数理解析研究所講究録
第374巻 1980年 18-36

1次元 seminormal rings の完備化について

阪大 理　小野田 信春

序.　Xを体k上に定義された代数多様体、PをXの閉点とする。このとき、Pがseminormalであるとは、局所環$\mathcal{O}_{P,X}$がseminormalになることであると定義する。この定義のもとで、特にXが代数曲線の場合には、Bombieri, Davis 等によって、Pがseminormalであるための必要十分条件は、Pがordinary multiple point with distinct tangents になることであることがわかっている。以下では、彼らの結果の後を受けて、まず1次元seminormal局所環の完備化による特徴付けを与える。そして、更にこの結果に関連して、平面代数曲線の通常特異点における局所環のseminormalizationを決定することについても考えてみたい。

§0.

以下用いる記号や仮定等についてまとめておく。$(A, \mathfrak{m})$は被約な局所環で、kをその剰余体とする。ここで、Aは係

数体をもつ、即ち $k \subset A$ であるとし、更に、A の Krull 次元は1であるとする。D を A の全商環の中での A の整閉包とし、かつ D は有限生成 A-加群になっていると仮定する。$M_1, \cdots M_r$ を D の極大イデアルの全体、$J = M_1 \cap \cdots \cap M_r$ を D の Jacobson 根基とする。$K_i = D/M_i$, $K = D/J$ とおく。すると、$K = K_1 e_1 + \cdots + K_r e_r$ とかける。ただし、ここで、$1 = e_1 + \cdots + e_r$ は、1のべき等元分解である。以上の仮定のもとでは、次のことがいえる。

<u>Criterion</u> 0.1. A が seminormal であるための必要十分条件は、$\mathfrak{m} = J$ となることである。

以下を通じて、x, y, t, x_i 等はすべて不定元(又は変数)を表わすものとする。環 R に対し、$J(R)$ で R の Jacobson 根基を、$Q(R)$ で R の全商環を表わす。また、$\cong_R$ は、R-多元環の同型を表わすものとする。更に、R が半局所環で、N が有限生成 R-加群のとき、$\hat{N}$ で N の $J(R)$ 進完備化を表わす。

最後に、係数体 k は、常に完全体であると仮定する。

§1. 1次元 seminormal 局所環の完備化

まず、次の事実から始める。

<u>補題</u> 1.1. $(A, \mathfrak{m})$ は上の通りとする。このとき、次は互いに同値である。

(1) A は seminormal である。

(2) $\hat{A} \cong_k k + tK[[t]]$。ただし、$k + tK[[t]] = \{ f(t) \in K[[t]]$; $f(0) \in k \}$ であって、我々は、これを k－多元環とみなす。

(3) $\hat{A}$ は seminormal である。

<u>証明</u>. D は 1 次元正規半局所環ゆえ、$\hat{D} \cong_k K[[t]]$、かつ $J(\hat{D}) = \hat{J} \cong_k tK[[t]]$ である。ここで、$\hat{A}$ の $Q(\hat{A})$ における整閉包は $\hat{D}$ に等しいことに注意する。

(1) ⇒ (2) :　$\hat{A}$ は被約 1 次元局所環で、$\hat{m}$ はその極大イデアルである。A は seminormal ゆえ、$m = J$ となることに注意すれば、$\hat{A} \cong_k k + \hat{m} = k + \hat{J} \cong_k k + tK[[t]]$ を得る。

(2) ⇒ (3) : $\hat{A} \cong_k k + tK[[t]]$ ゆえ、$\hat{A}$ は被約な 1 次元局所環で $tK[[t]]$ がその極大イデアルである。ここで、$tK[[t]] = J(\hat{D})$ であるから、Criterion 0.1. により、$\hat{A}$ は seminormal である。

(3) ⇒ (1) :　$\hat{A}$ は seminormal ゆえ $\hat{m} = \hat{J}$ となる。ここで、$\hat{m} \cong_A m \otimes_A \hat{A}$ かつ $\hat{J} \cong_A J \otimes_A \hat{A}$ であり、更に $\hat{A}$ は A 上忠実平坦である。従って、$m = J$ となり、Criterion 0.1. により、A は seminormal である。　　　　　　　　　　　（証明終わり）

k は完全体と仮定したから、K_i は k の単純拡大体である。そこで、$K_i = k(\alpha_i)$ とする。$[K_i : k] = n_i$ とおくとき、K_i の k 上の基底として、1、$\alpha_i, \cdots, \alpha_i^{n_i-1}$ がとれる。各基底 α_i^j に対して、変数 x_{ij} を用意し、k－多元環の準同型写像

$\sigma : k[[\cdots, x_{ij}, \cdots]] \longrightarrow K[[t]]$ を、$\sigma(x_{ij}) = \alpha_i^j e_i t$ で定義する。（ただし、$0 \leqslant j < n_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$）このとき、明らかに、$\mathrm{Im}\,\sigma \cong_k k + tK[[t]]$ である。従って、$I = \mathrm{Ker}\,\sigma$ とおけば、補題 1.1. より次のことがいえる。"A が seminormal であるための必要十分条件は、$\hat{A} \cong_k k[[\cdots, x_{ij}, \cdots]]/I$ となることである。" 以下、I の生成元を具体的に求めてみる。

