

局所環の半安定性

東北大理, 鏡弘道

§1 半安定局所環の定義と例.

定義 \mathcal{O} を r -次元 equicharacteristic 局所環とする.

$R \geq 0$ に対し \mathcal{O} の R -th flat multiplicity $e_R(\mathcal{O})$ を次のように定める.

$$e_0(\mathcal{O}) = \sup \{ e(I) / r! \operatorname{col}(I) \mid I \text{ は } \mathcal{O} \text{ の ideal で } \operatorname{col}(I) < \infty \}$$

$$e_R(\mathcal{O}) = e_0([\![t_1, \dots, t_R]\!])$$

ただし $e(I)$ は I の multiplicity $\operatorname{col}(I) = \ell_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}/I)$ である.

このとき次のことが成立する.

$$(1.1) \quad \hat{\mathcal{O}} \text{ を } \mathcal{O} \text{ の完備化とするととき } e_R(\hat{\mathcal{O}}) = e_R(\mathcal{O})$$

$$(1.2) \quad e(\mathcal{O}) \geq e_0(\mathcal{O}) \geq e_1(\mathcal{O}) \geq \dots \geq e_R(\mathcal{O}) \geq \dots \geq 1$$

定義 ([1])

$$\mathcal{O} \text{ が半安定} \iff e_1(\mathcal{O}) = e_0(\mathcal{O}[\![t]\!]) = 1.$$

(1.2) より直ちに正則局所環が半安定であることがわかる.

半安定局所環の例

例 1 ([1])

\mathcal{O} を 1次元 Cohen-Macaulay 局所環とする. このとき.

\mathcal{O} が半安定 $\Leftrightarrow \mathcal{O}$ は正則 または $\mathcal{O} \cong \mathbb{R}[[x, y]] / (x, y)$

例 2 ([2])

\mathbb{R} を標数 0 の代数体, \mathcal{O} を 2次元 Cohen-Macaulay 半安定 \mathbb{R} -局所環とし, e を \mathcal{O} の重複度, b を \mathcal{O} の embedding dimension とする. このとき $e \leq b$ で, $e = b$ または, $e = b - 1$ が成立する.

さらに [2] によれば次の結果が得られるとのことである.

(1) $e = b$ のとき.

$\text{Gr}_m \mathcal{O}$ も Cohen-Macaulay ぞ. $\text{Proj Gr}_m \mathcal{O}$ は非特異楕円曲線であるかまたは, 特異点として通常 2重点をもちその dual graph が円と同相になる曲線.

(2) $e = b - 1$ のとき.

[2] ぞは $e = 2$ と $e = 3$ の場合が分類されてくる.

(a) $e = 2$ のとき.

$\hat{\mathcal{O}} = \mathbb{R}[[x, y, z]] / (f)$ ぞ f は次のような形.

(i) $z^2 + g$: $g \in \mathbb{R}[[y, z]]$ は $\hat{\mathcal{O}}$ が rational double になるような元.

(ii) yz

(iii) $z^2 + y^2 \cdot x$

$$(iv) z^2 + (y + a_1 x^2)(y + a_2 x^2)(y + a_3 x^2)$$

+ (x, y に關する weight > 6 の項)

ただし $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ のうち少なくとも2つは相異なり, x の weight を 1, y の weight を 2 とする.

$$(v) z^2 + (y + a_1 x)(y + a_2 x)(y + a_3 x)(y + a_4 x)$$

+ (x, y に關する degree > 4 の項)

ただし a_1, a_2, a_3, a_4 は \mathbb{R} の元でどの3つも同じではないものとする.

(b) $e = 3$ のとき.

Tyurina [3] の記号を使うと, \mathcal{O} の特異性の可能性は次のようになる.

$$(i) A_{m, m, \mathbb{R}} : 0 \leq m, m, \mathbb{R} \leq \infty, \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{\mathbb{R}+1} \geq 1$$

$$(ii) B_{0, m} : 3 \leq m \leq 7,$$

$$B_{m, 3} : 1 \leq m \leq \infty$$

$$B_{1, 4}$$

$$(iii) C_{m, m} : 3 \leq m \leq \infty, 0 \leq m \leq \infty$$

$$(iv) D_0$$

$$(v) H_5$$

例 3 ([1])

$$\mathcal{O}_3 = \mathbb{R}[[x_1, x_2, x_3]] / (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3)$$

$$\mathcal{O}_m = \mathbb{R}[[x_1, \dots, x_m]] / (x_i \cdot x_j) \quad i-j \equiv -1, 0, 1 \pmod{m} : m \geq 4$$

