数理解析研究所講究録
第 374 巻 1980 年 131-144

Equations defining a curve of genus three

筑波大数学系　本間正明

0.　kを代数閉体，$\mathbb{P}^N$をk上のN次元射影空間とする．$X\subset\mathbb{P}^N$を閉部分多様体として，その$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}$イデアル層を$\mathcal{I}_X$であらわす．このとき次の2つの問題は基本的である．

問題A．　Xの斉次座標環$\bigoplus_{m=0}^{\infty}\Gamma(\mathbb{P}^N,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(m))/\Gamma(\mathbb{P}^N,\mathcal{I}_X(m))$は整閉整域か？（注1）

問題B．　Xの定義イデアル$\bigoplus_{m=0}^{\infty}\Gamma(\mathbb{P}^N,\mathcal{I}_X(m))$は$\bigoplus_{m=0}^{\infty}\Gamma(\mathbb{P}^N,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(m))$加群として何次の部分で‘厳密に’生成されるか？（注2）

われわれは，上の問題を以下の設定（イ）～（ハ）の下で考える．

（イ）　Lを完備で正規な代数多様体X上の非常に豊富な可逆層とし，$\varphi_L : X\hookrightarrow\mathbb{P}^N$（$N=h^0(L)-1$）を$\Gamma(X,L)$による埋め込みとする．さらに，

（ロ）　$X=C$を種数gの完備非特異代数曲線として，

（ハ）　$g=3$とする．

（イ）～（ハ）の下では，問題A，Bに対する解答は次ページの表のとおりである．（注3，4）

但し，表の中で$\mathrm{Pic}^d(C)$はC上の次数dの可逆層全体を，P. N.は射影的正規を意味する．

d	次数dの非常に豊富な可逆層	問題Aに対する解答	問題Bに対する解答
$d \leqq 3$	存在せず	——	——
$d=4$	（Cがhyperellipticの場合） 存在せず	——	——
	（Cがnon-hyperellipticの場合） ω_C	P.N.	4次
$d=5$	存在せず	——	——
$d=6$	$\mathrm{Pic}^6(C)$ $-\{\omega_C(P+Q) \mid P,Q\in C\}$	（Cがhyperellipticの場合） P.N.ではない	2次と4次
		（Cがnon-hyperellipticの場合） P.N.	3次
$d=7$	$\mathrm{Pic}^7(C)$	P.N.	2次と3次
$d \geqq 8$	$\mathrm{Pic}^d(C)$	P.N.	2次

（注1）Xの斉次座標環が整閉整域であるとき，Xは$\mathbb{P}^r$内で射影的正規であると言う．

（注2）$A=\bigoplus_{m=0}^{\infty} A_m$が（自然数による）次数つき環で$M=\bigoplus_{m=0}^{\infty} M_m$がA－次数つき加群であるとき，Mが$M_{\nu_1},\dots,M_{\nu_r}$（$\nu_1<\cdots<\nu_r$）で‘厳密に’生成されるとは，(i) MはA-加群として$M_{\nu_1},\dots,M_{\nu_r}$で生成され，(ii) $M_{\nu_1},\dots,\widehat{M_{\nu_j}},\dots,M_{\nu_r}$（$j=1,\dots,r$）はMを生成しないときに言う。但し，$\widehat{M_{\nu_j}}$は$M_{\nu_j}$を

除外することを意味する。

定義から，上の様な $M_{\nu_1}, \cdots, M_{\nu_r}$ は（存在すれば，）Mにより一意的に定まる．

（注3）$g=3$ の場合に非常に豊富な可逆層全体を決定することは，この小論に於いては省略する．

（注4）（イ），（ロ）の仮定の下で $g \leqq 2$ のとき，問題A，Bに対する解答は，次のとおりである．

LをC上の次数 d の可逆層とするとき，

$d \geqq 2g+1 \iff$ Lは非常に豊富 $\iff \Phi_L(C)$ は射影的正規，

さらに，$d \geqq 2g+2$ ならば $\Phi_L(C)$ の定義イデアルは2次で生成され，$d=2g+1$ ならば $g=0$ のとき0次，$g=1$ のとき3次，$g=2$ のとき2次と3次でそれぞれ'厳密に'生成される．