I_0 を $x_{ij}x_{kl}$（ただし、$i \neq k$）の形の元全体で生成された $k[[\cdots, x_{ij}, \cdots]]$ のイデアルとする。$F \in k[[\cdots, x_{ij}, \cdots]]$ を任意にとって、$F = F_0 + F_1 + \cdots + F_r$ と書く。ただし、ここで $F_0 \in I_0$ かつ $F_i \in k[[x_{i0}, \cdots, x_{in_i-1}]]$ である。このとき、明らかに、$F \in I$ であるための必要十分条件は、$1 \leqslant i \leqslant r$ に対して、$F_i \in I$ となることである。従って、$\sigma_i(x_{ij}) = \alpha_i^j t$ で定義された k-多元環の準同型写像 $\sigma_i : k[[x_{i0}, \cdots, x_{in_i-1}]] \longrightarrow K_i[[t]]$ の核を I_i とおけば、I は $I_0, I_1, \cdots, I_r$ で生成されることがわかる。従って、I の生成元を求めるには、各 I_i の生成元を求めればよい。つまり、次の補題が示せれば十分である。

<u>補題</u> 1.2. $k(\alpha)$ を k の単純拡大体とし、$[k(\alpha):k] = n$ とする。$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ を α の k 上の最小多項式とする。k-多元環準同型 $\sigma : k[[x_0, \cdots, x_{n-1}]] \longrightarrow k(\alpha)[[t]]$ を $\sigma(x_i) = \alpha^i t$ で定義し、$I = \mathrm{Ker}\,\sigma$ とおく。$\xi_m = x_{[\frac{m}{2}]} x_{m-[\frac{m}{2}]}$

(ただし、[ ] はガウス記号) とおくとき、I は次の2次の同次多項式で生成される。

$$\psi_{ij} = x_i x_j - \xi_{i+j} \qquad (0 \leqq i, j \leqq n-1)$$

$$\varphi_m = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \xi_{\nu+m} \qquad (0 \leqq m \leqq n-2)$$

<u>証明</u>. I' を上の ψ_{ij} 及び φ_m で生成された $k[[x_0, \cdots, x_{n-1}]]$ のイデアルとして、$I = I'$ を示す。$I' \subseteq I$ は明らかである。逆の包含をいうために、まず次の事実を示す。"任意の、2次以上の次数 N をもつ単項式 W に対し、x_0 を因数にもつ有限個の次数 N の単項式 W_ν をえらんで、$W \equiv \sum_\nu W_\nu \pmod{I'}$ となるようにできる。" これを示すには、次数についての帰納法により、$N = 2$ の場合についてみれば十分である。そこで $W = c x_i x_j$ とする。このとき、もしも $i + j \leqq n - 1$ ならば、$c x_i x_j \equiv c x_0 x_{i+j} \pmod{I'}$ となって証明は終わる。$i + j \geqq n$ としよう。このとき、$m = i + j - n$ とおけば、$0 \leqq m \leqq n - 2$ であって、更に、

$$\begin{aligned} x_i x_j &= \psi_{ij} + \varphi_m - (a_{n-1} \xi_{n-1+m} + \cdots + a_0 \xi_m) \\ &\equiv -(a_{n-1} \xi_{n-1+m} + \cdots + a_0 \xi_m) \pmod{I'} \end{aligned}$$

となる。ここで $m \leqq \nu \leqq n + m - 1$ をみたす各 ν に対し、$[\frac{\nu}{2}] + (\nu - [\frac{\nu}{2}]) = \nu < n + m = i + j$ となることに注意する。従って、もし必要ならば、今の議論を何度か繰り返すことにより、$x_i x_j \equiv \sum_{\nu, \mu} b_{\nu\mu} x_\nu x_\mu \pmod{I'}$ (ただし、ここ

で、$b_{\nu\mu} \in k$、かつ $\nu + \mu \leqq n-1$）とできることがわかる。このとき、$W = c\, x_i x_j \equiv \sum_{\nu,\mu} c\, b_{\nu\mu}\, x_0\, x_{\nu+\mu} \pmod{I'}$ となる。よって主張は示された。

さて、$F \in I$ を任意にとる。$F = \sum_{N=0}^{\infty} F_N$，（ここに、$F_N$ は N 次の同次多項式）を F の同次多項式への分解とする。このとき、$\sigma(F) = \sum_{N=0}^{\infty} c_N t^N$ （${}^{\exists} c_N \in k$）となるから、$F \in I$ となるためには、各 $F_N \in I$ となることが必要十分である。そこで最初から、F は N 次の同次多項式であると仮定してよい。このとき、明らかに $N \geqq 2$ である。よって、今証明した事実により、$F \equiv x_0 G \pmod{I'}$ となる同次多項式 $G \in k[[x_0, \cdots, x_{n-1}]]$ が存在する。すると、$x_0 G - F \in I' \subseteq I$ かつ $F \in I$ より $x_0 G \in I$ である。I は素イデアルであり、また $x_0 \notin I$ であるから、$G \in I$ となる。ここで、もしも $G = 0$ ならば、$F \equiv x_0 \cdot G = 0 \pmod{I'}$ ゆえ $F \in I'$ となる。もしも、$G \neq 0$ ならば、G の次数は $N-1$ に等しい。そこで、次数についての帰納法を使えば、$G \in I'$、従って $F \in I'$ となることがわかる。つまり、$I \subseteq I'$ が示された。よって $I = I'$ である。

