数理解析研究所講究録
第 373 巻 1979 年 114-116

区分的最良近似について

富士通(株)　山下眞一郎

1. 与えられた1変数関数の与えられた近似区間を，与えられた個数に分割して，各区間を適当な多項式又は有理式で最良近似し，全体でも最良近似となる様に，各最良近似式及び分割点を定める問題を考える．　例えば，分割個数が3の場合，区間 $[X_L, X_R]$ 内に分割点 $X_L \equiv p_0 < p_1 < p_2 < p_3 \equiv X_R$ を取って，この各区間を最良近似し，かつ全体も最良近似となる様に，p_1, p_2 を定める．

2. いま，分割数をN，第 i 分割点を p_i とする．　基本戦略は，誤差曲線の山が高ければ，区間を狭め，山が低ければ，区間を広める。　狭めたり，広めたりする割合は，各山の平均の高さからのずれに比例させる．　問題は，平均値をどの様にするか，比例定数をどの様にするかである。

3. 被近似関数 $f(x)$ が区間内の任意の点 c のまわりに Taylor 展開できれば，$(m-1)$ 次まで取った時の Lagrange の剰余項 R_m

は，$R_m = (x-c)^m f^{(m)}(\xi)/m!$ と表わせる． それ故，区間 $[\beta_{i-1}, \beta_i]$ の (m_i-1) 次の最大偏差 ρ_i は

$$\rho_i = k_i S_i^{m_i}, \quad S_i = \beta_i - \beta_{i-1}$$

と仮定できよう． k_i は比例定数である。

4. この仮定の下に，次の様な最良近似接近法が考えられる．第 i 区間の最大偏差値を ρ_i，その変動量を $\Delta\rho_i$，第 i 区間の間隔を S_i，その変動量を ΔS_i と置く。 また，この変動に対しても比例定数 k_i が変らず，変動量も小さいと仮定する。

この様に仮定すれば

$$\rho_i + \Delta\rho_i = k_i (S_i + \Delta S_i)^{m_i} = k_i S_i^{m_i} (1 + \Delta S_i/S_i)^{m_i}$$
$$= \rho_i (1 + \Delta S_i/S_i)^{m_i} \fallingdotseq \rho_i (1 + m_i \cdot \Delta S_i/S_i)$$
$$\therefore \Delta\rho_i = \rho_i m_i \Delta S_i/S_i, \quad \Delta S_i = S_i/m_i \cdot \Delta\rho_i/\rho_i$$

となる． 全区間の間隔変動量の総和は不変で 0 であるから，

$$0 = \sum_{i=1}^{N} \Delta S_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{S_i}{m_i} \cdot \frac{\Delta\rho_i}{\rho_i}$$

また，目標は，全ての ρ_i が最終的に等しくなることであるから，その様な値を H とすれば，$\rho_i + \Delta\rho_i = H$ 即ち $\Delta\rho_i = H - \rho_i$．これを前式に代入して

$$0 = \sum_{i=1}^{N} \{S_i/m_i \cdot (H-\rho_i)/\rho_i\} = H \sum_{i=1}^{N} \frac{S_i}{m_i \rho_i} - \sum_{i=1}^{N} \frac{S_i}{m_i}$$

$$\therefore H = \left\{ \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{S_i}{m_i}\right) \right\} \Big/ \left\{ \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{S_i}{m_i}\right) \Big/ \rho_i \right\}$$

こうして，初めp_iを定め，S_i及びp_iを計算すれば，Hが求まり，順次Δp_i，ΔS_iが求まり，次のp_iが定められる。　これを反復すれば，最良分割点p_iが定まる。　この方法は，各区分に対しても，誤差関数の0点を各分点と解釈して適用できる。　その時の平均Hは　$H=\sum S_i/(\sum S_i/p_i)$となる。