1．（イ）の仮定の下で，次の記法を用いる．$\Gamma(L)$ を $\Gamma(X, L)$ の略記として，$S\Gamma(L) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} S^m\Gamma(L)$ を k-ベクトル空間 $\Gamma(L)$ の symmetric algebra，$S\Gamma(L)$ のイデアル $I(L)$ を

$$I(L) = \mathrm{Ker}\left[S\Gamma(L) \longrightarrow \bigoplus_{m=0}^{\infty} \Gamma(L^m) \right]$$

と定める．さらに，$I_m = I_m(L)$ を $I(L)$ の m 次同次部分，すなわち $I_m(L) = \mathrm{Ker}\left[S^m\Gamma(L) \to \Gamma(L^m) \right]$ とする．容易にわかる様に，次の図式は可換である．

$$
\begin{array}{ccccccc}
0 \to \bigoplus_{m=0}^{\infty} \Gamma(\mathbb{P}^N, \mathcal{I}_X(m)) & \to & \bigoplus_{m=0}^{\infty} \Gamma(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(m)) & \to & \bigoplus_{m=0}^{\infty} \Gamma(X, \mathcal{O}_X(m)) \\
\downarrow\wr & & \downarrow\wr & & \| \\
0 \longrightarrow \mathrm{I}(\mathrm{L}) & \longrightarrow & S\Gamma(\mathrm{L}) & \longrightarrow & \bigoplus_{m=0}^{\infty} \Gamma(\mathrm{L}^m)
\end{array}
$$

よって，問題A，Bは（イ）の仮定の下で，$\Gamma(\mathrm{L})$，$\mathrm{I}(\mathrm{L})$ 等の言葉で言い換えられる．

以下，われわれは（イ）の下で議論する． Xが正規であるから，$\bigoplus_{m=0}^{\infty}\Gamma(\mathrm{L}^m)$ は整閉整域，しかもそれは $S\Gamma(\mathrm{L})$ 上有限加群であるから，$S\Gamma(\mathrm{L})$ が整閉整域であることは $\Gamma(\mathrm{L})^{\otimes m} \to \Gamma(\mathrm{L}^m)$ が全ての $m>0$ について全射であることに同値，さらに，このことは $\Gamma(\mathrm{L}^m)\otimes\Gamma(\mathrm{L}) \to \Gamma(\mathrm{L}^{m+1})$ が全ての $m>0$ について全射であることと同値である．

さらに（ロ）を仮定すれば，Lの次数が $2g+1$ 以上であれば $\Phi_{\mathrm{L}}(C)$ は射影的正規であることが知られている［3］． また，有名なM.Noetherの定理は，標準層 ω_C について，$\Phi_{\omega_C}(C)$ が射影的正規であるための必要十分条件はCが *non-hyperelliptic* であることを主張する． 以上の一般論により，われわれの表の問題Aの解答の欄を埋めるためには，次の定理を示せばよい．

定理1． （イ），（ロ），（ハ）の仮定の下で，さらにLの次数を 6 とする． このとき，

$\varphi_L(C)$ が射影的正規 $\Longleftrightarrow$ C が non-hyperelliptic.