（証明終わり）

この補題により、次がいえた。

<u>定理</u> 1.3.　$(A, \mathfrak{m})$, k, K_i 等は、最初に定めた通りとする。$K_i = k(\alpha_i)$，$[K_i : k] = n_i$ とし、$f_i(x) = \sum_{\nu=0}^{n_i} a_{i\nu} x^{\nu}$

を k 上 α_i の最小多項式とする。$k[[\cdots, x_{ij}, \cdots]]$（ただし、$1 \leqslant i \leqslant r$, $0 \leqslant j < n_i$）を k 上の形式的べき級数環とし、$\xi_{i,m} = x_{i[\frac{m}{2}]} x_{im-[\frac{m}{2}]}$ とおき、I を次の2次の同次多項式で生成された $k[[\cdots, x_{ij}, \cdots]]$ のイデアルとする。

$$g_{ijk\ell} = x_{ij} x_{k\ell} \qquad (i \neq k)$$

$$\psi_{ik\ell} = x_{ik} x_{i\ell} - \xi_{i,k+\ell} \qquad (0 \leqslant k, \ell \leqslant n_i - 1,\ 1 \leqslant i \leqslant r)$$

$$\varphi_{im} = \sum_{\nu=0}^{n_i} a_{i\nu} \xi_{i,\nu+m} \qquad (0 \leqslant m \leqslant n_i - 2,\ 1 \leqslant i \leqslant r)$$

このとき、A が *seminormal* であるための必要十分条件は、$\hat{A} \cong_k k[[\cdots, x_{ij}, \cdots]]/I$ となることである。

<u>Example</u> 1.4. 例として、$[K : k] = 3$ の場合を考える。このとき、A を *seminormal* とすれば、次の3つの場合がある。

<u>Case</u> 1　$r = 3$：　このときは　$K_1 = K_2 = K_3 = k$　であって、

$$\hat{A} \cong_k k[[x, y, z]]/(xy, yz, zx)$$

<u>Case</u> 2　$r = 2$：　このときは　$K_1 = k$, $K_2 = k(\alpha)$　で $[K_2 : k] = 2$ となる。$x^2 + ax + b$ を α の k 上の最小多項式とすれば、次を得る。

$$\hat{A} \cong_k k[[x, y, z]]/(xy,\ y^2 + ayz + bz^2,\ zx)$$

<u>Case</u> 3　$r = 1$：　このときは　$K = k(\beta)$　で　$[K : k] = 3$ となる。$x^3 + ax^2 + bx + c$ を β の k 上の最小多項式とすれば次を得る。

$$\hat{A} \cong_k k[[x, y, z]]/(x^2+axy+by^2+cyz,\ y^2-xz,\ xy+ay^2+byz+cz^2)$$

注意．Aが seminormal であるとして，$\hat{A}$の形を具体的に求めることは，kが完全体であることを（つまり，各K_iがk上単純拡大体であることを）仮定しなくても可能である。詳細は〔3〕参照。

注意．Davis により，次の事実が示されている（[2]参照）。“$(A, \mathfrak{m})$等は§0に固定したものと同じとする。$\mathrm{Gr}_{\mathfrak{m}}^{\bullet}(A) = \bigoplus_{i\geq 0} \mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}$とするとき，次は同値である。(1) A は seminormal である。(2) $\mathrm{Gr}_{\mathfrak{m}}^{\bullet}(A) \cong_k k + tK[t]$。(3) $\mathrm{Gr}_{\mathfrak{m}}^{\bullet}(A)$ は seminormal である。” この事実から始めて，以上と全く同じ議論を（形式的べき級数環を多項式環におき代えて）行なえば，次の結果を得る。“A が seminormal であるための必要十分条件は$\mathrm{Gr}_{\mathfrak{m}}^{\bullet}(A) \cong_k k[\cdots, x_{ij}, \cdots]/I$となることである。ただし，ここで，Iの生成元は，定理1.3.において定めたものと，全く同じである。”

§2．代数曲線の局所環の seminormalization

本節では，kは完全体であって，かつ無限体である（例えば標数が0である）と仮定する。

さて，Xを体k上定義された被約な平面代数曲線，PをXの閉点とする。このとき，最初にも述べたように，Pが seminormal であるためには，Pが単純点であるか，又は，結

節点であるかのいずれかであることが必要十分条件である。従って、P が X の特異点であって、かつ結節点でないような場合には、P は seminormal ではなくなる。そこで、このような特異点 P に対して、$\mathcal{O}_{P,X}$ の seminormalization を実際に求めることについて考えてみる。