とする. \mathcal{O}_m は elliptic polygonal singularity と呼ばれるが, 次の成立する.

$$\mathcal{O}_m \text{ が半安定} \iff m \leq 6$$

例4

m, p を互いに素な整数で $0 < p < m$ とする. 位数 m の巡回群 G の生成元が $\mathbb{R}[[x, y]]$ に $(x, y) \mapsto (\zeta_m x, \zeta_m^p y)$ により作用しているとする. このとき不変式環 $\mathbb{R}[[x, y]]^G$ は cyclic quotient singularity と呼ばれるが次の成立する. 但し ζ_m は 1 の原始 m 乗根である.

$$\mathbb{R}[[x, y]]^G \text{ が半安定} \iff m/p = b_1 - 1/b_2 - \dots - 1/b_r$$

($b_i \geq 2$) を連分数展開としたとき, $\sum_{i=1}^r (b_i - 2) \leq 4$

例5

球面 S^2 の三角形分割 Δ が与えられたとき, 次のような完備局所環 \mathcal{O}_Δ を考える.

• Δ の各頂点に番号 $1, 2, \dots, n$ をつけ, それに対応して変数 x_1, \dots, x_n を考え, $\mathcal{O}_\Delta = \mathbb{R}[[x_1, \dots, x_n]] / I_\Delta$ とする. ただし $I_\Delta \subset \mathbb{R}[[x_1, \dots, x_n]]$ は次のような monomials で生成された ideal とする.

- $n = 4$ のとき $I_\Delta = (x_1 x_2 x_3 x_4)$
- $n \geq 5$ のとき I_Δ の生成元は次の通り.

- $x_i \cdot x_j$: $i \neq j$ ぞ i と j は Δ に属する 1 つの辺の両端点にはなっていない。
- $x_i \cdot x_j \cdot x_k$: i, j, k はすべて相異なる Δ に属する 1 つの三角形の 3 頂点にはなっていない。

\mathcal{O}_Δ は Gorenstein である。(Hochster [4], Ishida [5])
 \mathcal{O}_Δ の半安定性についてはまだ完全にはわからないが例えば次のことがいえる。

• Δ の各頂点に集まる辺の数が 5 以下ならば \mathcal{O}_Δ は半安定。
 それらのものは 11 通りある。(Ishida, Oda [9])。

例 3, 4, 5 にあらわれる局所環はいずれも Torus-embedding を考えるときにあらわれるもので、これらの局所環の半安定性は、 \mathbb{R}^m の特別な図形の体積と格子点の数の関係を調べることにより判定できる。以後それについて述べる。

§2 Torus-embedding のときにあらわれる局所環の半安定性の判定法。

• $M \cong \mathbb{Z}^m$ を階数 m の自由アベル群, $M_{\mathbb{R}} = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ とする。
 $\omega \subset M_{\mathbb{R}}$ を次の性質をもつ部分集合とする。

$$(1) \exists m_1, \dots, m_\rho \in M : \omega = \sum_{i=1}^{\rho} \mathbb{R}_{\geq 0} m_i .$$

$$(2) \omega + (-\omega) = M_{\mathbb{R}} .$$

$$(3) \omega \cap (-\omega) = \{0\} .$$

$T(\omega) = \{ \text{faces of } \omega \}$ とおき, $\square \subset T(\omega)$ を部分

複体, 即ち $\xi \in \square$, $\eta \in \square$, η が ξ の face のとき $\eta \in \square$ となるものとする. $S = \bigcup_{\xi \in \square} (M \cap \xi)$ とおき, k を体とする. 各 $m \in S$ に対し z , monomial と称する記号 $e(m)$ を導入し, $\mathcal{O}(\square)$ を $\sum_{m \in S} a_m e(m)$ ($a_m \in k$, \sum は無限和も許す) の形の元全体とし, 乗法を.

$$e(m) \cdot e(m') = \begin{cases} e(m+m') & : \exists \xi \in \square \quad m, m' \in \xi \\ 0 & : \text{その他のとき} \end{cases}$$

により定めた完備局所環とする. このとき次が成立する.

