数理解析研究所講究録
第 377 巻 1980 年 101-122

Hilbert B(H)-modules について

東京電機大・理工　垣原 祐一郎

§1. Introduction.

ベクトル値内積をもつ空間とその応用について述べる。 H を Hilbert space, B(H) を H 上の bounded linear operators の全体, T(H) を H 上の trace-class operators の全体とする。我々が考察する空間は Hilbert B(H)-module と呼ぶものである。これは left B(H)-module で T(H)-valued inner product (Gramian と呼ぶ) をもち, Gramian から導入された norm に関して完備なものである。

Hilbert B(H)-module の基本的な性質について述べる。その多くは Hilbert space と類似していることが示される (§2)。

§3 では, 群上の T(H)-valued function について考察する。通常の numerical function の場合と同様に positive definiteness を定義し, unitary representation との関係や Bochner type の定理などについて述べる。

§4では，Hilbert space-valued や Hilbert-Schmidt class operator-valued stationary process の拡張としての Hilbert $B(H)$-module-valued stationary process について述べる。有名な2つの定理 ― Wold と Cramér の分解 ― を定式化する。

§2. Hilbert $B(H)$-modules.

B を algebra，X を left B-module とするとき，B の X の上への action を $B\times X \ni (a, x) \longrightarrow a\cdot x \in X$ と書くことにする。$a \in B(H)$ の norm は $\|a\|_\infty$，adjoint は a^*，$B(H)$ の unit は 1 と書くことにする。また，$T(H)$ の trace および trace-norm はそれぞれ $Tr(\cdot)$，$\tau(\cdot)$ と書く。

2.1. Definition. X を left $B(H)$-module とするとき，X が pre-Hilbert $B(H)$-module であるとは，適当な mapping $[\cdot,\cdot] : X\times X \longrightarrow T(H)$ が存在して次の (1) ～ (4) を満たすことである：$^\forall x, y, z \in X$，$^\forall a \in B(H)$ に対して

(1) $[x+y, z] = [x, z] + [y, z]$

(2) $[a\cdot x, y] = a[x, y]$

(3) $[x, y] = [y, x]^*$

(4) $[x, x] \geqq 0$; $[x, x] = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

$[\cdot,\cdot]$ は Gramian と呼ばれる。▯

Hilbert B(H)-module の最初の idea は Terasaki [17] に見られる。C^*-algebra 上の module については Kaplansky [5], Paschke [11], Rieffel [13] に詳しい。これから述べることは主として Kakihara-Terasaki [3], Kakihara [4] による。また, Hilbert B(H)-module の一般的な取り扱いについては Ozawa [10] に見られる。

<u>2.2. Remark.</u> X が pre-Hilbert B(H)-module であるならば X は pre-Hilbert space になる。$x, y \in X$, $\alpha \in \mathbb{C}$ (複素数体) に対して scalar product, inner product, norm をそれぞれ次の式で定義する:

$$\alpha x = (\alpha 1)\cdot x, \qquad (x, y)_X = Tr([x, y])$$

$$\|x\|_X = \tau([x, x])^{\frac{1}{2}}. \ \square$$

Paschke [11] と同様にして, 次の Lemma を得る。

<u>2.3. Lemma.</u> X が pre-Hilbert B(H)-module ならば, $\forall x, y \in X$, $\forall a \in B(H)$ に対して次の (1) ~ (4) が成立する:

(1) $(a\cdot x, y)_X = (x, a^*\cdot y)_X$

(2) $\|a\cdot x\|_X \leqq \|a\|_\infty \cdot \|x\|_X$

(3) $[y, x][x, y] \leqq \|x\|_X^2 [y, y]$

(4) $\tau([x, y]) \leqq \|x\|_X \cdot \|y\|_X$. $\square$

<u>2.4. Definition.</u> pre-Hilbert B(H)-module X が norm $\|\cdot\|_X$ に関して完備であるとき, X を <u>Hilbert B(H)-module</u> と呼ぶ。$\square$

<u>2.5. Remark.</u> Xが pre-Hilbert $B(H)$-module のとき $\tilde{X}$ を $\|\cdot\|_X$ に関する X の completion とすると，$\tilde{X}$ は Hilbert $B(H)$-module となり，$B(H)$ の X 上での action および X 上の Gramian はそれぞれ $\tilde{X}$ 上へ一意的に拡張されることが Lemma 2.3 からわかる（c.f. [11]）。

