

Rank 1 の invertible algebra について

富山大 教育 浅沼照雄

1. ここでは ring は commutative で 1 をもちと仮定する。
 R -algebra A が invertible であるとは R -algebra B が存在して
 $A \otimes_R B \cong_R R^{[n]}$ ($= R[x_1, \dots, x_n]$: n 変数の polynomial ring) なることである。さて $\Omega_R(A)$ を differential A -module を、 $R^{(n)}$ を rank n の free R -module を表わすことにする。上の定義より $\Omega_R(A \otimes_R B) \cong \Omega_R(A) \otimes B \oplus A \otimes_R \Omega_R(B) \cong \Omega_R(R^{[n]}) \cong R^{[n]} \otimes R \cong (A \otimes B)^{(n)}$ であるから $\Omega_R(A) \otimes B$ は projective $A \otimes B$ -module である。そこで $f: R^{[n]} \rightarrow R$ なる natural mapping により $B \xrightarrow{1_A \otimes} A \otimes_R B \xrightarrow{\cong} R^{[n]} \xrightarrow{f} R$ を得るから $g: B \rightarrow R$ なる R -algebra homomorphism が存在する。ゆえに A の identity mapping を id とすれば $id \otimes g: A \otimes_R B \rightarrow A$ であるから $\Omega_R(A) \otimes_R B$ から projective A -module $\Omega_R(A)$ が induce される。ゆえに $\forall \mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ に対して $\Omega_R(A)_{\mathfrak{p}} \stackrel{\text{act}}{=} \Omega_R(A) \otimes_A A_{\mathfrak{p}}$ は free $A_{\mathfrak{p}}$ -module であ

る。このrankが r によらず一定 r であるとき r を A の rank といひ $\text{rank } A = r$ とかく。明らかに $0 \leq r \leq n$ 。また $\text{rank } A = 0$ ならば $A = R$ となる。任意の invertible algebra A について rank が存在するかどうかわからないがとくに R が integral domain であるときは存在する。この小論では integral domain R 上の rank 1 なる invertible algebra について考える。とくに R が noetherian なるときが本質的である。以下 R を noetherian domain, A を rank 1 の invertible R -algebra と仮定する。さて $R[X] = R^{[1]}$ は明らかに invertible R -algebra with rank 1 であるがこれを trivial な例ということにする。まず考えられる問題は non-trivial な A の例が存在するかどうかということである。これについてたとえば R を Dedekind domain で $\text{Pic}(R) \neq \{0\}$ なるものとするれば $\text{Pic}(R) \ni M$ が存在して $M \neq R^{(1)}$ となる。さて N を $M \oplus N \cong R^{(n)}$ なる R -projective module とすれば $\text{Sym}_R(M \oplus N) \cong \text{Sym}_R(M) \otimes \text{Sym}_R(N) \cong \text{Sym}_R(R^{(n)}) \cong R^{[n]}$ かなりたつ。ここで Sym_R は R 上の symmetric algebra を表わす。定義より $\text{Sym}_R(M)$ は invertible また $R_{\mathfrak{p}} \otimes_R \Omega_R(\text{Sym}_R(M)) \cong \Omega_{R_{\mathfrak{p}}}(R_{\mathfrak{p}} \otimes \text{Sym}_R(M)) \cong \Omega_{R_{\mathfrak{p}}}(\text{Sym}_{R_{\mathfrak{p}}}(R_{\mathfrak{p}} \otimes M)) \cong \Omega_{R_{\mathfrak{p}}}(\text{Sym}_{R_{\mathfrak{p}}}(R_{\mathfrak{p}}^{(1)})) \cong \Omega_{R_{\mathfrak{p}}}(R_{\mathfrak{p}}^{[1]}) \cong R_{\mathfrak{p}}^{1}$ 。このことから $\text{Sym}_R(M)$ の rank が 1 であることがわかる。また $M \neq R^{(1)}$ より $\text{Sym}_R(M) \neq R^{[1]}$ ゆへこれは A の non-trivial な例になつ

ている。この例においては $\text{Pic}(R) \neq \{0\}$ が本質的であるから R が local ならばこの方法では non-trivial な例を作ることはいできない。そこで次に R が local であるとき non-trivial な例が存在するかどうか問題となるがこのときもそのような例は以下に示すように存在する。

例(1). $R = \mathbb{Z}[2\sqrt{2}]_{\mathfrak{p}}$ ここで $\mathfrak{p} = (2, 2\sqrt{2}) \in \text{Spec } \mathbb{Z}[2\sqrt{2}]$,
 $A = R[X + \sqrt{2}X^2, X^2]$ とおくと A は non-trivial な例である。

例(2) k を field of characteristic $p > 0$, $k[[t]]$ を 1 変数の formal power series ring とする。このとき $R = k[[t^2, t^3]]$,
 $A = R[X + tX^p, X^p]$ とおくと A は non-trivial な例である。

この例が示すように R が local であっても A がつねに $R[X]$ になることは望みえない。そこで次の問題を考える。

問題 I. R を noetherian local domain, A 及び B を rank 1 なる任意の invertible R -algebra とする。このとき $A \otimes_R B \cong_R R^{(2)}$ が成り立つか?