$$(2.1) \quad \dim \mathcal{O}(\square) = \max_{\xi \in \square} \dim \xi.$$

$$(2.2) \quad \mathcal{O}(\square)[[t]] = \mathcal{O}(\square')$$

$$\text{ただし } \square' = \{ \xi \times \mathbb{R}_{\geq 0}, \xi \times \{0\} \mid \xi \in \square \} \\ \subset \{ \text{faces of } \omega \times \mathbb{R}_{\geq 0} \}.$$

$$(2.3) \quad e_0(\mathcal{O}(\square)) = \sup \{ e(I) / r! \operatorname{col}(I) \mid I \text{ は} \\ \text{monomials で生成され } \operatorname{col}(I) < \infty \}$$

(2.3) の証明は次の通りである. ([1] における (1.2) の証明を借用)

$\mathcal{O}(\square)$ の colength ν の ideal 全体を parametrize してやる Hilbert scheme $\operatorname{Hilb}_{\mathcal{O}(\square)}^{\nu}$ を考え.

$e: \operatorname{Hilb}_{\mathcal{O}(\square)}^{\nu} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を各 ideal にその重複度を対応させる写像とする. Teissier-Lejeune [6] により e は上半連続である. また $\mathcal{O}(\square)$ には自然な \mathbb{G}_m^n の作用が

ある。即ち、ある M の座標系で $m = (m_1, \dots, m_n)$ としたとき、 $e(m) \mapsto \lambda_1^{m_1} \dots \lambda_n^{m_n} \cdot e(m)$ 。これは $\text{Hilb}^{\vee}_0(E)$ に自然な \mathbb{G}_m^n の作用をひきおこし、Borel の不動点定理により各 ideal I の軌道の閉包には \mathbb{G}_m^n -不動点である ideal I' がある。このとき重複度の上半連続性により $e(I') \geq e(I)$ である。 I' が \mathbb{G}_m^n -不変であることと、 I' が monomials で生成されることは同値であるから (2.3) を得る。

• (2.3) により $e_0(O(E))$ を計算するためにまず各 $\xi \in \Sigma$ に対して次のように考える。

$\xi \in \Sigma$ に対し $R_{\xi} = O(T(\xi))$ を $\sum_{m \in M \cap \xi} a_m e(m)$ ($a_m \in \mathbb{R}$, \sum は無限和も許す) の形の元全体に、 $e(m) \cdot e(m') = e(m+m')$ により乗法を定義した完備局所環とする。

$I = (e(m_1), \dots, e(m_\ell)) \subset R_{\xi}$ を monomials で生成され、 $\text{col}(I) < \infty$ なる ideal とし、 $\tilde{I} = \bigcup_{i=1}^{\ell} (m_i + (M \cap \xi))$ 、即ち半群 $M \cap \xi$ の m_1, \dots, m_ℓ で生成された半群イデアルとする。このとき $r = \dim \xi$ とすれば次が成立する。

$$(2.4) \quad \text{col}(I) = \text{Card}(M \cap \xi \setminus \tilde{I}).$$

即ち $M \cap \xi \setminus \tilde{I}$ の元の個数。

$$(2.5) \quad e(I)/r! = \text{vol}_r(\xi \setminus \text{凸包}(\tilde{I}))$$

即ち $\xi \setminus \text{凸包}(\tilde{I})$ の r 次元体積。

• 各 $\xi \in \Sigma$ に対して (2.4) (2.5) を適用すると、比較的

簡単に (2.3) により $e_0(\Theta(\Xi))$ を計算する問題が, M, R のある種の図形の体積とその中の格子点の個数の比較に関する問題に帰着される.

● (2.2) の Ξ' に対してこの結果を適用し, 最終的に次の結果を得る.

命題 (2.6)

有限個の点以外で 0 となる任意の関数 $f: S \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ に対して次の不等式が成立すれば $\Theta(\Xi)$ は半安定:

$$\sum_{\substack{\xi \in \Xi \\ \dim \xi = \dim \Theta(\Xi)}} \text{vol}_{r+1}((\xi \times \mathbb{R}_{\geq 0}) \setminus \text{凸包}(\bigcup_{m \in M \cap \xi} ({}^m, f(m)) + (\xi \times \mathbb{R}_{\geq 0}))) \\ \leq \sum_{m \in S} f(m).$$

§ 3 計算例

§ 1 の例 3 と例 4 を証明する.