<u>2.6. Examples.</u> (1) Hilbert space H は Hilbert $B(H)$-module である。$B(H)$ の action は $a\cdot\phi = a\phi$, $a \in B(H)$, $\phi \in H$, H 上の Gramian は $[\phi_1, \phi_2] = \phi_1 \otimes \overline{\phi_2}$, $\phi_1, \phi_2 \in H$（Schatten [16] の tensor product）で定義される。Ozawa [10] は，H 上の Gramian が定数倍を除いて一意的に上の形であることを示した。

(2) Hilbert-Schmidt class $HS(H)$ も Hilbert $B(H)$-module である。$B(H)$ の action は $a\cdot a_1 = aa_1$, $a \in B(H)$, $a_1 \in HS(H)$, Gramian は $[a_1, a_2] = a_1 a_2^*$, $a_1, a_2 \in HS(H)$ で定義される。

(3) $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ を probability measure space, $L^2(\Omega : H)$ を Ω 上で定義された random variables で square-integrable なものの全体とする。$x, y \in L^2(\Omega : H)$, $a \in B(H)$ に対して，action と Gramian は次式で定義される（c.f. [18]）：

$$(a\cdot x)(\omega) = a\,x(\omega), \quad \omega \in \Omega$$

$$[x, y] = \int_\Omega x(\omega) \otimes \overline{y(\omega)}\, \mu(d\omega). \ \square$$

Hilbert B(H)-module の characterization として、次の定理がある (c.f. [4])。

<u>2.7. Theorem.</u> X は left $B(H)$-module で Hilbert space (inner product を $(\cdot,\cdot)_X$ とする) であるとする。もし、$\forall x \in X$ に対して $p_x(a) = (a\cdot x, x)_X$, $a \in B(H)$ が $B(H)$ 上の normal positive linear functional であれば、X は Hilbert $B(H)$-module になる。

(Outline of the proof) $\forall x \in X$ に対して $\Lambda_x(a) = a\cdot x$, $a \in B(H)$ とすると、Λ_x は $B(H)$ から X への bounded linear operator になることがわかる。$\Lambda_x^* : X \to B(H)^*$ であるから $[x, y] = \Lambda_x^*(y)$, $x, y \in X$ と定義すると、簡単な計算によって $p_x(a) = \langle [x,x], a^* \rangle$ ($\langle \cdot,\cdot \rangle$ は $B(H)$ と $B(H)^*$ の pair) が $\forall a \in B(H)$ で成立し、p_x が normal だから $[x,x] \in T(H)$ が出る。以下 $[\cdot,\cdot]$ が Gramian であることを確かめる。$\square$

<u>2.8. Definition.</u> X を Hilbert $B(H)$-module、Y を X の subset とする。

(1) Y が X の <u>Hilbert $B(H)$-submodule</u> であるとは、Y が X の left $B(H)$-submodule で、$\|\cdot\|_X$ に関して closed であることをいう。

(2) $\mathfrak{S}(Y)$ によって Y から generate された X の Hilbert

(3) Y の Gramian orthogonal complement $Y^{\perp\!\!\!-}$ は
$$Y^{\perp\!\!\!-} = \{ x \in X ;\ [x, y] = 0,\ {}^{\forall} y \in Y \}$$
で定義される。□

Kaplansky [5] は, commutative AW^*-module に対して orthogonal decomposition theorem を証明したが, Hilbert $B(H)$-module でも同様のことが証明される (c.f. [3])。

<u>2.9. Theorem.</u> X を Hilbert $B(H)$-module, Y を X の Hilbert $B(H)$-submodule とする。Y の Gramian orthogonal complement $Y^{\perp\!\!\!-}$ は X の Hilbert $B(H)$-submodule になり, 通常の Hilbert space としての orthogonal complement $Y^{\perp}$ と一致する。したがって $Y = Y \oplus Y^{\perp\!\!\!-}$ の orthogonal decomposition が成立する。