証明. Castelnuovo の補題 [3] により $\Gamma(L^m)\otimes\Gamma(L)\to\Gamma(L^{m+1})$ は $m\geqq 2$ のとき全射. よって,

$\varphi_L(C)$ が射影的正規,

$\Longleftrightarrow$ $\Gamma(L)\otimes\Gamma(L)\longrightarrow\Gamma(L^2)$ が全射,

$\Longleftrightarrow$ $S^2\Gamma(L)\to\Gamma(L^2)$ が全射,

ところが $\dim S^2\Gamma(L)=\dim\Gamma(L^2)$ であるから, それらは $S^2\Gamma(L)\to\Gamma(L^2)$ が単射であること, すなわち, $\varphi_L(C)$ が $\mathbb{P}^3$ 内の2次の曲面に含まれないことと同値である. $\mathbb{P}^3$ 内の2次曲面は次の3つの type に分類できる.

(i) 超平面の和,

(ii) 既約な cone, これは Veronese 埋入 $\mathbb{P}^1\hookrightarrow\mathbb{P}^2$ の像の projective cone,

(iii) 非特異2次曲面, これは Segre 埋入 $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1\hookrightarrow\mathbb{P}^3$ で得られる.

(i) の type に $\varphi_L(C)$ が含まれないことは明らかであり, (ii) の type に $\varphi_L(C)$ が含まれないことは, 次の様にしてわかる. F を (ii) の曲面として, $\mathbb{P}^3\times\mathbb{P}^2\supset\tilde{F}\xrightarrow{\pi}F\subset\mathbb{P}^3$ を cone F の vertex O を中心とする monoidal 変換とすると, $p_2|\tilde{F}$ は Veronese 埋入 $\mathbb{P}^1\hookrightarrow\mathbb{P}^2$ を経由して分解する. すなわち,

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{F} \arrow[rr, "p_2|\widetilde{F}"] \arrow[dr, "\exists g"'] & & \mathbb{P}^2 \\
& \mathbb{P}^1 \arrow[ur, hook, "\text{Veronese 埋入}"'] &
\end{tikzcd}$$

$\mathbb{P}^1$の各点のgによる fibre は$\widetilde{F}$上の因子として線型同値であり，この因子類をfとする．　さらに$\pi^{-1}(0)$をC_0とするとき，$\mathrm{Pic}(\widetilde{F})=\mathbb{Z}C_0\oplus\mathbb{Z}f$であり，$\widetilde{F}$上の標準因子は，$-2C_0-4f$と線型同値，交点数は$C_0^2=-2$，$C_0.f=1$，$f^2=0$となる．　CをF上の種数gの非特異代数曲線として，（これを$\widetilde{F}$上の因子とみて，$\widetilde{C}$とかいて）$\widetilde{C}\sim aC_0+bf$とする．$C\ni 0$のときは，$\widetilde{C}.C_0=1$，$C\not\ni 0$のときは，$\widetilde{C}.C_0=0$であるから，それぞれの場合に$-2a+b=1$又は，$-2a+b=0$となる．　一方，同伴公式から$2g-2=-2(a^2-ab+b)$，よって，$g=a(a-1)$又は，$g=(a-1)^2$となる．　すなわち，$g$は偶数あるいは平方数でなければならないから，種数3の非特異代数曲線は（ii）の type の曲面には含まれない．

（iii）の type の曲面Fに$\varphi_L(C)$が含まれれば，

$$\varphi_L(C)\subset F\cong\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1\xrightarrow{p_i}\mathbb{P}^1\qquad(i=1,2)$$

として，$\deg(p_1|\varphi_L(C))$又は$\deg(p_2|\varphi_L(C))$が2となることが証明できる，すなわちCは hyperelliptic でなければならない．

逆にCを hyperelliptic とすれば，$f:C\to\mathbb{P}^1$，$\deg f=2$なる射が存在するが$f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)=M_0$とすると，

$$\Gamma(L\otimes M_0^{-1})\otimes\Gamma(M_0)\longrightarrow\Gamma(L)$$

が同型であることがわかる．よって，可換図式

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, hook, "\phi_L"] \arrow[dr, hook, "\phi_{L\otimes M_0^{-1}}\times\phi_{M_0}"'] & \mathbb{P}^3 \\
 & \mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1 \arrow[u, hook, "\text{Segre埋入}"']
\end{tikzcd}$$