例 3

$M = \mathbb{Z}^n$ $\mathcal{C} = \mathbb{R}_{\geq 0}^n \subset \mathbb{R}^n$. e_1, \dots, e_n を \mathbb{R}^n の標準基底

$$\xi_{i, i+1} = \mathbb{R}_{\geq 0} e_i + \mathbb{R}_{\geq 0} e_{i+1} \quad (1 \leq i \leq n-1)$$

$$\xi_{n, n+1} = \mathbb{R}_{\geq 0} e_n + \mathbb{R}_{\geq 0} e_1$$

$$\eta_j = \mathbb{R}_{\geq 0} e_j \quad (1 \leq j \leq n) \quad \text{とし,}$$

$$\Xi_m = \{ \xi_{i, i+1} \mid 1 \leq i \leq n \} \cup \{ \eta_j \mid 1 \leq j \leq n \} \cup \{ \{0\} \}$$

とみると容易に $\Theta(\Xi_m) = \mathcal{C}_m$ (§ 1 例 3 の記号で)

• ここぞ次の Lemma を使う.

Lemma (3.1)

$M = \mathbb{Z}^2$, $\xi = \mathbb{R}_{\geq 0}^2$, η_1, η_2 を ξ の 1 次元の faces とする. $f: M \cap \xi \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ を有限個の点以外で 0 となる関数とすると,

$$\begin{aligned} & \text{vol}_3(\mathbb{R}_{\geq 0}^3 \setminus \text{凸包}(\bigcup_{m \in M \cap \xi} (m, f(m)) + \mathbb{R}_{\geq 0}^3)) \\ & \leq \sum_{m \in M \cap \text{相対内部}(\xi)} f(m) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{m \in M \cap \text{相対内部}(\eta_i)} f(m) + \frac{1}{6} f(0). \end{aligned}$$

証明は容易である.

• 例 3 の証明

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{\xi \in \mathcal{S} \\ \dim \xi = 2}} \text{vol}_3((\xi \times \mathbb{R}_{\geq 0}) \setminus \text{凸包}(\bigcup_{m \in M \cap \xi} (m, f(m)) + (\xi \times \mathbb{R}_{\geq 0}))) \\ & = \sum_{i=1}^n \text{vol}_3((\xi_{i, i+1} \times \mathbb{R}_{\geq 0}) \setminus \text{凸包}(\bigcup_{m \in M \cap \xi_{i, i+1}} (m, f(m)) + (\xi_{i, i+1} \times \mathbb{R}_{\geq 0}))) \\ & \leq \sum_{i=1}^n \sum_{m \in M \cap \text{相対内部}(\xi_{i, i+1})} f(m) + \sum_{j=1}^n \sum_{m \in M \cap \text{相対内部}(\eta_j)} f(m) + \frac{n}{6} f(0) \\ & \hspace{15em} (\text{Lemma 1 による}) \end{aligned}$$

一方

$$\sum_{m \in \mathcal{S}} f(m) = \sum_{i=1}^n \sum_{m \in M \cap \text{相対内部}(\xi_{i, i+1})} f(m) + \sum_{j=1}^n \sum_{m \in M \cap \text{相対内部}(\eta_j)} f(m) + f(0)$$

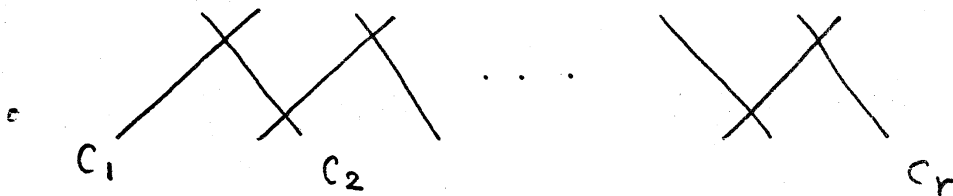
なので §2 の命題 (2.6) により, $n \leq 6$ のとき \mathcal{O}_n は半安定. $n \geq 7$ のときは $\mathcal{O}_n[[t]]$ の極大イデアルを \mathcal{R} とする

と $\text{col}(m_i) = 1$, $e(m_i) = n$ なので $e(m_i)/3! \text{col}(m_i) = \frac{n}{6} > 1$ となり, \mathcal{O}_n は半安定でない.