この目的のためには、X は2変数多項式 $F(x,y)\in k[x,y]$ で定義された、アフィン代数曲線であって、かつ P は原点であると仮定してよい。そこで、$F(x,y)=\sum_{i+j\geq n} a_{ij}x^iy^j$ とする。適当な一次変換により、$a_{0n}\neq 0$ とできるから、最初から $a_{0n}=1$ と仮定しておく。このとき、P が通常 n 重点であるとは、$\bar{k}[x,y]$（ただし、$\bar{k}$ は k の代数閉包を表わす）において、互いに相異なる n 個の元 $\alpha_0,\cdots,\alpha_{n-1}\in\bar{k}$ があって、$\sum_{i+j=n} a_{ij}x^iy^j=(y-\alpha_0x)\cdots(y-\alpha_{n-1}x)$ と表わされることであると定義する。こう定義したとき、通常 n 重点 P に対しては、$\mathcal{O}_{P,X}$ の seminormalization を具体的に定めることができる。以下では、このことをみていく。そのために、まず次の補題を準備しておく。

<u>補題</u> 2.1. R を被約、1次元、ネーター的な k－多元環で L を k の拡大体とする。このとき、R が seminormal であるための必要十分条件は、$R\otimes_k L$ が seminormal になることである。

<u>証明</u>. まず最初に、$(R,\mathfrak{p})$ が局所環の場合に証明する。

このときは、L が k 上分離拡大体ゆえ、$R\otimes_k L$ は被約な1次元半局所環で、$J(R\otimes_k L) = \mathfrak{q}\otimes_k L$ である。また、R の $Q(R)$ における整閉包を $\bar{R}$ とするとき、$R\otimes_k L$ の $Q(R\otimes_k L)$ における整閉包は、$\bar{R}\otimes_k L$ である。そこで、まず R が *seminormal* であるとする。このとき、$\mathfrak{q} = J(\bar{R})$。$\mathfrak{P}$ を $R\otimes_k L$ のかってな極大イデアルとする。すると、$J((R\otimes_k L)_{\mathfrak{P}}) = (\mathfrak{q}\otimes_k L)_{\mathfrak{P}} = (J(\bar{R})\otimes_k L)_{\mathfrak{P}} = J((\bar{R}\otimes_k L)_{\mathfrak{P}})$。よって、*Criterion* 0.1. により、$(R\otimes_k L)_{\mathfrak{P}}$ は *seminormal* である。$\mathfrak{P}$ は任意ゆえ、従って $R\otimes_k L$ は *seminormal* である。逆に、$R\otimes_k L$ が *seminormal* であるとする。このとき、かってな $R\otimes_k L$ の極大イデアル $\mathfrak{P}$ に対し、上の等式を逆にみて、$(\mathfrak{q}\otimes_k L)_{\mathfrak{P}} = (J(\bar{R})\otimes_k L)_{\mathfrak{P}}$ を得る。ここで、$\mathfrak{q}\otimes_k L \subseteq J(\bar{R})\otimes_k L$ かつ、両者は $R\otimes_k L$-加群の構造をもたせることができる。$\mathfrak{P}$ は任意ゆえ、このことから、$\mathfrak{q}\otimes_k L = J(\bar{R})\otimes_k L$ となり、従って、$\mathfrak{q} = J(\bar{R})$ を得る。ゆえに、R は *seminormal* である。次に、一般の場合に戻る。R が *seminormal* であるとする。$\mathfrak{P}$ を $(R\otimes_k L)$ のかってな極大イデアルとし、$\mathfrak{P}\cap R = \mathfrak{q}$ とおく。すると、$(R\otimes_k L)_{\mathfrak{P}}$ は $(R\otimes_k L)_{\mathfrak{q}} = R_{\mathfrak{q}}\otimes_k L$ を局所化したものであり、かつ仮定より、$R_{\mathfrak{q}}$、従って $R_{\mathfrak{q}}\otimes_k L$ は *seminormal* となる。よって、$(R\otimes_k L)_{\mathfrak{P}}$ は *seminormal* となり、ここで、$\mathfrak{P}$ は任意ゆえ、$R\otimes_k L$ が *seminormal* になることがわかる。逆に、$R\otimes_k L$ が、*seminormal* であると仮定する。R のかってな極大イデアル $\mathfrak{q}$

に対し、$S=(R\otimes_k L)_{\mathfrak{g}}=R_{\mathfrak{g}}\otimes_k L$ を考える。S の極大イデアルは、$\mathfrak{R}=\mathfrak{P}(R\otimes_k L)_{\mathfrak{g}}$（ここで、$\mathfrak{P}$ は $R\otimes_k L$ の極大イデアル）の形であり、従って、$S_{\mathfrak{R}}=(R\otimes_k L)_{\mathfrak{P}}$ となるから、仮定より、$S_{\mathfrak{R}}$ は seminormal である。よって前半で示したことにより、$R_{\mathfrak{g}}$ は seminormal になることがわかる。ここで、$\mathfrak{g}$ は任意ゆえ、R は seminormal である。　　　　（証明終わり）

もう1つ、次の補題を用意する。

補題 2.2. 多項式環 $k[x_0,\cdots,x_{n-1}]$ において、$\psi_{ij}=x_ix_j-\xi_{i+j}$（$0\leqslant i,j\leqslant n-1$，$\xi_{i+j}$ の定義は前節と同じ）とおき、各 ψ_{ij} で生成されたイデアルを I_0 とおく。このとき、もしも、$i_1+\cdots+i_m=j_1+\cdots+j_m$ ならば、$x_{i_1}\cdots x_{i_m}\equiv x_{j_1}\cdots x_{j_m}$ $(\mathrm{mod}\ I_0)$ である。