を得る．　証明終．

2．　問題Bに関して，（イ）の仮定の下では，次の補題は有効である．　まず記号を用意する．　$L_1,\dots,L_m$ を X 上の可逆層とするとき，

$$\mathcal{R}(L_1,\dots,L_m)=\mathrm{Ker}\left[\Gamma(L_1)\otimes\cdots\otimes\Gamma(L_m)\to\Gamma(L_1\otimes\cdots\otimes L_m)\right]$$

と定める．

補題2．［2］　（イ）の仮定の下で，m を正整数とする．さらに，$\Gamma(L)^{\otimes i}\to\Gamma(L^i)$ が $i=m-1,\ m$ のとき全射とすれば次は同値である．

（a）　$\Gamma(L)\otimes\mathcal{R}(L^{m-1},L)\longrightarrow\mathcal{R}(L^m,L)$ は全射，

（b）　$\mathcal{R}(\overbrace{L,\dots,L}^{m+1})=\mathcal{R}(\overbrace{L,\dots,L}^{m})\otimes\Gamma(L)+\Gamma(L)\otimes\mathcal{R}(\overbrace{L,\dots,L}^{m})$，

（c）　$I_m(L)\otimes\Gamma(L)\to I_{m+1}(L)$ は全射．

証明.　$i=m-1,\ m$ に対して，次の可換な完全図式がある.

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r, dashed] & \mathcal{R}(\overbrace{L,\cdots,L}^{i})\otimes\Gamma(L) \arrow[r, dashed] \arrow[d, equal] & \mathcal{R}(\overbrace{L,\cdots,L}^{i+1}) \arrow[r, dashed] \arrow[d] & \mathcal{R}(L^{i},L) \arrow[d] \arrow[dddll, dashed, bend left] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{R}(L,\cdots,L)\otimes\Gamma(L) \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma(L)^{\otimes(i+1)} \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma(L^{i})\otimes\Gamma(L) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma(L^{i+1}) \arrow[r, equal] & \Gamma(L^{i+1}) & \\
 & 0 & & &
\end{tikzcd}
$$

故，完全系列

$$0\to\mathcal{R}(\overbrace{L,\cdots,L}^{i})\otimes\Gamma(L)\to\mathcal{R}(\overbrace{L,\cdots,L}^{i+1})\to\mathcal{R}(L^{i},L)\to 0$$

$$(i=m-1,\ m)$$

を得る.　よって次の可換図式の縦系列，横系列は完全である.

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{R}(\overbrace{L,\cdots,L}^{m})\otimes\Gamma(L) \arrow[r, "\alpha"] & \mathcal{R}(\overbrace{L,\cdots,L}^{m+1}) \arrow[r] & \mathcal{R}(L^{m},L) \arrow[r] & 0 \\
 & & \Gamma(L)\otimes\mathcal{R}(\overbrace{L,\cdots,L}^{m}) \arrow[r] \arrow[u, "\xi'"] & \Gamma(L)\otimes\mathcal{R}(L^{m-1},L) \arrow[r] \arrow[u, "\xi"] & 0 \\
 & & 0 \arrow[u] & &
\end{tikzcd}
$$

この図式から，明らかに $\mathcal{R}(\overbrace{L,\cdots,L}^{m+1})=\mathrm{Im}(\alpha)+\mathrm{Im}(\xi')$ となるための必要十分条件は，ξ が全射となることである，すなわち（a）$\Longleftrightarrow$（b）が示せた.　（b）$\Longleftrightarrow$（c）は容易