この問題について R が local という条件をとれば反例が存在することは前にのべたように $\text{Pic}(R) \ni M \neq R^{(1)}$ をとって $M \otimes R^{(1)} \neq R^{(2)}$ になるから $\text{Sym}_R(M) \otimes_R R[X] \neq R^{(2)}$ より示される。しかし R が local という条件をはずしても問題 I

が成立すれば $R_F \otimes_R A \otimes_R B \cong R_F \otimes_R A \otimes_{R_F} R_F \otimes B \cong R_F^{[2]}$ となりた。から $A \otimes_R B$ は *locally polynomial algebra* 中 $A \otimes B$ は Bass, Connell, Wright 及び Suslin により Symmetric algebra に同型すなわちある projective R -module P が存在して $A \otimes_R B \cong_R \text{Sym}_R(P)$ となりた。すなわち問題 I は次の問題 II と同値である。なお *locally polynomial algebra* については [4] を参照してくだされ。

問題 II. A 及び B を rank 1 なる任意の invertible R -algebra とする。 R は noetherian domain を仮定する。すると $A \otimes_R B \cong_R \text{Sym}_R(P)$ なる projective R -module P が存在するか？

問題 I についての反例は知られていません。次の定理がなりたつ。

定理. 次の場合については問題 I が成り立つ。

- (1) R が field を含むとき。
- (2) $(\text{Kull}) \dim R = 1$ のとき。

2. さて上の定理についてこれから考えてみよう。まず rank 1 の invertible R -algebra A の条件を調べるのが先決である。

定義 1. R が F -closed であるとは $t \in \mathcal{Q}(R)$ ($=$ quotient field) なる t が $t^2, t^3, nt \in R$ (n はある positive integer) をみたせ

はつねに $t \in R$ なることである。また R を含み $Q(R)$ に含まれる最小の F -closed domain が存在するかそれを $F(R)$ とかいて R の F -closure という。([1], [3])

R の characteristic が $p > 0$ なるときは R が *semi-normal* なることと R が F -closed なることは同値である。([5], [6])

定義 2. $\mathfrak{p} \in \text{Spec } R$ について R/\mathfrak{p} の $Q(R/\mathfrak{p})$ における integral closure を考えそれを $R(\mathfrak{p})$ で表わすことにする。さて $C \in R$ -algebra とすると $f: R \rightarrow R/\mathfrak{p} \subset R(\mathfrak{p})$ なる mapping によつて $R(\mathfrak{p}) \otimes_R C$ が定義される。これを便宜的に C の \mathfrak{p} における normality ということにする。よつて C が *normally polynomial algebra in n variables* であるとは任意の $\mathfrak{p} \in \text{Spec } R$ についてその normality $R(\mathfrak{p}) \otimes_R C$ が $R(\mathfrak{p})$ 上の *polynomial ring in n variables* になつていふときをいう。

たとえば R が $\dim = 1$ なる local domain とすれば $\text{Spec } R = \{R, 0\}$ だけであるから C が *normally polynomial algebra* であるための必要十分条件は R の integral closure in $Q(R)$ を \tilde{R} で表わせば $\tilde{R} \otimes_R C \cong \tilde{R}^{[n]}$ か、 $R/\mathfrak{p} \otimes_R C \cong R/\mathfrak{p}^{[n]}$ なることである。(c.f. [2])

次の補題は A を特徴づけるものである。

補題 1. R が local domain で $\dim R < \infty$ とする。このとき次の (1) - (3) は同値である。

- (1) A は invertible R -algebra with rank 1.
 (2) ある positive integer n について $A^{[n]} \cong_R R^{[n+1]}$
 (3) A は finitely generated, flat, normally R -algebra $\tau^{-1}\Omega_R(A) \cong A^{(1)}$