証明は易しいから、省略する。

さて、$F(x,y)=\sum_{i+j\geqslant n}a_{ij}x^iy^j$（ただし、$a_{0n}=1$）とする。$i+j\geqslant n$ をみたす順序対 (i,j) に対し、2つの整数 s_{ij}，t_{ij} を、$0\leqslant s_{ij}\leqslant i$，$0\leqslant t_{ij}\leqslant j$，$s_{ij}+t_{ij}=n$、となるようにえらぶ。そして、多項式環 $k[x_0,\cdots,x_{n-1}]$ において、$\psi_{ij}=x_ix_j-\xi_{i+j}$（$0\leqslant i,j\leqslant n-1$），及び、$\widetilde{\varphi}_m=\sum_{i+j\geqslant n}a_{ij}x_0^{i-s_{ij}}x_1^{j-t_{ij}}\xi_{m+t_{ij}}$（$0\leqslant m\leqslant n-2$）とおき、$\psi_{ij}$，$\widetilde{\varphi}_m$ 全体で生成されたイデアルを I とおく。ここで、補題 2.2. により、I は、s_{ij}，t_{ij} のえらび方によらず、一意的に定

まることに注意しておく。このとき、まず、次の補題を示す。

補題 2.3. $F(x, y)$, ψ_{ij}, $\widetilde{\varphi}_m$, 及び I は上の通りであるとする。このとき、$x \mapsto x_0$, $y \mapsto x_1$ で定義される環準同型写像 $(k[x, y]/(F(x, y)))_{(x, y)} \longrightarrow (k[x_0, \cdots, x_{n-1}]/I)_{(x_0, \cdots, x_{n-1})}$ は、単射、双有理的かつ整である。ただし、$n \geqq 2$ とする。

証明. 3段階に分けて証明する。

Step 1. $x \mapsto x_0$, $y \mapsto x_1$ で定義された単射準同型により、$k[x, y]$ を $k[x_0, \cdots, x_{n-1}]$ の部分環とみなす。このとき、$I \cap k[x, y] = F(x, y)k[x, y]$ である。

証明. I_0 を ψ_{ij} によって生成された $k[x_0, \cdots, x_{n-1}]$ のイデアルとする。このとき、補題 2.2. により、

$$x_0^{n-2}\widetilde{\varphi}_0 \equiv \sum_{i+j \geqq n} a_{ij} x_0^i x_1^j \equiv F(x_0, x_1) \quad (\mathrm{mod}\ I_0)$$

である。従って、$F(x, y) \in I \cap k[x, y]$ となり、$F(x, y)k[x, y] \subseteq I \cap k[x, y]$ を得る。逆に、$G(x, y) \in I \cap k[x, y]$ を任意にとる。すると、ある h_{ij}, $g_m \in k[x_0, \cdots, x_{n-1}]$ があって、

$$G(x_0, x_1) = \sum_{i,j} h_{ij}\psi_{ij} + \sum_{m=0}^{n-2} g_m \widetilde{\varphi}_m$$

と表わせる。ここで、再び補題 2.2. により、任意の $0 \leqq m \leqq n-2$ をみたす m に対して、

$$x_0^{n-1}\widetilde{\varphi}_m \equiv \sum_{i+j \geqq n} a_{ij} x_m x_0^i x_1^j \equiv x_m F(x_0, x_1) \quad (\mathrm{mod}\ I_0)$$

となることに注意する。従って、このことより、

$$x_0^{n-1} G(x_0, x_1) = x_0^{n-1}\sum_{i,j} h_{ij}\psi_{ij} + \sum_{m=0}^{n-2} g_m \cdot x_0^{n-1}\varphi_m$$

$$\equiv x_0^{n-1} \sum_{i,j} h_{ij} \psi_{ij} + \left(\sum_{m=0}^{n-2} x_m g_m\right) F(x_0, x_1) \pmod{I_0}$$

となる。よって、$g(x_0, \cdots, x_{n-1}) = \sum_{m=0}^{n-2} x_m g_m$ とおけば、ある $\widetilde{h}_{ij} \in k[x_0, \cdots, x_{n-1}]$ があって、

$$x_0^{n-1} G(x_0, x_1) = \sum_{i,j} \widetilde{h}_{ij} \psi_{ij} + g(x_0, \cdots, x_{n-1}) F(x_0, x_1)$$

とできることがわかる。このとき、$\widetilde{g}(x, y) \in k[x, y]$ を、ある整数 $N > 0$ があって、任意の $\alpha \in k$ に対し、$\widetilde{g}(x, \alpha x) = x^N g(x, \alpha x, \cdots, \alpha^{n-1} x)$ が成り立つようにえらぶ。（このような $\widetilde{g}(x, y)$ が存在することは容易にわかる。）そこで、$\alpha \in k$ を任意にとる。そして、等式

$$x_0^{N+n-1} G(x_0, x_1) = x_0^N \sum_{i,j} \widetilde{h}_{ij} \psi_{ij} + x_0^N g(x_0, \cdots, x_{n-1}) F(x_0, x_1)$$

