどの場合に Newton 法よりも有利であることが知られる（§4. 参照）.

表1. It[SQ] による平方根の計算例

k	$SQ^k(2,2;10)$	$SQ^k(2,3;10)$	$SQ^k(2,4;10)$	$SQ^k(2,5;10)$
0	10.	10.	10.	10.
1	5.1	3.5099338	2.7460384	2.3113607
2	2.7460784	1.6504752	1.4442381	1.4165057
3	1.7371988	1.4155100	1.4142136	1.4142136
4	1.4442381	1.4142136	1.4142136	1.4142136
5	1.4145217	1.4142136		
6	1.4142136			
7	1.4142136			

§3. Schröder の式と König の式

3次以上の代数方程式に対する Newton 法は，特別な場合[注1)]を除き，収束領域の境界が複雑な非解析曲線となるため，2次方程式の場合のような仕方で一般化することは多分不可能であるが，収束次数を「2次以上」から「n 次以上」にするという意味での一般化は容易に行なわれる．

関数 f の零点 x の近傍 Δ で f が何回でも微分可能で $z_0 \in \Delta$，$f(z_0) = w_0$ とすれば，w_0 を中心として $f^{-1}(w)$ の分枝の1つは

$$z_0 + (w - w_0)\frac{d}{dw}[f^{-1}(w)]\Big|_{w=w_0} + \frac{1}{2}(w - w_0)^2 \frac{d^2}{dw^2}[f^{-1}(w)]\Big|_{w=w_0} + \cdots$$

と Taylor 展開される．ここで $w = 0$ とおき，z_0 をあらためて z，$f^{(n)}(z)$ を簡単のため $f^{(n)}$ と書くことにすれば，

$$x = z - \frac{f}{f'} - \frac{f''}{2f'^3}f^2 - \frac{3f''^2 - f'f'''}{6f'^5}f^3 - \cdots \tag{10}$$

が得られる．(10)式の右辺の級数を第2項までで打ち切れば Newton 法の定義関数，第 n (≥ 3) 項までで打ち切れば x に n 次収束する反復法の定義関数が得られる．これは Schröder [3]

注1) f が1次整式の累乗の場合は $z - f/f'$ は1次関数であり，完全平方でない2次整式の累乗の場合は $z - f/f'$ は2次関数で，反復法の収束領域の境界が直線になる．

に記されている公式である。注2)

一方 $z_o \in \Delta$ のとき，z_o を中心とする $1/f$ の Taylor 展開における引続いた2項の係数の比は，z_o に最も近い $1/f$ の極と z_o との差即ち $z_o - x$ に収束し，x が $1/f$ の1位の極であれば，n 番目の比と $z_o - x$ との差は $O[(z_o - x)^{n+1}]$ となる。従って

$$z - (n - 1)[1/f(z)]^{(n-2)}/[1/f(z)]^{(n-1)} \tag{11}$$

は $f(z) = 0$ の単根に n 次収束する反復法の定義関数である。

(11)は König の公式と呼ばれ，$n = 2$ の場合には Newton 法，$n = 3$ の場合には Halley 法の定義関数と一致する。[4][8]

いま $a_k(z) = 0 \ (k < 0)$，$a_m(z) = f^{(m)}(z)/m! \ (m \geqq 0)$ とし，第 i 行第 j 列を $a_{j-i+1}(z)$ とする $n \times n$ 行列式を $\Delta_n(z)$ とすれば (11)は

$$z - a_o(z)\Delta_{n-2}(z)/\Delta_{n-1}(z) \tag{12}$$

となる。(12)は最小根を求める Whittaker の級数[6] を第 $n - 1$ 項で打ち切った結果と同値である [8]。 f が N 次整式のとき Schröder の n 次収束公式は通常 $(2n - 3)(N - 1) + 1$ 次式を与えるのに対し，(12)は通常 $(n - 1)(N - 1) + 1$ 次式となる。

