

Z-transforms と noetherian pairs

広島大 理学部 伊藤史朗

J. R. Matijevic は A が reduced ネーター環のとき (A, A^{\sharp}) がネーター pair となることを証明した ([3])。又、最近 D. D. Anderson によって、一般のネーター環に対して (A, A^{\sharp}) がネーター pair となる 1 つの十分条件が得られた。ここではさらに一歩進んで、 (A, A^{\sharp}) がネーター pair となる必要十分条件について考えてみたい。

注意 ネーター環 A に対し、 $A^{\sharp} = \{x \in Q(A) \mid x \in A \text{ 又は } \dim A/A_A x = 0\}$ とおき、 A^{\sharp} を A の global transform という。又、 $A \subseteq B$ であって、 A と B の中間の環が全てネーターであるとき、 (A, B) はネーター pair であるという。

設定を少し一般化しておく。 A をネーター環、 Z を $\text{Spec}(A)$ の部分集合で特殊化で閉じているものとする。さらに Z の元は全て regular prime ideal (即ち、 A の非零因子を含む prime ideal) とする。 $\text{Ass}_A(M) \subseteq \text{Ass}_A(A)$ となる A -加群

M に対し,

$$T(Z, M) = \{ x \in M \otimes_A Q(A) \mid V(M :_A x) \subseteq Z \}$$

とおき, これを M の Z -transform と呼ぶことにする。(A のイデアル I を含む素イデアル全体の集合を $V(I)$ で表わす。)

$T(Z, A)$ は A を含む $Q(A)$ の部分環であって, $T(Z, M)$ は自然に $T(Z, A)$ -加群と成る, としている。 Z として A の regular 極大イデアル全体の集合をとれば $T(Z, A) = A^*$ である。

定理を述べる前に Z -transforms についていくつかの注意をしておく。 A 及び Z は上で用いたものと同じとする。 A のイデアル I で $\text{Ass}_A(A/I) \subseteq \text{Ass}_A(A)$ となるものを考える。

$Z' = \{ \mathfrak{p}/I \mid \mathfrak{p} \in Z, \mathfrak{p} \supseteq I \}$ とおくと Z' に含まれる素イデアルは全て $B = A/I$ の非零因子を含む素イデアルであるが, 定義から容易に分るように $T(Z, B) = T(Z', B)$ である。又, 自然な環準同型 $T(Z, A) \rightarrow T(Z, B)$ が存在して, その kernel は $T(Z, I) = T(Z, A) \cap I \cdot Q(A)$ と成っている。

定理 A をネーター環, Z を $\text{Spec}(A)$ の部分集合で特殊化で閉じているものとする。さらに Z に含まれる素イデアルは全て regular であるとする。このとき次の条件 (1)(2) は同値である。

(1) $(A, T(Z, A))$ はネーター pair

(2) (a) 任意の $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A(A)$ について $(A/\mathfrak{p}, T(Z, A/\mathfrak{p}))$ は

ネーター-pair であつて、さらに

(b) $\text{Ass}_A(A)$ の元 \mathfrak{z} で $A_{\mathfrak{z}}$ が reduced でないものについては、 $T(Z, A_{\mathfrak{z}})$ は有限生成 $A_{\mathfrak{z}}$ -加群。

もし任意の $\mathfrak{z} \in \text{Ass}_A(A)$ に対し $A_{\mathfrak{z}}$ が reduced でないならば、上の (1)(2) は次の (3) と同値。

(3) $T(Z, A)$ は有限生成 A -加群。

もし任意の $\mathfrak{z} \in \text{Spec}(A)$ に対し $(A_{\mathfrak{z}})'$ ($= A_{\mathfrak{z}}$ の $Q(A_{\mathfrak{z}})$ における整閉包) が有限生成 $A_{\mathfrak{z}}$ -加群であれば上の (1)(2) は次の (4) と同値。

(4) (a) 任意の $\mathfrak{z} \in \text{Ass}_A(A)$ について $(A_{\mathfrak{z}}, T(Z, A_{\mathfrak{z}}))$ はネーター-pair であつて、さらに

