数理解析研究所講究録
第 374 巻 1980 年 164-173

ネター整域の素イデアル鎖について

香川大教育　藤田和憲

最近、小駒哲司氏により catenary でない noetherian normal domain の例が構成された（この考究録の「擬幾何学的環の formal fibre による素イデアル鎖条件の判定」）。従って Ratliff が提出した chain conjecture：「noetherian local domain の integral closure は chain condition をみたす」は否定的に解かれたことになった。

ここでは Ratliff の著書 Chain conjecture in ring theory（Lecture Note 647 Springer）を参考にして、素イデアル鎖問題の経緯および Nagata, Ratliff 等の得た結果のいくつかについて要約する。以下 ring はすべて noetherian ring あるいは noetherian domain の almost finite integral extension とする。素イデアル鎖について詳しくない方も平易に読めるように定義から始める。

<u>定義</u> 環Rの素イデアル鎖 $\mathfrak{p}_0 \supset \mathfrak{p}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{p}_n$ が saturated

$$\iff \quad 1 \le {}^\forall i \le n \quad \mathrm{ht}\, \mathfrak{p}_{i-1}/\mathfrak{p}_i = 1$$

$\mathfrak{p}_0 \supset \mathfrak{p}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{p}_n$ が saturated であって、$\mathfrak{p}_0$ が maximal ideal，$\mathfrak{p}_n$ が minimal prime ideal のとき、$\mathfrak{p}_0 \supset \mathfrak{p}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{p}_n$ を maximal chain という.

<u>定義</u> 環Rが catenary

$\iff$ Rの prime ideals ${}^\forall P, \mathfrak{p}$ $(P \supset \mathfrak{p})$ について P と $\mathfrak{p}$ の間の saturated chain の長さは一定

すぐわかるように R が domain のときは 次の条件(i)あるいは(ii)と同値になる.

(i) ${}^\forall P, \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ s.t. $P \supset \mathfrak{p}$ について $\mathrm{ht}\, P = \mathrm{ht}\, \mathfrak{p} + \mathrm{ht}\, P/\mathfrak{p}$

(ii) $\mathrm{ht}\, P/\mathfrak{p} = 1$ なるRの任意の prime ideals $P, \mathfrak{p}$ について，$\mathrm{ht}\, P = \mathrm{ht}\, \mathfrak{p} + 1$

よく知られているように、体k上の affine ring $k[x_1, \ldots, x_n]$ とか、regular local ring は catenary である. また、catenary ring の homomorphic image は catenary である. 従って I.S. Cohen の Structure theorem of complete local rings より、complete local ring は catenary であることがわかる. これらのことから自然に次の問が生じる.

noetherian ring は catenary か?

これは長い間解けなかった問題であった. [1]にも同様の問かけがある. 上の問は1956年に Nagata によって否定的に解かれた. catenary でない noetherian domain の例が示された[4]. 今度、小駒氏の例が出るまでに、catenary でない noetherian ring の例は、本質的に Nagata の構成したものだけであった. Nagata は次に示すような domain R' および、その subring R を作った:

$(R', \mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2)$ は体 K を含む semi local domain で次の(i)〜(iii)をみたす. (i) $ht\,\mathfrak{m}_1 = m+1$, $ht\,\mathfrak{m}_2 = r+m+1$ ここに $r>0$, $m \geq 0$ (ii) $R'_{\mathfrak{m}_1}$, $R'_{\mathfrak{m}_2}$ は regular local rings. (iii) $R'/\mathfrak{m}_1 = K$, $R'/\mathfrak{m}_2 = K$. ここで, $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2$, $R = K + \mathfrak{m}$ とおく. このとき $(R, \mathfrak{m})$ は noetherian local domain で次のいくつかの変った性質をもつ (a) R' は R の integral closure 従って $(R, \mathfrak{m})$ の integral closure は高さの異るmaximal ideals をもつ. (b) R' の maximal ideal $\mathfrak{m}_1$ の高さは $m+1$ であるが、$\mathfrak{m}_1$ を R に落した maximal ideal $\mathfrak{m}$ の高さは、$m+r+1$. よって、$ht\,\mathfrak{m}_1 < ht\,\mathfrak{m}_1 \cap R$. (c) $m>0$ のとき、R に