注2) (10)より得られる3次収束の式は Halley 法の定義関数(2)とは一致しないが，[3] ではこれと別の筋道を通って「単根に3次収束する式」(2) が導びかれている。但し Halley の名は[3]のどこにも記されていない。

§4. 計算速度の比較

(12) に (4) を代入すると (8) 式を得る。即ち König の公式は§2で論じた反復法の定義関数を特別の場合として含む。

f が N 次整式で $N \gg n$ のとき、f の係数の間に特別な関係がなければ、(12)による反復法の各ステップの計算 $nN + O(n^2)$ 回の乗算と1回の除算を含んでいる。一方 Newton 法即ち(12)で $n = 2$ の場合は、1ステップ当り $2N - 3$ 回の乗算と1回の除算で十分である。故に(12)による反復法がいかなる代数方程式に対しても Newton 法よりも有利であるためには $2\log_2 n > n$ でなくてはならない。この不等式は $n = 3$ の場合にのみ成立する。即ち、König の式によって定義される反復法を代数方程式の単根の計算に適用したとき、殆どの場合に Newton 法よりも有利であり得るのは $n = 3$ のとき即ち Halley 法に限られる。

N 次代数方程式の係数間に特別の関係がないとき、Halley 法の1ステップの計算は $3N - 3$ 回の乗算と1回の除算を含んでいる。従っていま複素数の除算1回には乗算2回に相当する時間を要すると仮定し、加減算に要する時間を乗除算に要する時間に比べて無視すれば、同程度の精度改良に必要とされる Newton 法と Halley 法の計算時間の比は

$$(2N - 1)\log_2 3 : (3N - 1) \qquad (13)$$

となる。この比の値は表2に示すごとく、$N = 2$ のとき約 0.95,

表2

N	$\frac{2N-1}{3N-1}\log_2 3$
2	0.95097
3	0.99060
4	1.00861
5	1.01890
6	1.02556
7	1.03023
8	1.03367
9	1.03632
10	1.03842
100	1.05487

$N = 3, 4$ではほぼ1に等しく，以下除々に増加して極限値 $(2/3)\log_2 3 = 1.05664 \cdots$ に近付いて行く。即ち，2次方程式に対しては Newton 法は Halley 法に比して僅かに有利であるが，3次と4次ではどちらとも言えず，5次以上では Halley 法の方が僅かに有利であるということになる．

f が特別な形の場合には，計算時間の比は上記と異なることがある。例えば，$f(z) = z^N - a \quad (a \neq 0)$ に対する Halley 法の定義関数は，

$$\frac{(N-1)z^N + (N+1)a}{(N+1)z^N + (N-1)a}\cdot z = \left[\frac{N-1}{N+1} - \frac{\frac{4N}{(N+1)^2}\cdot a}{z^N + \frac{N-1}{N+1}\cdot a}\right] z \tag{14}$$

であり，z^N の計算以外には乗除算各1回を含む．一方 $z^N - a$ 対する Newton 法の1ステップは z^{N-1} の計算と乗除算各1回であるから，z^k の計算に要する最小乗算数を $L(k)$ とすれば計算時間の比は

$$[L(N-1) + 3]\log_2 3 : [L(N) + 3] \tag{15}$$

で与えられることになる．この比の値は表2に示すように，N のいかんに拘わらず1より大きく，$N = 2$ のときの 1.189 が最小で，$N \gg 2$ では $\log_2 3 = 1.58496\cdots$ の付近を彷徨する．即ち，複素数の累乗根の計算には Halley 法の方が Newton 法よりも有

表2． N 乗根に対する Newton 法と Halley 法の計算時間の比

N	L(N)	$[L(N-1)+3]\log_2 3$	L(N)+3	計算時間の比
2	1	4.75489	4	1.18872
3	2	6.33989	5	1.26797
4	2	7.92481	5	1.58496
5	3	7.92481	6	1.32080
6	3	9.50978	6	1.58496
7	4	9.50978	7	1.35854
8	3	11.09473	6	1.84912
9	4	9.50798	7	1.35853
10	4	11.09473	7	1.58496