(Outline of the proof) $Y^{\perp\!\!\!-}$ が left $B(H)$-module であることは容易に確かめられる。$Y^{\perp\!\!\!-}$ が norm-closed であることは, Lemma 2.3 (4) よりわかる。$Y^{\perp} = Y^{\perp\!\!\!-}$ については, $Y^{\perp\!\!\!-} \subset Y^{\perp}$ は明らか。$Y^{\perp} \subset Y^{\perp\!\!\!-}$ は, $x \in Y^{\perp}$, $y \in Y$ として, ${}^{\forall} a \in B(H)$ に対して $Tr(a[x, y]) = 0$ を示し, $T(H)^* = B(H)$ を用いる。□

次に Hilbert $B(H)$-module 上の functional に対しての Riesz type theorem を述べる。Kaplansky [5] も同様の結果を得ている。

2.10. Definition. X を Hilbert $B(H)$-module とする。f が X 上の functional であるとは，f が X から $T(H)$ への module homomorphism であることをいう。つまり，$\forall x, y \in X$, $\forall a \in B(H)$ に対して $f(x+y)=f(x)+f(y)$, $f(a\cdot x)=af(x)$ を満たすことである。X 上の functional f が bounded であるとは，$\exists k>0$ に対して $\tau(f(x)) \leqq k\|x\|_X$, $\forall x \in X$ が成立することである。上の不等式を満たす k の下限が f の norm $\|f\|_X$ である。▯

2.11. Theorem. f が Hilbert $B(H)$-module X 上の bounded functional であれば，一意に $y \in X$ が存在して

$$f(x) = [x, y], \quad y \in X$$

および $\|f\|_X = \|y\|_X$ を満たす。

(Outline of the proof) $\rho(x) = Tr(f(x))$ とおいて通常の Hilbert space の Riesz theorem を用い $\rho(x) = (x, y)_X$, $\exists y \in X$。あと $Tr(a[x,y]) = Tr(af(x))$, $\forall a \in B(H)$ を示し $f(x) = [x, y]$ を得る。▯

§3. A Bochner type theorem.

この§では，群上の $T(H)$-valued function について考察する。

3.1. Definition. G を topological group とし，p を G 上の $T(H)$-valued function とする。

(1) p が positive-definite であるとは，$\forall\{a_1, \cdots, a_n\} \subset B(H)$，$\forall\{t_1, \cdots, t_n\} \subset G$ に対して $\sum_{i,j} a_i p(t_i t_j^{-1}) a_j^* \geqq 0$ が成立することをいう。

(2) p が weakly continuous であるとは，$\forall a \in B(H)$ に対して $Tr(ap(\cdot))$ が continuous であることをいう。

次の定理は Ozawa [10] による。

3.2. Theorem. G を locally compact group，p を G 上の $T(H)$-valued positive-definite function とする。このとき適当な Hilbert $B(H)$-module X，$x_0 \in X$，G の X 上への unitary representation $t \to U_t$ が存在して

$$p(t) = [U_t x_0, x_0], \quad t \in G$$

が成立する。もし，p が weakly continuous であれば，$t \to U_t$ も weakly continuous になる。▯

3.3. Remark. Hilbert $B(H)$-module X 上の bounded linear operator U が $[Ux, Uy] = [x, y]$，$\forall x, y \in X$ を満たすとき Gramian unitary であると呼ぶことにする。Gramian unitary operator は，通常の unitary operator になる。上の定理で，U_t，$t \in G$ は Gramian unitary にとれることがわかる。このとき $t \to U_t$ を Gramian unitary representation と呼ぶことにする。▯

locally compact abelian group 上の $T(H)$-valued weakly continuous positive-definite function に対する Bochner type theorem を定式化するために我々はいくつかの準備を必要とする。

しばらくの間 $(\Omega, \mathcal{B})$ を abstract measurable space とする。F を $\mathcal{B}$ 上の $T(H)^{+}$-valued countably additive (c.a.) measure とする。ここで countable additivity は trace-norm の意味で考える。我々は Ω 上の $B(H)$-valued function の $T(H)$-valued measure F についての integral を定義する。まず $\mathcal{L}_0(\Omega ; B(H))$ を Ω 上の $B(H)$-valued simple functions の全体とする。つまり $\Phi = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i}$, $a_i \in B(H)$, $A_i \in \mathcal{B}$ $(1 \leqq i \leqq n)$ なる形の function の集まりである(1_A, $A \in \mathcal{B}$ は, A の characteristic function を表わす)。Ω 上の complex-valued function Φ は, $\Phi(\omega) = \Phi(\omega) 1$, $\omega \in \Omega$ とみなすことによって $B(H)$-valued function になる。$\Phi = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i} \in \mathcal{L}_0(\Omega : B(H))$ に対して Φ の norm および F についての integral を