は、$\{0\}$と$\mathfrak{m}$の間に長さ$m+1$および$r+m+1$のsaturated chainがある．従ってRはcatenaryでない．(d) $m=0$のときRはcatenaryであるが、R上一変数多項式環$R[X]$はcatenaryでない．

この例の$m>0$のときのRのintegral closureと$m=0$のときの$R[X]$のintegral closureは局所的にregular local ringであるからcatenaryである．このことが主な理由で次の問が生じる

noetherian normal domainはcatenaryか？
noetherian domainのintegral closureはcatenaryか？

Ratliffはこれを解くべくかなり努力した．彼のLecture noteのp.20にあるように、彼は上の問は成立すると考えていたと思える．小駒氏はこの問に対する反例を与えた．

次にいくつかの素イデアル鎖の条件のうちから主にsecond chain conditionについて書く．まず定義から:

<u>定義</u> ring Rがfirst chain condition for prime idealsをみたす（略してf.c.c.をみたす）

$\Longleftrightarrow$

Rの任意のmaximalな素イデアル鎖の長さは $\dim R$ に等しい

定義 ring R が second chain condition for prime ideals (略して s.c.c.) をみたす.

$\Longleftrightarrow$

Rの任意の minimal prime ideal $\mathfrak{P}$ に対して $R/\mathfrak{P}$ の任意の integral extension は s.c.c. をみたす.

定義 domain R が altitude formula をみたす

$\Longleftrightarrow$

R を含む任意の finitely generated domain A について $\forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$

$$\operatorname{ht} \mathfrak{p} + \operatorname{tr.deg}_{R/\mathfrak{p}\cap R} A/\mathfrak{p} = \operatorname{ht} \mathfrak{P} + \operatorname{tr.deg}_R A$$

定義 ring R が universally catenary

$\Longleftrightarrow$

R 上任意の finitely generated algebra は catenary

前の Nagata の例で $m=0$ の R は first chain condition をみたすが、second chain condition はみたさない.

またそのRは universally catenary でもない.

__定理__ $(R, \mathfrak{m})$ を local domain とすると次は同値である.

(1) Rは quasi unmixed i.e. Rの completion $\hat{R}$ は f.c.c. をみたす.

(2) Rは altitude formula をみたす

(3) R は s.c.c. をみたす.

(4) Rは universally catenary

(5) $R[X]$ は catenary

(6) Rの integral closure は s.c.c. をみたす.

(7) Rの henselization は s.c.c. をみたす

(8) Rの henselization は f.c.c. をみたす

__注意__ henselian local ring については f.c.c. をみたす $\Leftrightarrow$ s.c.c. をみたす.

(1)⇒(3)は [4] で示された. (1)⇒(2)は [5] に原形があり [6] で完全になった. Ratliff の論文 [7] の一つの特徴は, (2)⇒(1) と (3)⇒(1) を証明したことである. [7] のもう一つの特徴は (1)⇔(5) を示したことである. Ratliff の Lecture note には, これらも含めて32個の同値

な命題が示されてある．そのうちから多少表現において異っているものを2つ書き加える．

(9) $(\mathfrak{m}, y)R[y] \subsetneq R[y]$ をみたす R の商体の任意の元 y に対して，$R[y]_{(\mathfrak{m}, y)}$ は catenary でありかつ，$\dim R[y]_{(\mathfrak{m}, y)} = \dim R$

(10) $e(\mathfrak{a}) = e(\mathfrak{b})$ なる任意の $\mathfrak{m}$-primary ideals $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$ に対して，$\mathfrak{b}\mathfrak{a}^n = \mathfrak{a}^{n+1}$ $\forall n >> 0$　ここに e は multiplicity を表わす．

最後に Ratliff の lecture note の中にある素イデアル鎖に関する予想のうち主なものを書く．まず定義から：

<u>定義</u> ring R が chain condition（略して c.c.）をみたす $\Longleftrightarrow$ $\forall \mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(R)$，$(\mathfrak{p} \supset \mathfrak{q})$ $(R/\mathfrak{q})_{\mathfrak{p}/\mathfrak{q}}$ は s.c.c. をみたす

<u>定義</u> domain R が H-domain $\Longleftrightarrow$ R の任意の高さ1の prime ideal $\mathfrak{q}$ について $\dim R/\mathfrak{q} = \dim R - 1$

(a) <u>Chain conjecture</u>: local domain の integral closure は、c.c. をみたす.