• 例5についてもほぼ同様にして部分的な結果が得られるがここでは省略する.

例4 (cyclic quotient singularity)

$n/p = b_1 - \frac{1}{b_2} - \dots - \frac{1}{b_r}$ ($b_i \geq 2$) を連分数展開とするとき, $\text{Spec } \mathbb{R}[[x, y]]^G$ の極小な特異点解消の例外曲線は,



の形で $C_i^2 = -b_i$, \dots , $C_r^2 = -b_r$ となる.

これは $N = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z})$ とし $N_{\mathbb{R}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ の2次元の cone $\pi = \mathbb{R}_{\geq 0}(1, 0) + \mathbb{R}_{\geq 0}(n-p, n)$ の中に次のような格子点の列 $(\alpha_i)_{0 \leq i \leq r}$ がとれることからわかる.

即ち

$$(1) \alpha_0 = (1, 0) \quad \alpha_r = (n-p, n)$$

$$(2) \det(\alpha_i, \alpha_{i+1}) = 1 \quad \text{即ち } \{\alpha_i, \alpha_{i+1}\} \text{ は } N \text{ の基底}$$

$$(3) \alpha_{i+1} + \alpha_{i+2} = b_{i+1} \alpha_{i+1} \quad (1 \leq i \leq r-1)$$

(Oda [7] Mumford et al. [8])

一方 $\pi^V = \mathbb{R}_{\geq 0}(0, 1) + \mathbb{R}_{\geq 0}(n, -(n-p)) \subset M$ となり

§2 の記号を使うと、 $\mathcal{O}(T(\pi^V)) = \mathbb{R}[[x, y]]^G$. また座標変換により、 $\omega = \mathbb{R}_{\geq 0}(1, 0) + \mathbb{R}_{\geq 0}(p, n)$ とおくと、

$$\mathcal{O}(T(\pi^V)) \cong \mathcal{O}(T(\omega)).$$

$n/n-p = c_1 - \frac{1}{c_2} - \dots - \frac{1}{c_\rho}$ とすると ω に対してもさきほどの π と同様に格子点の列 $(\beta_j)_{1 \leq j \leq \rho}$ がとれ

$$(1)' \quad \beta_0 = (1, 0), \quad \beta_\rho = (p, n)$$

$$(2)' \quad \det(\beta_j, \beta_{j+1}) = 1 \quad (1 \leq j \leq \rho-1)$$

$$(3)' \quad \beta_{j-1} + \beta_{j+1} = c_j \beta_j$$

が成り立つ。

これに (3.1) を適用すると例3の証明と同様にして次を得る。

Lemma (3.2)

$\mathbb{R}[[x, y]]^G$ が半安定 $\Leftrightarrow \rho \leq 5$.

• この結果を例4で述べた n/p の連分数展開に現れる b_1, \dots, b_r で表現するためには次のことをのべれば十分である。

Lemma (3.3)

$n, p, (b_i), (c_j)$ を上と同様とするとき、

$$\sum_{i=1}^r b_i - r = \sum_{j=1}^{\rho} c_j - \rho = r + \rho - 1$$

参考文献

- [1] D. Mumford, Stability of projective varieties, L'Enseignement Math. 23 (1977), 39-110.
- [2] J. Shah, Stability of local rings of dimension 2, Proc. NAS, USA. 75 (1978), 4085-4086, No 9.
- [3] G. Tyurina, Func. Anal. Appl. 2 (1968), 324-332.
- [4] M. Hochster, Cohen-Macaulay rings, Combinatorics, and simplicial complexes, Ring theory II, Lecture Notes in Pure and App. Math. 26 (1977), Dekker, 171-223.
- [5] M.-N. Ishida, Torus embeddings and dualizing complexes, to appear in Tohoku Math. J. 32 (1980).
- [6] B. Teissier and M. Lejeune, Normal cones and sheaves of relative jets. Comp. Math. 28 (1974), 305.
- [7] T. Oda, Lectures on Torus embeddings and applications. (Based on joint work

with K. Miyake), Tata Inst. Fund. Research, Bombay, 1978, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg - New York.

- [8] G. Kempf, F. Knudsen, D. Mumford and B. Saint-Donat, Toroidal Embeddings I, Lecture Notes in Math. 339, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg - New York, 1973.
- [9] M.-N. Ishida and T. Oda, Torus embeddings and tangent complexes. to appear.