利で，少なくとも２割，平均約６割計算時間が節約される．

以上の比較では単根だけが念頭に置かれている．重根に対しては Newton 法・ Halley 法は共に１次收束であり，発散係数は m 重根に対しそれぞれ $(m-1)/m$ ，$(m-1)/(m+1)$ と計算される．故に Halley 法の方が重根に対しても常にやや早く收束し，同じ程度の精度改良に要するステップ数の比は平均

$$\ln[(m+1)/(m-1)] : \ln[m/(m-1)] \tag{16}$$

となる．$m=2$ の時にはこの比は丁度 $\log_2 3$ であり，単根に対するステップ数の比に等しい．故に平均乗除算数から割出した計算速度の比も，単根の場合の結果がそのまま２重根にも当てはまる．(16) 式の値は m と共に除々に増大し，$m \geq 3$ では常に Halley 法の方が有利であることが容易に知られる．

§5. 大域的収束性の比較

代数方程式に対する Newton 法は ∞ 以外に不安定不動点を有しないため，すべての収束領域が単連結であり，各根に至る直接収束領域（D_0）が無限面積を有する．（§1. および，Fig.3 参照）．この性質を利用して，Newton 法以外の反復解法（Graeffe 法，Bernoulli 法など）の助けを借りずに，有限時間内に必らず何れかの根の近似値に到達するような初期値設定のアルゴリズムを作ることができる．

与えられた代数方程式 $f(z)=0$ のすべての根を内側に含むような，半径のあまり大きくない円 K をまず作る．上記の性質により，K は Newton 法のどの D_0 とも共有点を有する．相異なる根の数を n とすれば，n 個の D_0 の中には Newton 法の臨界点即ち ff''/f'^2 の零点を1個しか含まないものが必らず存在する．このような D_0 の内点から出発した Newton 法は，根から遠ざかるステップを高々1個しか有しない．従って，円 K 上に点列 $\{z_{(k)}\}$ を，自然数 m の各値に対し $\{z_{(k)} \mid 1 \leq k \leq 2^m\}$ が K の 2^m 等分点となるように取り，$z_{(k)}$ を初期値とする Newton 法の各ステップで計算される f の絶対値が前のステップでのそれよりも大きくなることが2回以上起れば初期値を $z_{(k+1)}$ に変更する，という手続きを繰返せば，有限時間の内に必らず，何れかの根の近似値に到達する筈である．