さらに R が characteristic $p (\geq 0)$ なる field を含めば上の3つの条件と次の条件(4)は同値である。

- (4) (i) $p=0$ のとき $A \cong R[X]$
 (ii) $p>0$ のとき $A \cong R[X + a_1 X^{p^1} + a_2 X^{p^2}, X^{p^e}]$ ここで $a_i \in \overline{F}(R)$ で $a_i^{p^e} \in R$ をみたす。

この補題から次の系がなりたつ。

系. R を $\dim 1$ なる local domain, A 及び B を invertible R -algebra with rank 1 とする。すると $A \cong_R A_1$ か $B \cong_R A_2$ なる R -algebra A_1 及び A_2 が存在して次の条件をみたす。

- (1) $R \subset R^* \subset Q(R)$ が存在して
 (i) R^*/R は finite type の extension かつ R^* は f.g. R -module
 (ii) $R \subset A_i \subset R^*[X_i] \quad (i=1, 2)$
 (iii) $R^*[A_i] = R^*[X_i] \quad (i=1, 2)$

(2) まず $L(R^*/R)$ で $R \perp R^*$ の conductor を表わすと R^*/R が finite type 中 $\exists L(R^*/R) \ni t$ が存在して $t \neq 0$ か、 t は non-unit in R^* とできる。この t について ideal $tR^* = \mathcal{O}$ を考えれば \mathcal{O} は R の ideal でもある。さてこの ideal \mathcal{O} につ

いて $R/\mathfrak{a} \otimes_R A_i \cong (R/\mathfrak{a})[X]$ かなりたつ。 ($i=1, 2$)

(3) $\Omega_R(A_i) \cong A_i^{(1)}$ ($i=1, 2$)

(4) $A \otimes_R B \cong A_1 \otimes_R A_2$ かつ $A_1[A_2] \subset R^*[X_1, X_2] = R^*[X_1^2]$

への R -algebra homomorphism $\varphi: A_1 \otimes_R A_2 \rightarrow A_1[A_2]$ を

$\varphi(a_1 \otimes a_2) = a_1 a_2$ で定めると R -algebra isomorphism になる。

すなわち $A_1 \otimes_R A_2 \cong A_1[A_2]$ かなりたつ。

3. 定理の証明について簡単にのべる。まず(1)を証明するために次の補題2が必要である。

補題2. R を noetherian domain で characteristic が $p > 0$ と仮定する。任意に $a_i, b_i \in F(R)$ ($i=1, \dots, n$) をとり $R^* = R[a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n]$ とおく。すると F -closure の性質から十分大なる positive integer e をとると $(R^*)^{pe} \subset R$ とできる。さてこの e と R^* について 2変数の polynomial ring の automorphism $\Phi \in \text{Aut}_{R^*} R^*[X, Y]$ が存在して

$$\Phi(X) = X + a_1 X^p + \dots + a_n X^{np} + G(X^{pe}, Y^{pe})$$

$$\Phi(Y) = Y + b_1 Y^p + \dots + b_n Y^{np} + H(X^{pe}, Y^{pe})$$

かなりたつ。ここで $G(X, Y), H(X, Y) \in R[X, Y]$ である。

さて定理の(1)の条件の field の characteristic が 0 ならば補題の(4)より rank 1 の invariant algebra A は $R[X]$ に同型であるから明らかになりたつ。characteristic が $p > 0$ なるときはやはり補題1の(4)および補題2から同型を示すわけである。

補題 1 の (4) および 補題 2 の (1) を R が field を含むというこ
 とが本質的に (証明) の中にかかわってくる。それが field を
 含まぬとき 同題 1 の解答がきわめて困難になった理由である。
 そこで定理の (2) の証明であるがこれには系および integral
 extension の pull-back diagram を用いて証明される。(integral
 extension の pull-back diagram については [2] を参照してください)
 このときには R が field を含むことは証明には無関係
 であるがどういふわけか $\dim R = 1$ が本質的にかか
 わってくる。

4. 定理の (2) について 1 つの例を与えてみる。まず $R =$
 $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, $A = R[X + \sqrt{2}X^2, X^2]$ を例 (1) の A のとする。さて
 もう 1 つ $B = R[Y + \sqrt{2}Y^4, Y^2]$ とおくとこれも non-trivial
 な ^例 になっている。 $A \not\cong R[X]$ なることは次のようにして示
 される。まず $R^* = R[\sqrt{2}]$ とおく。明らかに $R^*[A] = R^*[X]$
 とおくと $A \cong R[X]$ と仮定すると $F(x) \in R^*[X]$ が存在して $A =$
 $R[F(x)]$ と表わせる。さて $R^*[A] = R^*[F(x)] = R^*[X]$ である
 から $F(x) = ax + b$ ($a, b \in R^*$) となりここで $A \ni X + \sqrt{2}X^2$
 なることより a は R の unit でなければならぬ。さらに
 A の任意の元 $G(x)$ の constant は R の元であるゆえ $A = R[X]$
 $\cong R[F(x)]$ となる。ゆえ $\sqrt{2} \in R$ でこれは矛盾である。 B も
 同様にして $B \not\cong R[X]$ なることが示される。次に $A \otimes B \cong$