(b) <u>Depth conjecture</u>: R を任意の local domain、$\mathfrak{p}$ を $\mathrm{ht}\,\mathfrak{p}>1$ なる R の任意の prime ideal とするとき、$\mathfrak{p}\supset\mathfrak{q}$, $\dim R/\mathfrak{q}=\dim R/\mathfrak{p}+1$ をみたす R の prime ideal $\mathfrak{q}$ が存在する.

(c) <u>H-conjecture</u>: H-local domain は catenary.

(d) <u>Catenary chain conjecture</u>: catenary local domain の integral closure は c.c. をみたす.

(e) <u>Normal chain conjecture</u>: integral closure が f.c.c. をみたす local domain は、s.c.c. をみたす.

これらの予想の間の関係は、(a)⇒(b)⇒(c)⇒(d)⇒(e) である. (a)は、小駒氏の例により成立しないことがわかった. (b)〜(d)は今のところ解けていない. (b)〜(d)いずれも興味深く面白い問題であるが、(a)が崩れたいまどのくらい意味があるか疑問である.

(c)に関連して、Ratliff は [8] で次のことを示している.

<u>命題</u> local domain $(R, \mathfrak{m})$ について

R が catenary $\Longleftrightarrow$ $\forall\mathfrak{q}\in\mathrm{Spec}(R)$ $\quad \mathrm{ht}\,\mathfrak{q}+\dim R/\mathfrak{q}=\dim R$

また [2] には、任意の prime ideal $\mathfrak{p}$ について、$\mathrm{ht}\,\mathfrak{p} + \dim R/\mathfrak{p} = \dim R$ が成立するが catenary でない noetherian Hilbert domain が構成されている。semi local domains については次の予想がある

Taut-level conjecture：R を $\mathrm{ht}\,\mathfrak{p} + \dim R/\mathfrak{p} = \dim R$ $\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ をみたす semi local domain とすると、R は f.c.c. をみたす。

これについては、taut-level conjecture $\Rightarrow$ Catenary conjecture である。上の予想について、[3] に部分的な解がある。

<u>命題</u> R を $\mathrm{ht}\,\mathfrak{p} + \dim R/\mathfrak{p} = \dim R$ $\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ をみたす semi local domain とすると、R の maximal でない任意の prime ideal $\mathfrak{p}$ について、$R_{\mathfrak{p}}$ は s.c.c. をみたす。

参考文献

[1] I. S. Cohen, Length of prime ideal chains, Amer. J. Math. 76 (1954), 654–668.

[2] K. Fujita, Some counterexamples related to prime chains in integral domains, Hiroshima Math.

J. 5 (1975), 473–485.

[3] S. McAdam and L.J. Ratliff, Semi local taut rings, Indiana Univ. Math. J. 26 (1977), 73–79.

[4] M. Nagata, On the chain problem of prime ideals, Nagoya Math. J. 10 (1956), 51–64

[5] M. Nagata, Note on a chain condition for prime ideals, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto 32 (1959–1960), 85–90.

[6] L.J. Ratliff, On quasi-unmixed semi-local rings and the altitude formula, Amer. J. Math. 87 (1965), 278–284.

[7] L.J. Ratliff, On quasi-unmixed local domains, the altitude formula, and the chain condition for prime ideals (I), Amer. J. Math. 91 (1969), 508–528.

[8] L.J. Ratliff, Catenary rings and the altitude formula, Amer. J. Math. 94 (1972), 452–466.