$$\|\Phi\| = \sup_{\omega \in \Omega} \|\Phi(\omega)\|$$

$$\int_{\Omega} \Phi(\omega) F(d\omega) = \sum_{i=1}^{n} a_i F(A_i)$$

で定義する。$\mu(A) = \tau(F(A))$, $A \in \mathcal{B}$ とおくと μ は $\mathcal{B}$ 上の finite nonnegative measure になる。簡単な計算により

$\forall \Phi \in L_0(\Omega : B(H))$ に対して

$$\tau\left(\int_\Omega \Phi(\omega) F(d\omega)\right) \leqq \|\Phi\| \mu(\Omega)$$

が成立する。 $L_0(\Omega : B(H))$ の $\|\cdot\|$ についての completion を $L(\Omega : B(H))$ と書くことにすると，上の不等式によって F についての integral は $L(\Omega : B(H))$ の要素に対し拡張され，上の不等式もそのまま成立する。さらに $\forall a \in B(H)$, $\forall \Phi \in L(\Omega ; B(H))$ に対して $\int_\Omega a\Phi(\omega)F(d\omega) = a\int_\Omega \Phi(\omega)F(d\omega)$ が成立する。

次に Ω を locally compact space, $\mathcal{B}$ を Ω の Borel field, X を Hilbert $B(H)$-module とする。X 上の projection P で $[Px, y] = [x, Py]$, $\forall x, y \in X$ を満たすものを Gramian projection と呼ぶことにする。P が X のある Hilbert $B(H)$-submodule への projection であることが Gramian projection になるための必要十分条件である。$\mathcal{B}$ 上で定義され X 上の Gramian projection に値をとる measure $P(\cdot)$ で，$(P(\cdot)x, x)_X$ が $\forall x \in X$ で regular になるものを spectral measure と呼ぶ。この $P(\cdot)$ についての integral について述べることにする。まず $L_0(\Omega : B(H))$ の要素に対して定義し，次に $L(\Omega : B(H))$ にまで拡張する。simple function $\Phi = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$ に対して

$$\int_\Omega \Phi(\omega)P(d\omega) = \sum_{i=1}^n \pi(a_i)P(A_i)$$

と定義する。ここで $\pi(a)$ $(a \in B(H))$ は，$\pi(a)x = a \cdot x$, $x \in X$ で

定義されたX上のoperatorである。また右辺はstrong operator topologyで考える。容易に，$\forall \Phi \in L_0(\Omega : B(H))$に対して

$$\left\| \int_\Omega \Phi(\omega) P(d\omega) \right\|_X \leqq \|\Phi\|$$

が成立することが確かめられる。したがってPについてのintegralは$L(\Omega : B(H))$の要素にまで拡張され，上の不等式もそのまま成立する。

$x \in X$に対して$\xi_x(\cdot) = P(\cdot)x$と定義すると，ξ_xは$\mathcal{B}$上のX-valued c.a. orthogonally scattered (o.s.) measureになる。つまり，$A, B \in \mathcal{B}$, $A \cap B = \phi$であれば

$$[\xi_x(A), \xi_x(B)] = 0$$

を満たす。$x, y \in X$に対して$M_{x,y}(\cdot) = [P(\cdot)x, y]$と定義すると，$M_{x,y}$は$\mathcal{B}$上の$T(H)$-valued c.a. measureになる。$M_{x,y}$についてのintegralも同様に定義される。まず$\forall A \in \mathcal{B}$に対して

$$\tau(M_{x,y}(A)) \leqq \|P(A)\|_X \cdot \|x\|_X \cdot \|y\|_X$$

が成立することに注意する。simple function $\Phi = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i}$に対して

$$\int_\Omega \Phi(\omega) M_{x,y}(d\omega) = \sum_{i=1}^{n} a_i [P(A_i)x, y]$$

と定義すると，次の不等式が成立する：

$$\tau\left(\int_\Omega \Phi(\omega) M_{x,y}(d\omega)\right) \leqq \|\Phi\| \cdot \|x\|_X \cdot \|y\|_X .$$