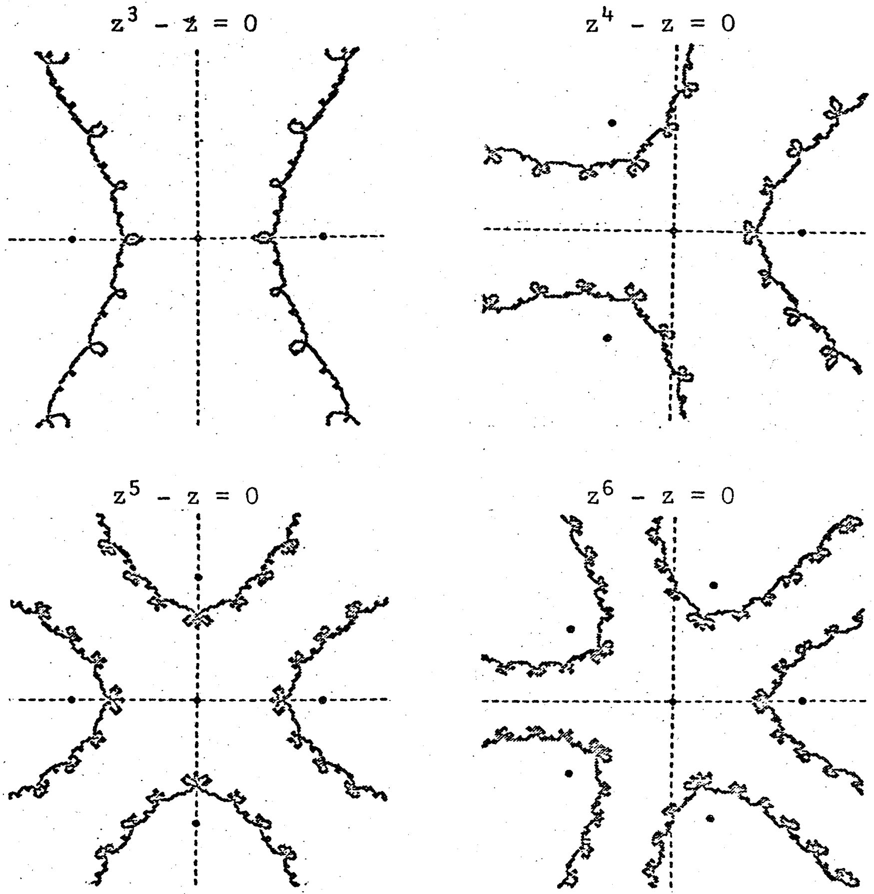


Fig. 3.　代数方程式に対する Newton 法の直接収束領域（$\underset{\circ}{D}$）は，どの根に至るものもすべて無限面積を有する。例えば方程式 $z^N - z = 0$　($N \geqq 3$)　の場合，根 0 に至る直接収束領域 $\underset{\circ}{D}(0)$ の境界は，N がどんなに大きくても，0 を取り巻く N - 1 個の根の間をくぐり抜けて無限遠点に達する。注3)

注3)　格子点法（Rall [10]参照）により，東大大型計算センター設置の HITAC 8700-8800 システムで計算・作図した。

一方，同じ代数方程式 $f(z)=0$ に Halley 法を適用した際には ∞ の他に f'/f のすべての零点が不安定不動点となるため，§1.の議論からは収束領域の単連結性も $\underset{\circ}{D}$ の無限面積性も導くことはできない。単連結性に関しては実は目下検討中で，恐らく別の筋道から保証されるのではないかと思われる（この点について御教示が頂ければ幸甚である）が，$\underset{\circ}{D}$ が有限面積となる場合の例は容易に見出される（ Fig. 4. 参照）.

Halley 法では $\underset{\circ}{D}$ が無限面積とは限らない上に，$\underset{\circ}{D}$ に含まれる臨界点の数に Newton 法の場合のような形での制限がないため，先程述べたような初期値設定のアルゴリズムは（少なくともそのままの形では）適用されない．このことはしかし，大域的収束性の面で Halley 法の方が不利であることを必ずしも意味するものではない．

f'/f の零点の近傍は， Newton 法では「危険区域」である．その付近を通過する Newton 反復数値列は，理論的には何れかの根に収束するものであっても，機械的計算では $|f|$ が極めて大となるために非収束の場合との区別が困難である．（Fig. 5. 参照）．一方 Halley 法では f'/f の零点は不安定不動点であるため， Newton 法の ∞ 同様，間接収束領域の境界には含まれず，その小近傍に含まれる点の大半は $\underset{\circ}{D}$ の点であり，そのような点を通過した反復数値列は大体直線的に安定不動点に近