であるので省略する．　証明終．

この補題と Mumford［３］の定理を合わせれば，次の系を得る．

系２．１．　（イ）の仮定の下で，X の次元を n とする．さらに，すべての $i, j > 0$ に対し $H^i(X, L^j) = (0)$ とする．このとき，$\alpha = \mathrm{Max}(n+3, n(L)+1)$ とすれば，$I(L)$ は $I_2, \ldots, I_\alpha$ で生成される．　ここで，

$$n(L) = \mathrm{Max}\{m \in \mathbb{Z}_+ \mid \forall i \geqq m \text{ に対し } \Gamma(L)^{\otimes i} \to \Gamma(L^i) \text{ が全射}\}.$$

また，上の補題と Fujita［１］の補題を合わせれば，次の系を得る．

系２．２．　（イ），（ロ）の仮定の下で，さらに $\mathfrak{X}(C)$ は射影的正規かつ $H^1(C, L) = (0)$ とする．　このとき $I(L)$ は２次と３次の部分で生成される．

この系２．２は次の定理の（a）の部分の拡張となっている．

定理3．（Saint-Donat［4］）（イ），（ロ）の仮定の下で，

（a）$\deg L \geqq 2g+1$ ならば $I(L)$ は2次及び3次の部分で生成される，さらに，

（b）$\deg L \geqq 2g+2$ ならば $I(L)$ は2次の部分で生成される．

さて，（イ），（ロ），（ハ）の仮定の下で問題Bを考えると，Cが non-hyperelliptic，$L=\omega_C$ のときは，良く知られている様に，$\phi_{\omega_C}(C)$ は平面4次曲線である．また，表の $d \geqq 8$ のところは，上の定理3（b）から明らか．よってわれわれの表の中で示さなければならないのは，$d=6$，7のところだけである．

定理4．（イ），（ロ），（ハ）の仮定の下で，さらにLの次数を d とする．

（a）$d=7$ ならば $I(L)$ は I_2 と I_3 で‘厳密に’生成される．

（b）Cが non-hyperelliptic で $d=6$ ならば $I(L)$ は I_3 で‘厳密に’生成される．

証明．（a）定理3（a）により，$I(L)$ は I_2 と I_3 で生

成されている．　もしI_2だけで生成されているとすれば，$\dim I_2(L)=3$，$N(=h^0(L)-1)=4$であるから，$\Phi_L(C)$は3つの2次超曲面の完全交叉．　よって$\deg_{\mathbb{P}^4}\Phi_L(C)=8$．
一方$\deg_{\mathbb{P}^4}\Phi_L(C)=\deg L=7$．　これは矛盾である．

（b）　定理1から，この場合$\Phi_L(C)$は射影的正規であるから系2．2が適用できて$I(L)$はI_2とI_3で生成される．　一方，定理1の証明から$I_2=0$であるから，$I(L)$はI_3で（厳密に）生成される．　証明終．

定理4により，われわれに残されたことは，次の定理の証明だけである．

定理5．　（イ），（ロ），（ハ）の仮定の下で，さらにCを hyperelliptic，Lの次数を6とする．　このとき$I(L)$は，‘厳密に’I_2とI_4で生成される．

証明．　まず，$\Gamma(L)^{\otimes m}\longrightarrow\Gamma(L^m)$が$m\geq 3$について全射であることを$m$についての帰納法で示す．　次の可換図式を考える．

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(L)^{\otimes(m+1)}=\Gamma(L)^{\otimes m}\otimes\Gamma(L) \arrow[r, "\beta_m\otimes 1"] \arrow[d, "\beta_{m+1}"] & \Gamma(L^m)\otimes\Gamma(L) \arrow[dl, "\gamma_m"] \\
\Gamma(L^{m+1}) &
\end{tikzcd}$$

帰納法の仮定により $\beta_m\otimes 1$ は全射，Castelnuovo の補題より，γ_m ($m\geqq 2$) も全射，故に β_{m+1} も全射となる．よって，$\Gamma(L)^{\otimes 3}\xrightarrow{\beta_3}\Gamma(L^3)$ が全射であることを示せば良い．$f:C\to\mathbb{P}^1$ を2重被覆として，$M_0=f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ とする．このとき，定理1の証明から，$\Gamma(L)\cong\Gamma(L\otimes M_0^{-1})\otimes\Gamma(M_0)$ であったから β_3 は次の様に分解される．