の両辺に、$x_i = \alpha^i x \ (0 \leq i \leq n-1)$ を代入する。このとき、ψ_{ij} が $\alpha^{i+j} x^2 - \alpha^{i+j} x^2 = 0$ になることに注意すれば、

$$x^{N+n-1} G(x, \alpha x) = \widetilde{g}(x, \alpha x) F(x, \alpha x)$$

となることがわかる。従って、$x^{N+n-1} G(x, y) - \widetilde{g}(x, y) F(x, y)$ は、$k[x, y]$ において、$y - \alpha x$ でわり切れる。ここで、$\alpha \in k$ は任意かつ、k は無限体と仮定したから、$x^{N+n-1} G(x, y) - \widetilde{g}(x, y) F(x, y)$ は恒等的に 0 でなければならない。よって、$x^{N+n-1} G(x, y) = \widetilde{g}(x, y) F(x, y)$ を得る。ここで、$a_{0n} = 1$ と仮定したから、$F(x, y)$ は x でわり切れない。従って、$\widetilde{g}(x, y)$ は x^{N+n-1} でわり切れなければならない。このことは、つまり $G(x, y) \in F(x, y) k[x, y]$ となることを示している。従って、

逆の包含、$I \cap k[x,y] \subseteq F(x,y)k[x,y]$ が証明できた。

<u>Step</u> 2. Step 1. により、$x \mapsto x_0$, $y \mapsto x_1$ で定義された単射環準同型 $k[x,y]/(F(x,y)) \hookrightarrow k[x_0,\cdots,x_{n-1}]/I$ を得る。$\mathfrak{P}$ を $k[x_0,\cdots,x_{n-1}]/I$ の素イデアルで、$\overline{x_0}$, $\overline{x_1}$ を含むようなものとする。(ここで、$\overline{}$ は標準的写像 $k[x_0,\cdots,x_{n-1}] \to k[x_0,\cdots,x_{n-1}]/I$ による像を表わす。) すると、このとき、$\mathfrak{P}$ は $(\overline{x_0},\cdots,\overline{x_{n-1}})$ に等しい。

<u>証明</u>. $i \leqslant n-3$ に対して、$\overline{x_i} \in \mathfrak{P}$ とする。すると、$\overline{x_{i+1}}^2 = \overline{x_i}\,\overline{x_{i+2}} \in \mathfrak{P}$ ゆえ、$\overline{x_{i+1}} \in \mathfrak{P}$ となる。よって、$\overline{x_0},\cdots,\overline{x_{n-2}} \in \mathfrak{P}$ である。他方、$\widetilde{\varphi_{n-2}} \in I$ ゆえ、$\overline{\widetilde{\varphi_{n-2}}} = 0$ であり、かつ定義より、$\widetilde{\varphi_{n-2}} = x_{n-1}^2 + \eta$ (ここで、$\eta \in (x_0,\cdots,x_{n-2})k[x_0,\cdots,x_{n-1}]$) と書ける。従って、$\overline{x_{n-1}}^2 \in (\overline{x_0},\cdots,\overline{x_{n-2}}) \subseteq \mathfrak{P}$ となり、$\overline{x_{n-1}} \in \mathfrak{P}$ を得る。ゆえに、$(\overline{x_0},\cdots,\overline{x_{n-1}}) \subseteq \mathfrak{P}$ であるが、明らかに、$(\overline{x_0},\cdots,\overline{x_{n-1}})$ は $k[x_0,\cdots,x_{n-1}]/I$ の極大イデアルであるから、従って、両者は一致しなければならない。

<u>Step</u> 3. $x \mapsto x_0$, $y \mapsto x_1$ で定義された環準同型写像、$(k[x,y]/(F(x,y)))_{(x,y)} \longrightarrow (k[x_0,\cdots,x_{n-1}]/I)_{(x_0,\cdots,x_{n-1})}$ は、単射双有理的、かつ整である。

<u>証明</u>. $B = k[x,y]/(F(x,y))$, $C = k[x_0,\cdots,x_{n-1}]/I$ とおく。また、$\mathfrak{p} = (\overline{x},\overline{y})B$, $\mathfrak{P} = (\overline{x_0},\cdots,\overline{x_{n-1}})C$ とおく。C において、$1 \leqslant i \leqslant n-1$ に対し、$\overline{x_i}\,\overline{x_0}^{i-1} = \overline{x_1}^i$ であり、かつ $\overline{x}$ は B

の正則元であることに注意する。従って、$C_{\mathfrak{g}} \subseteq Q(B_{\mathfrak{g}})$ となることがわかる。そこで、まず $C_{\mathfrak{g}}$ が $B_{\mathfrak{g}}$ 上整であることを示そう。実際Bにおいて、$F(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i+j \geq n} a_{ij} \bar{x}^i \bar{y}^j = 0$ であるから、このことより、$(\bar{x}_1 / \bar{x}_0)$ が $B_{\mathfrak{g}}$ 上整であることがわかる。従って、$\bar{x}_i = \bar{x}_1 (\bar{x}_1 / \bar{x}_0)^{i-1} \in Q(B_{\mathfrak{g}})$ も再び $B_{\mathfrak{g}}$ 上整となる。$C_{\mathfrak{g}}$ は $B_{\mathfrak{g}}$ 上 $\bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_{n-1}$ で生成されるゆえ、$C_{\mathfrak{g}}$ は $B_{\mathfrak{g}}$ 上整である。さて、$\mathfrak{q} C_{\mathfrak{g}}$ を $C_{\mathfrak{g}}$ の極大イデアルとする（ここに、$\mathfrak{q}$ は C の極大イデアル。）すると、$\mathfrak{q} C_{\mathfrak{g}} \cap B_{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} B_{\mathfrak{g}}$ ゆえ、$\mathfrak{q} \cap B = \mathfrak{g}$ を得る。よって、Step 2. により $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$ でなければならない。つまり $C_{\mathfrak{g}}$ は局所環である。このことから $C_{\mathfrak{p}} = C_{\mathfrak{g}}$ となることがわかる。従って、すべての主張が示された。　　　　　　　　　　（証明終わり）