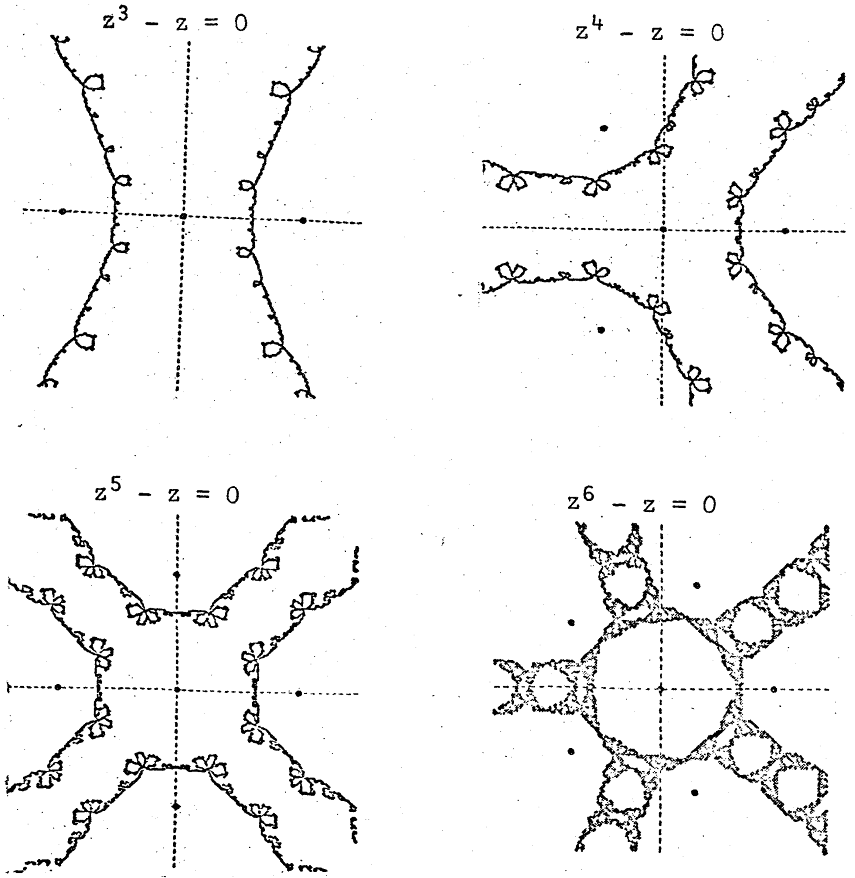


Fig. 4. Halley 法の直接収束領域(D_0)は必ずしも無限面積ではない. 例えば $z^N - z = 0$ の形の方程式の場合, $3 \leqq N \leqq 5$ ではすべての D_0 が無限面積であるが, $N \geqq 6$ では $D_0(0)$ だけが有限面積となる.注4)

注4) Fig. 3. と同じ方法を用いて, 東大大型計算センター設置のシステムで作図した. 但し計算時間の関係で格子点の間隔を変えた(Fig. 3. では 1/40, Fig. 4. では $3 \leqq N \leqq 5$ では 3/100, $N = 6$ では 1/50 とした)ため, 収束領域の境界の形状の精度に多少の変動がある.

づいて行くことが容易に確かめられる。(特に$f(z)=0$の根がすべて実数の場合には，f'/f の零点以外の実軸上の点はすべて$\underset{\circ}{D}$に属する。[12]) 従って，もしf'の零点が既に知れているならば，その各々を中心として，f の零点を内部に含まないような，半径のあまり小さくない円を画き，各円周の等分点の1つを初期値とした反復法に収束のきざしが見えなければ別の円に移り，全円を遍歴したらまた元の円の次の等分点から反復法を行なう，という手続を繰返せば，比較的少い時間の内に確実にどれかの根の近似値に到達する。

特に$f'(z)=0$が重根を有する場合には，有限不安定不動点の数が一般の場合の $N-1$ より少なくなって上記の初期値探索の手続きが短縮すると共に，反復関数全体としての次数の減少が間接収束領域の減少につながり，根の正確な近似値に早く到達する可能性が高くなる。その最も極端な場合が $f(z)=z^N-a \quad (a\neq 0)$ の場合(およびそれを平行移動した形の方程式のとき)で，反復関数の次数はNewton法より1多いだけ，有限不動点は原点のみとなり，原点を中心とする半径$|a^{\frac{1}{N}}|$ 以下の円の内部の点の殆どは$\underset{\circ}{D}$に属する。これは同じ方程式に対するNewton法の原点近傍に $N(N-2)$ 個の大きな間接収束領域が集まり，その付近が極端な危険区域となるのと好対照である。(Fig. 5. 参照)。