$R^{[2]}$ なることを示す。実は系より $A \otimes B \cong A[B] = R[X + \sqrt{2}X^2, X^2, Y + \sqrt{2}Y^4, Y^2]$ が示される。ゆえ $R[X + \sqrt{2}X^2, X^2, Y + \sqrt{2}Y^4, Y^2] = R[U, V]$ と表せることを示せばよい。そのために

$\Phi(X), \Phi(Y), \Psi(X), \Psi(Y) \in R^*[X, Y]$ を次のように定義する。

$$\begin{cases} \Phi(X) = X + \sqrt{2}(X - \sqrt{2}Y)^2 \\ \Phi(Y) = Y - \frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}(X + \sqrt{2}(X - \sqrt{2}Y)^2) \\ \Psi(X) = X - \frac{1}{\sqrt{2}}Y + \frac{1}{\sqrt{2}}(Y + \sqrt{2}(Y - \sqrt{2}X)^4) \\ \Psi(Y) = Y + \sqrt{2}(Y - \sqrt{2}X)^4 \end{cases}$$

すると $\Phi, \Psi \in \text{Aut}_{R^*} R^*[X, Y]$ が成り立つ。

(\because) $\Phi(X), \Psi(Y) \in R^*[X, Y]$ は明らか。また $\Phi(Y) = Y + (X - \sqrt{2}Y)^2$, $\Psi(X) = X + (Y - \sqrt{2}X)^4$ より $\Phi(X), \Psi(X) \in R^*[X, Y]$ が成り立つ。また

$$\begin{cases} X = \Phi(X) - \sqrt{2}(\Phi(X) - \sqrt{2}\Phi(Y))^2 \\ Y = \Phi(Y) - (\Phi(X) - \sqrt{2}\Phi(Y))^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = \Psi(X) - (\Psi(Y) - \sqrt{2}\Psi(X))^4 \\ Y = \Psi(Y) - \sqrt{2}(\Psi(Y) - \sqrt{2}\Psi(X))^4 \end{cases}$$

が成り立つから $\Phi, \Psi \in \text{Aut}_{R^*} R^*[X, Y]$ が成り立つ。

$$\begin{cases} R[X + \sqrt{2}X^2, X^2] = R[X + \sqrt{2}X^2] + 2R^*[X] \\ R[Y + \sqrt{2}Y^4, Y^2] = R[Y + \sqrt{2}Y^4] + 2R^*[Y] \end{cases}$$

が成り立つことに注意する。ここで $2 \in \mathcal{L}(R^*/R)$ である。

$2R^*$ は R の ideal になっている。

(\because) $R^*[X+\sqrt{2}X^2, X^2] = R^*[X]$ であるから $2R^*[X+\sqrt{2}X^2, X^2]$
 $= 2R^*[X]$ になりたつ。 $2R^* \subset R$ ゆゑ $R[X+\sqrt{2}X^2, X^2] \supset 2R^*[X]$ 。
 又 R 中 $R[X+\sqrt{2}X^2, X^2] \supset R[X+\sqrt{2}X^2] + 2R^*[X]$ 。 逆に $X^2 =$
 $(X+\sqrt{2}X)^2 - 2\sqrt{2}X^3 - 2X^4 \in R[X+\sqrt{2}X^2] + 2R^*[X]$ であるから
 $R[X+\sqrt{2}X^2, X^2] \subset R[X+\sqrt{2}X^2] + 2R^*[X]$ 。 ゆゑ上とあわせて
 $R[X+\sqrt{2}X^2, X^2] = R[X+\sqrt{2}X^2] + 2R^*[X]$ が証明された。

$R[Y+\sqrt{2}Y^4, Y^2]$ の場合と同様にして示される。

$$\begin{cases} \Phi(X) \equiv X + \sqrt{2}X^2 \\ \Phi(Y) \equiv Y + X^2 \end{cases} \pmod{2R^*[X, Y]}$$

$$\begin{cases} \Psi(X) \equiv X + Y^4 \\ \Psi(Y) \equiv Y + \sqrt{2}Y^4 \end{cases} \pmod{2R^*[X, Y]}$$