(b) $\text{Ass}_A(A)$ の元 \mathfrak{z} で $A_{\mathfrak{z}}$ が reduced でないものについて、 $(A_{\mathfrak{z}})'$ の高さ 1 の極大イデアル \mathfrak{m} で $\mathfrak{m} \cap A_{\mathfrak{z}} \in Z$ となるものは存在しない。

定理の証明には次の4つの補題が必要である。証明は全て容易であるから省略する。補題 1, 2, 3 については EGA IV (5.11) を参考にせよ。

補題 1. A をネーター環, $\{\mathfrak{z}_1, \dots, \mathfrak{z}_r\}$ を A の極小素イデアル \mathfrak{z} で $A_{\mathfrak{z}}$ が reduced とならないもの全体のなす集合とする。このとき次の (1)(2) が成立する。

(1) A の中零イデアルからなる列 $M_n \supset \cdots \supset M_0 = 0$ で次の性質をもつものが存在する。

(a) 各 j ($0 \leq j < n$) に対し素イデアル \mathfrak{p}_i ($1 \leq i \leq r$) が存在して, $\mathfrak{p}_i M_{j+1} \subseteq M_j$ かつ M_{j+1}/M_j は A/\mathfrak{p}_i のイデアルに A -加群として同型。

(b) $\text{Ass}_A(A/M_j) = \text{Ass}_A(A)$ $j = 0, \dots, n$ 。

(c) A の任意の極小素イデアル \mathfrak{p} に対し, $(A/M_n)_{\mathfrak{p}}$ は reduced。

(2) 各 \mathfrak{p}_i ($1 \leq i \leq r$) に対し, A の中零イデアル $N_i (\neq 0)$ が存在して, $\text{Ass}_A(A/N_i) = \text{Ass}_A(A)$, $\mathfrak{p}_i N_i = 0$ かつ N_i は A/\mathfrak{p}_i のイデアルに A -加群として同型。

補題 2. A をネーター環で, Z は定理のそれと同じものとする。 \mathfrak{p} を A の極小素イデアルで $A_{\mathfrak{p}}$ が reduced でないものとすると補題 1 より, A の中零イデアル $N (\neq 0)$ が存在して $\text{Ass}_A(A/N) = \text{Ass}_A(A)$, $\mathfrak{p}N = 0$ かつ N は A/\mathfrak{p} のイデアルに A -加群として同型である。このとき $T(Z, N)$ は $T(Z, A_{\mathfrak{p}})$ のイデアルに $T(Z, A)$ -加群として同型である。

補題 3. A をネーター整域で $A' (= A$ の $Q(A)$ における整閉包) は A -加群として有限生成とする。 Z は定理のそれと同

じものとする。このとき次の(1)(2)は同値である。

(1) $T(Z, A)$ は有限生成 A -加群。

(2) P を A' の素イデアルで $P \cap A \in Z$ とすると $\text{ht} P \geq 2$ 。

補題 4. $A \subseteq B \subseteq C$ を整域で同じ商体をもつとする。もし (A, B) がネーター pair で C が有限生成 B -加群であれば、 (A, C) もネーター pair である。

さて、定理の証明は次のようにする。

まず、 A のイデアル (0) の素イデアル分解 $(0) = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_m$ を考える。 $\text{Min}(A) = \{\sqrt{\mathfrak{q}_1}, \dots, \sqrt{\mathfrak{q}_m}\}$ としてよい。

$I = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_m$, $J = T(Z, A) \cap IQ(A)$ とおく。 J は整環同型 $T(Z, A) \rightarrow T(Z, A/I)$ の kernel でもある。最初に、条件(1)は次の(2')と同値であることを証明しよう。

(2') J は有限生成 A -加群で、 $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A(A)$ であれば $(A/\mathfrak{p}, T(Z, A/\mathfrak{p}))$ はネーター pair。さらに \mathfrak{p} が A の極小素イデアルで A/\mathfrak{p} が reduced でなければ $T(Z, A/\mathfrak{p})$ は有限生成 A -加群。

(1) \Rightarrow (2') : $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A(A)$ とすると A/\mathfrak{p} は A のイデアルに同型である。従って $T(Z, A/\mathfrak{p})$ は $T(Z, A)$ のイデアルに同型。これより自然な準同型 $\varphi: T(Z, A) \rightarrow T(Z, A/\mathfrak{p})$ は有限。故に(1)の