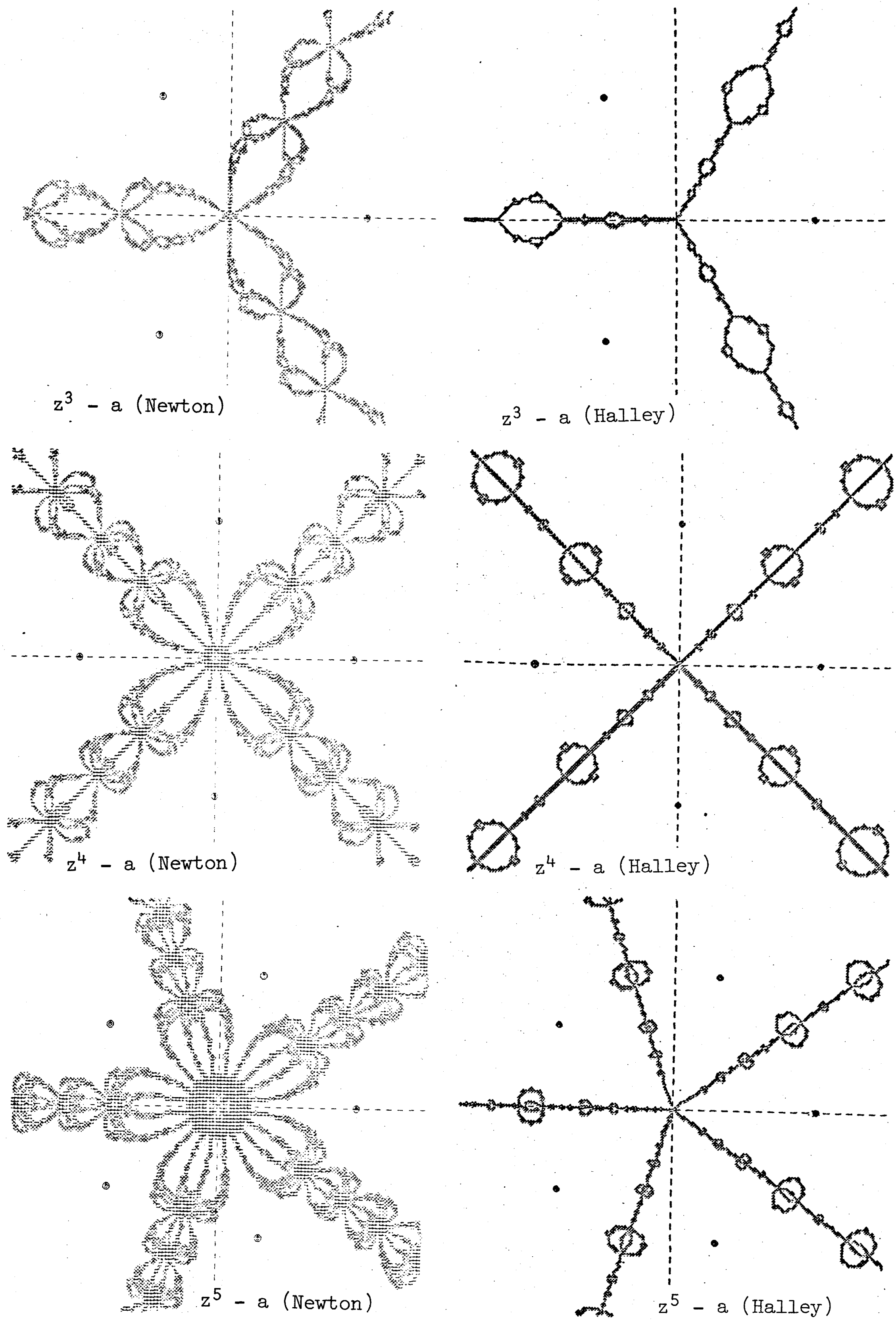


Fig. 5. Newton法, Halley法による累乗根の計算の収束領域の概形

即ち，累乗根を求める Halley 法は，前節に示したような局所的性質においてだけでなく，大域的性質においても Newton 法より勝れていることが知られる．

§6. あとがき

Halley 法は Newton 法と殆んど同じ位古い歴史を有するにも拘らず，一般にあまり知られていないようである．数値解析に関する教科書の殆どは Newton 法にはかなりの紙面を費していながら Halley 法については全く言及せず，Householder [8]，Ostrowski [11] には König の式およびその特別な場合としての式(2)が記されているけれども Halley の名前は記されていない．

発見者の名前が公式に結びつけられないことには，数値解析という学問分野の性質上仕方のない点もあるが，実用性の面で評価がやや低すぎはしなかっただろうか．現在，代数方程式の数値解法に Halley 法が用いられる機会は，数値積分で Weddle の公式が用いられる機会より多くはないと感じられるが，Newton 法に台形公式を対応させるとすれば Halley 法には Simpson 公式を対応させるのが妥当な所であろう．少なくとも累乗根の計算に関しては，これまで Newton 法を用いて行なわれていた所に Halley 法を用いて損になることは一つもないと思われる．

参 照 文 献

[1] I. Newton, De Analysi per Aequationes Numeros Terminorum Infinituus (1669?, first published in 1711).

[2] E. Halley, Methodus Nova, Accurata et Facilis Inveniendi Radices Aequationum quarumque Generaliter, sine Praevia Reductione, Phil. Trans. Roy. Soc. London 18 (1694) 136 - 145.

[3] E. Schröder, Über unendliche viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen, Math. Ann. 2 (1870) 317 - 365.

[4] J. König, Ein allgemeiner Ausdruck für die ihren absoluten Beitrage nach kleinsten Wurzel der Gleichungen n-ten Grades, ibid. 9 (1876) 530 - 540.