次に、補題2.5.をいうために、1つの補題を用意する。

<u>補題</u> 2.4. L を体とし、$\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}$ を互いに相異なる L の元とする。$(x-\alpha_0)\cdots(x-\alpha_{n-1}) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu$ により、$a_0, \cdots, a_n$ を定め、$k[x_0, \cdots, x_{n-1}]$ において、$\psi_{ij} = x_i x_j - \xi_{i+j}$ $(0 \leq i, j < n)$ $\varphi_m = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \xi_{\nu+m}$ $(0 \leq m \leq n-2)$ とおき、ψ_{ij}, φ_m で生成された $k[x_0, \cdots, x_{n-1}]$ のイデアルを $\tilde{I}$ とおく。このとき、k-多元環準同型、$\Phi : k[x_0, \cdots, x_{n-1}] \longrightarrow k[y_0, \cdots, y_{n-1}]$ を、$\Phi(x_i) = \alpha_0^i y_0 + \cdots + \alpha_{n-1}^i y_{n-1}$ $(0 \leq i \leq n-1)$ で定義すれば、Φ は同型であって、イデアル $\Phi(\tilde{I})$ は $y_i y_j$（ただし、$i \neq j$）の全

体で生成される。

証明. Φ の Jacobian 行列式は、いわゆる Vandermonde の行列式であって、仮定よりそれは0でない。よってΦは同型である。$f(x) = (x-\alpha_0)\cdots(x-\alpha_{n-1})$ とおいて、$f_i(x) = f(x)/f'(\alpha_i)(x-\alpha_i) = \beta_{i0} + \beta_{i1}x + \cdots + \beta_{in-1}x^{n-1}$ とおく。このとき、Φの逆写像Ψは、$\Psi(y_i) = \beta_{i0}x_0 + \cdots + \beta_{in-1}x_{n-1}$ で定義される。$I' = (\cdots, y_iy_j, \cdots) \subseteq k[y_0, \cdots, y_{n-1}]$ (ただし、$i \neq j$) とおいて、$\Phi(\tilde{I}) = I'$ を示す。それには、$\Phi(\tilde{I}) \subseteq I'$ 及び $\Psi(I') \subseteq \tilde{I}$ を示せばよい。$\Phi(\tilde{I}) \subseteq I'$ は容易に確かめられるから、ここでは、$\Psi(I') \subseteq \tilde{I}$ のみをいう。I'の生成元 y_iy_j (ただし $i \neq j$) を任意にとる。このとき、

$$\Psi(y_iy_j) = \left(\sum_{k=0}^{n-1}\beta_{ik}x_k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{n-1}\beta_{j\ell}x_\ell\right)$$
$$= \sum_{k,\ell}\beta_{ik}\beta_{j\ell}\psi_{k\ell} + \sum_{N=0}^{2n-2}\left(\sum_{k+\ell=N}\beta_{ik}\beta_{j\ell}\right)\xi_N$$

となることに注意する。ここで、$i \neq j$ ゆえ、$f_i(x)f_j(x)$ は $f(x)$ でわり切れる。よって、ある $c_0, \cdots, c_{n-2} \in L$ があって、

$$f_i(x)f_j(x) = \sum_{N=0}^{2n-2}\left(\sum_{k+\ell=N}\beta_{ik}\beta_{j\ell}\right)x^N$$
$$= \left(\sum_{\nu=0}^{n-2}c_\nu x^\nu\right)\left(\sum_{\nu=0}^{n}a_\nu x^\nu\right) = \sum_{N=0}^{2n-2}\left(\sum_{m=0}^{n-2}c_m a_{N-m}\right)x^N$$

となる。よって $\sum_{k+\ell=N}\beta_{ik}\beta_{j\ell} = \sum_{m=0}^{n-2}c_m a_{N-m}$ となる。ただし、以上では、$\nu < 0$ または $\nu > n$ なる ν に対しては、$a_\nu = 0$ であるとする。これより、次を得る。

$$\Psi(y_iy_j) = \sum_{k,\ell}\beta_{ik}\beta_{j\ell}\psi_{k\ell} + \sum_{m=0}^{n-2}c_m\left(\sum_{N=0}^{2n-2}a_{N-m}\xi_N\right)$$

ところが、ここで、

$$\sum_{N=0}^{2n-2} a_{N-m}\xi_N = a_0\xi_m + \cdots + a_n\xi_{n+m} = \tilde{\varphi}_m$$

であるから、結局、

$$\Phi(y_i y_j) = \sum_{k,\ell} \beta_{ik}\beta_{j\ell}\psi_{k\ell} + \sum_{m=0}^{n-2} c_m \tilde{\varphi}_m$$