条件及び補題4より $(A/\mathfrak{p}, T(Z, A/\mathfrak{p}))$ はネ-タ-pair。次に $(A, T(Z, A))$ がネ-タ-pair であることから $A[J]$ はネ-タ-環であって J は $A[J]$ の中層イデアルである。よって適当に $x_1, \dots, x_n \in J$ を選べば $J = \sum A[J]x_i = \sum Ax_i + J \cdot \sum Ax_i$ 。これより J は有限生成 A -加群。さて, \mathfrak{p} を A の極小素イデアルで $A_{\mathfrak{p}}$ は reduced でないとする。補題1より, A の中層イデアル $K (\neq 0)$ が存在して, $\text{Ass}_A(A/K) = \text{Ass}_A(A)$, $\mathfrak{p}K = 0$, K は $A_{\mathfrak{p}}$ のイデアルに同型。 $K' = T(Z, A) \cap KQ(A) (= T(Z, K))$ とおくと, 補題2より K' は $T(Z, A/\mathfrak{p})$ のイデアルに同型である。 J と同じく K' も又 A -加群として有限生成。従って $T(Z, A/\mathfrak{p})$ は A -加群として有限生成となる。

(2) \Rightarrow (1): $A/\mathfrak{p} \subseteq T(Z, A)/J \subseteq T(Z, A/\mathfrak{p})$ となることは明らかである。 J が有限生成 A -加群, かつ $T(Z, A)$ の中層イデアルであることから $(A/\mathfrak{p}, T(Z, A/\mathfrak{p}))$ がネ-タ-pair であれば $(A, T(Z, A))$ もネ-タ-pair であることが分る。よって $(A/\mathfrak{p}, T(Z, A/\mathfrak{p}))$ がネ-タ-pair であることを示せばよい。従って最初から $\text{Min}(A) = \text{Ass}_A(A)$ としてよい。 A_{red} は $A/\mathfrak{p}_1 \times \dots \times A/\mathfrak{p}_n$ の, $T(Z, A_{\text{red}})$ は $T(Z, A/\mathfrak{p}_1) \times \dots \times T(Z, A/\mathfrak{p}_n)$ の部分環と考えられる (ここで $\sqrt{\mathfrak{p}_i} = \mathfrak{p}_i$ $i=1, \dots, n$)。今 $(A/\mathfrak{p}_i, T(Z, A/\mathfrak{p}_i))$ ($i=1, \dots, n$) はネ-タ-pair であるから $(A_{\text{red}}, T(Z, A_{\text{red}}))$ も又ネ-タ-pair となる。ここで補題1(1)の中層イデアルの

列 $M_n \supset \dots \supset M_0 = 0$ を考える。今証明したことより $(A, M_n, T(Z, A/M_n))$ はネ-ヌ-pair である。次に $n \geq 1$ とし、 $(A/M_1, T(Z, A/M_1))$ はネ-ヌ-pair であると仮定しよう。 $N = T(Z, A)(M_1 Q(A) (= T(Z, M_1)))$ とおく。A の極小素イデア N 子も、 $\exists M_1 = 0$, M_1 は A/\mathfrak{p} のイデア N に同型となるようにとる。補題 2 より N は $T(Z, A/\mathfrak{p})$ のイデア N に同型であり、 N は有限生成 A -加群である。又、 N は $T(Z, A)$ の中層イデア N である。この事実と $(A/M_1, T(Z, A/M_1))$ がネ-ヌ-pair であるとの仮定より $(A, T(Z, A))$ がネ-ヌ-pair となることが容易に示される。

参考文献

- [1] D.D. Anderson, Global transforms and noetherian pairs, Hiroshima Math. J. 9 (1979)
- [2] A. Grothendieck., Elements de Geometrie Algebrigue IV Publ. Math. IHES. 28 (1966)
- [3] J.R. Matijevic, Maximal ideal transforms of noetherian rings, Proc. Amer. Math. Soc. 54 (1976)
- [4] A. Wadsworth, Pairs of domains where all intermediate domains are noetherian, Trans. AMS 195 (1974)