になりたつ。 ゆゑ $\Phi', \Psi' \in \text{Aut}_{R^*} R^*[X, Y]$ を

$$\begin{cases} \Phi'(X) = \Phi(X) \\ \Phi'(Y) = \Phi(Y) - \Phi(X)^2 \end{cases} \quad \begin{cases} \Psi'(X) = \Psi(X) - \Psi(Y)^4 \\ \Psi'(Y) = \Psi(Y) \end{cases}$$

とおけば

$$\begin{cases} \Phi'(X) \equiv X + \sqrt{2}X^2 \\ \Phi'(Y) \equiv Y \end{cases} \pmod{2R^*[X, Y]}$$

$$\begin{cases} \Psi'(X) \equiv X \\ \Psi'(Y) \equiv Y + \sqrt{2}Y^4 \end{cases} \pmod{2R^*[X, Y]}$$

になりたつ。 この Φ', Ψ' について

$$(1) R[x + \sqrt{2}x^2, x^2, Y] = R[\Phi(x), \Phi'(Y)]$$

$$(2) R[Y + \sqrt{2}Y^4, Y^2, X] = R[\Psi'(X), \Psi(Y)]$$

$$(3) R[x + \sqrt{2}x^2, x^2, Y + \sqrt{2}Y^4, Y^2] = R[\Phi'\Psi'(x), \Phi'\Psi'(Y)]$$

がなりたつ。

(i) (3)を示す。(2)と(1)を同様に示される。まず前に示した

$$\text{よ} \rightarrow R[x + \sqrt{2}x^2, x^2, Y + \sqrt{2}Y^4, Y^2] = R[x + \sqrt{2}x^2, Y + \sqrt{2}Y^4]$$

$$+ 2R^*[X, Y] \text{ がなりたつ。} \rightarrow \text{よ} \rightarrow R^*[X, Y] = R^*[\Phi'\Psi'(x), \Phi'\Psi'(Y)]$$

$$\text{がなりたつ。} \rightarrow \text{よ} \rightarrow 2R^*[\Phi'\Psi'(x), \Phi'\Psi'(Y)] = 2R^*[X, Y] \text{ がなり}$$

$$\text{た} \rightarrow \text{よ} \rightarrow \begin{cases} \Phi'\Psi'(x) \equiv x + \sqrt{2}x^2 \\ \Phi'\Psi'(Y) \equiv Y + \sqrt{2}Y^4 \end{cases} \pmod{2R^*[X, Y]}$$

がなりたつ。よ

$$R[x + \sqrt{2}x^2, Y + \sqrt{2}Y^4] \equiv R[\Phi'\Psi'(x), \Phi'\Psi'(Y)] \pmod{2R^*[X, Y]}$$

$$= (\text{mod } 2R^*[\Phi'\Psi'(x), \Phi'\Psi'(Y)])$$

すなわち

$$R[x + \sqrt{2}x^2, Y + \sqrt{2}Y^4] + 2R^*[X, Y] = R[\Phi'\Psi'(x), \Phi'\Psi'(Y)] +$$

$$2R^*[\Phi'\Psi'(x), \Phi'\Psi'(Y)] = R[\Phi'\Psi'(x), \Phi'\Psi'(Y)] \text{ 中 } (3) \text{ が}$$

示された。

$$(1) \text{ は } A[Y] \cong R[X, Y]$$

$$(2) \text{ は } B[X] \cong R[X, Y]$$

$$(3) \text{ は } A \otimes B \cong R[X, Y]$$

を示している。

参考文献

- [1]. 浅沼, 環における Lüroth の定理, 第1回可換環論若手
シンポジウム報告集, 日本大学軽井沢研修所, (1978).
- [2] , Normally polynomial について, 新代数セミナー
報告集, 城崎, (1979)
- [3] J. Asanuma, *D-algebras stably equivalent to $D[Z]$* .
Proc. Int. Symposium on Algebraic Geometry, Kyoto (1977)
- [4] H. Bass, H. Connell and D. Wright, *Locally polynomial
algebras are symmetric algebras*. Invent. Math 38, 279
- 299 (1977)
- [5] E. Hamann, *On the R -invariance of $R[X]$* , J. Algebra,
35, 1-16 (1975).
- [6] C. Traverso, *Seminormality and Pic group*, Annali
della Scuola Norm. Sup. Pisa 24, 585-595 (1970).