[5] G. Julia, Mémoires sur l'itération des fonctions rationelles, Journ. de Math. 7^{e} série, Tome IV, n^{o} 1 (1918) 2 - 245.

[6] E.T. Whittaker, A Formula for the Solution of Algebraic or transcendental Equation, Proc. Edinburgh Math. Soc. 36 (1918) 103 - 106.

[7] F. Cajori, A History of Mathematics 2nd ed. (1919).

[8] A.S. Householder, Principles of Numerical Analysis. McGraw-Hill, New York (1953).

[9] S. Gorn, Maximal Convergence Interval and a Gibbs-Type Phenomenon for Newton's Approximation Procedure, Ann. of Math. 59-3 (1954) 463 - 491.

[10] B. Rall, Computational Solution of Nonlinear Operational Equations. John Wiley & Sons, New York (1969).

[11] A.M. Ostrowski, Solution of Equations and Systems of Equations. Academic Press, New York (1973).

[12] M. Davies & B. Dawson, On the Global Convergence of Halley's Iteration Formula, Numer. Math. 24 (1975) 133 - 135.

[13] E. Hansen & M. Patrick, A Family of Root Finding Methods, Numer. Math. 27 (1977) 257 - 269.

[14] K. Sato, Equivalence Class and Invariant Figures of Rational Iterations with special reference to the Global Convergence Properties of Newton's Method, Memoirs of Numerical Mathematics 5 (1978) 1 - 32.

[15] 佐藤，1変数複素有理反復法の収束範囲の形状について，「情報処理」Vol. 19, No. 8 (Aug. 1978) 722 - 729.

[16] 佐藤，複素数の累乗根および逆数を求める反復法について，「情報処理」Vol. 20, No. 1 (Jan. 1979) 掲載予定.