となり、従って、$\Phi(y_i y_j) \in \tilde{I}$、つまり $\Phi(I') \subseteq \tilde{I}$ を得る。

（証明終わり）

そこで、次の補題を示そう。

<u>補題</u> 2.5. $F(x,y) = \sum_{i+j \geq n} a_{ij} x^i y^j$（ただし、$a_{0n} = 1$）とし、イデアル $I \subset k[x_0, \cdots, x_{n-1}]$ は、補題2.3.と同じであるとする。ここで、$\bar{k}[x,y]$ において、$\sum_{i+j=n} a_{ij} x^i y^j = (y-\alpha_0 x)\cdots(y-\alpha_{n-1}x)$（ただし、$i \neq j$ のとき $\alpha_i \neq \alpha_j$）であるとせよ。このとき局所環 $(k[x_0, \cdots, x_{n-1}]/I)_{(x_0, \cdots, x_{n-1})}$ は seminormal である。

<u>証明</u>. $R = (k[x_0, \cdots, x_{n-1}]/I)_{(x_0, \cdots, x_{n-1})}$ とおき、$\mathfrak{M}$ を R の極大イデアルとおく。このとき、$gr_{\mathfrak{M}}^{\cdot}(R) \otimes_k \bar{k} \cong \bar{k}[y_0, \cdots, y_{n-1}]/(\cdots, y_i y_j, \cdots)$（ただし、$i \neq j$）となることをまず示す。実際 $\varphi_m = \sum_{\nu=0}^{n} a_{n-\nu\,\nu}\xi_{\nu+m}$ とおき、ψ_{ij} 及び φ_m で生成された $k[x_0, \cdots, x_{n-1}]$ のイデアルを $\tilde{I}$ とおけば、

$$gr_{\mathfrak{M}}^{\cdot}(R) \cong_k k[x_0, \cdots, x_{n-1}]/\tilde{I}$$

である。従って、先程の補題2.4.により、

$$gr_{\mathfrak{m}}^{\cdot}(R) \otimes_k \bar{k} \cong_{\bar{k}} \bar{k}[y_0, \cdots, y_{n-1}]/(\cdots, y_i y_j, \cdots)$$

となることがわかる。よって、このことから、$gr_{\mathfrak{m}}^{\cdot}(R) \otimes_k \bar{k}$ は

seminormal である。（[2] 参照）　従って、補題 2.1. により、$gr^{\bullet}_{m}(R)$ は seminormal である。故に、R は seminormal である。（[2] 参照）　　　　（証明終わり）

補題 2.3. 及び補題 2.5. をまとめれば、次の定理が得られる。

定理 2.6.　X を、$F(x,y)=\sum_{i+j\geq n} a_{ij}x^i y^j$　（ただし $a_{0n}=1$）で定義された平面代数曲線、$P\in X$ を原点（$x=0,\ y=0$）とする。このとき、P が通常の重点であるならば（ただし $n\geq 2$）局所環 $\mathcal{O}_{P,X}=(k[x,y]/(F(x,y)))_{(x,y)}$ の seminormalization は $(k[x_0,\cdots,x_{n-1}]/I)_{(x_0,\cdots,x_{n-1})}$ に等しい。ここで、イデアル I は、補題 2.3. において定めたものと同じである。

注意．上の定理で、P が通常の重点であるという仮定を除いたときは、$\mathcal{O}_{P,X}$ の seminormalization は、次の例が示すように、そう単純ではないといえる。

例 1.　$D=(k[x,y]/(y^2(x+y)-x^4))_{(x,y)}$ とする。このとき D の seminormalization D^+ は $(k[x_0,x_1]/(x_1^2+x_0x_1+x_0^3))_{(x_0,x_1)}$ に等しく、埋め込み $D\hookrightarrow D^+$ は、$x\mapsto x_1,\ y\mapsto x_0^2-x_1$ で与えられる。

例 2.　$E=(k[x,y]/(y^2(x+y)-x^5))_{(x,y)}$ とする。このとき E の seminormalization E^+ は

$$(k[x_0,x_1,x_2]/(x_1^2-x_0x_2,\ x_1x_2-x_0x_1-x_0^3,\ x_2^2-x_1^2-x_0^2x_1))_{(x_0,x_1,x_2)}$$

に等しく、埋め込み $E \hookrightarrow E^+$ は、$x \longmapsto x_0$, $y \longmapsto x_2 - x_0$ で与えられる。

通常n重点の場合は、seminormalization は、本質的に、$F(x, y)$ の leading form だけで決まったのに対し、そうでない場合には、上の2つの例からもわかるように、様子はかなり複雑になっているようである。

参考文献

[1] E. Bombieri, Seminormalità e singolarietà ordinarie, Symp. Math. 11 (1973), 205-210.

[2] E. Davis, On the geometric interpretation of semi-normality, Proc. Amer. Math. Soc. 68 (1978), 1-5.

[3] N. Onoda, On completions of one-dimensional semi-normal rings, manuscript.

[4] C. Traverso, Seminormality and Picard group, Ann. Scoula. Norm. Sup. Pisa Ser 3, 24 (1970), 585-595.