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(L)^{\otimes 3} \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[dddddr, bend right, "\beta_3"'] & \Gamma(L\otimes M_0^{-1})^{\otimes 3}\otimes\Gamma(M_0)^{\otimes 3} \arrow[d, "1\otimes u_1"] \\
& \Gamma(L\otimes M_0^{-1})^{\otimes 3}\otimes\Gamma(M_0)\otimes\Gamma(M_0^2) \arrow[d, "1\otimes u_2"] \\
& \Gamma(L\otimes M_0^{-1})^{\otimes 3}\otimes\Gamma(M_0^3) \arrow[d, "1\otimes v_0"] \\
& \Gamma(L\otimes M_0^{-1})^{\otimes 2}\otimes\Gamma(L\otimes M_0^2) \arrow[d, "1\otimes v_1"] \\
& \Gamma(L\otimes M_0^{-1})\otimes\Gamma(L^2\otimes M_0) \arrow[d, "v_2"] \\
& \Gamma(L^3)
\end{tikzcd}$$

ここで $u_i:\Gamma(M_0)\otimes\Gamma(M_0^i)\longrightarrow\Gamma(M_0^{i+1})$，$v_i:\Gamma(L\otimes M_0^{-1})\otimes\Gamma(L^i\otimes M_0^{3-i})\longrightarrow\Gamma(L^{i+1}\otimes M_0^{2-i})$ である．この分解で，u_1，u_2 v_0，v_1，v_2 が全射であることが示せれば良い．u_1，u_2 が全射であることは，次の一般的事実で片付く．

補題6. Cを種数gのhyperelliptic曲線として，$f: C \to \mathbb{P}^1$を2重被覆とする． $M_0 = f^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$とすれば，

$$u_m : \Gamma(M_0) \otimes \Gamma(M_0^m) \longrightarrow \Gamma(M_0^{m+1}) \qquad (m > 0)$$

は$m = g$を除いて全射となる．

定理5の証明のつづき． ν_0, ν_1, ν_2が全射であることは，$\Gamma(L \otimes M_0^{-1})$がbase point free pencilであることから，［3］又は，［5］の方法（［5］では'base point free pencil trick'と呼んでいる．）を用いて簡単な次元の計算で示せる．

以上の議論で，われわれのLについては，（$\mathcal{R}(C)$が射影的正規でないことを考え合わせれば，）$n(L) = 3$であることがわかった． それ故，系2．1を適用すれば，$I(L)$は，I_2, I_3, I_4で生成されることになる． さらに，$\dim I_2 = 1$，$I_2 \otimes \Gamma(L) \xrightarrow{\sim} I_3$が容易に示せる． この後の事実により，$I(L)$は$I_2$と$I_4$で生成され，先の事実より$I(L)$は$I_2$だけでは生成されない． よって，$I(L)$は$I_2$及び$I_4$で'厳密に'生成される． 証明終．

参考文献

[1] Fujita, T., Defining equations for certain types of polarized varieties, Complex analysis and algebraic geometry, Iwanami-Shoten and Cambridge univ. press (1977), 165-173.

[2] Homma, M., On the equations defining a projective curve embedded by a non-special divisor, to apper in Tsukuba J. Math. 3 (2).

[3] Mumford, D., Varieties defined by quadratic equations, C.I.M.E. (1970), 29-100.

[4] Saint-Donat, B., Sur les équations definissant une courbe algébrique, C.R. Acad. Sc. Paris 274 (1972), 324-327 and 487-489.

[5] ________, On Petri's analysis of the linear system of quadrics through a canonical curve, Math. Ann. 206 (1973), 157-175.