したがって integral を $L(\Omega : B(H))$ の要素まで拡張でき、上の不等式もそのまま成立する。さらに $\forall \Phi \in L(\Omega : B(H))$ について次の等式が成立する：

$$\int_{\Omega} \Phi(\omega) M_{x,y}(d\omega) = \left[\left(\int_{\Omega} \Phi(\omega) P(d\omega) \right) x, y \right].$$

以上の準備の下で Bochner type theorem を証明することができる。

3.4. Theorem. G を locally compact abelian group, $\widehat{G}$ をその dual group とする。$\chi \in \widehat{G}$ の $t \in G$ における値は $\langle t, \chi \rangle$ と書くことにする。p が G 上の $T(H)$-valued weakly continuous positive-definite function であるならば、$\widehat{G}$ 上の $T(H)^{+}$-valued c.a. measure F が存在して

$$p(t) = \int_{\widehat{G}} \overline{\langle t, \chi \rangle} F(d\chi), \quad t \in G$$

を満たす。逆に上式で定義される p は、G 上の $T(H)$-valued weakly continuous positive-definite function である。

(Outline of the proof) 前半は、Theorem 3.2 および Remark 3.3により、ある Hilbert $B(H)$-module X, $x_0 \in X$ および G の Gramian unitary representation $t \to U_t$ が存在して

$$p(t) = [\, U_t x_0, x_0 \,], \quad t \in G$$

を満たす。簡単な計算により、通常の Stone の定理を用いて $\widehat{G}$ の spectral measure $P(\cdot)$ が存在して

$$U_t = \int_{\hat{G}} \overline{\langle t, \chi \rangle} P(d\chi), \ t \in G$$

となる。そこで $\hat{G}$ の Borel set A に対して

$$F(A) = [P(A)x_0, x_0]$$

とおくと，F は $\hat{G}$ の Borel field 上の $T(H)^+$-valued c.a. measure になり定理の条件を満たすことが確かめられる。後半は容易である。▯

§4. Hilbert B(H)-module-valued stationary processes.

Hilbert space に値をとる univariate process $\{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ についての理論は Kolmogorov [7] にみられる。multi-variate process については Wiener-Masani [19] の代表的な研究がある。infinite-variate case，$L^2(\Omega:H)$-valued，$HS(H)$-valued process については Kallianpur-Mandrekar [6]，Mandrekar-Salehi [8,9]，Payen [12]，Rosenberg [14] などがある。我々は，これらを統一的に取り扱うことを目的として Hilbert $B(H)$-module に値をとる process について考察する (c.f. Kakihara [4]，Ozawa [10])。

以下，X，G をそれぞれ固定した Hilbert $B(H)$-module，locally compact abelian group とする。

4.1. Definition. G から X への写像 $t \to x_t$ があるとする。$\{x_t\}_{t \in G}$ が G 上の X-valued stationary process (sp) であ

るとは，次の(1)，(2)が満たされることである：

(1) $[x_s, x_t]$ が st^{-1} だけに依存する。これを $\Gamma(st^{-1})$ とおく。

(2) Γ は weakly continuous である。

Γ は process $\{x_t\}_{t\in G}$ の <u>covariance function</u> と呼ばれる。▯

<u>4.2. Remark.</u> $\{x_t\}_{t\in G}$ を G 上の X-valued sp，Γ をその covariance function とする。

(1) Γ は completely positive になる。つまり，$\forall\{t_1, \cdots, t_n\}\subset G$，$\forall\{\phi_1, \cdots, \phi_n\}\subset H$ に対して

$$\sum_{i,j}\left(\Gamma(t_i t_j^{-1})\phi_j, \phi_i\right)\geqq 0.$$

(2) Γ は $T(H)$-valued positive-definite function になる (c.f. Definition 3.1)。▯

<u>4.3. Definition.</u> $\{x_t\}_{t\in G}$ を G 上の X-valued sp とする。

(1) $\{x_t\}_{t\in G}$ の <u>time domain</u> は

$$\mathfrak{h}(\tilde{x}) = \mathfrak{S}\{x_t : t\in G\}$$

で定義される。また ∇ を G の subset としたとき，$\{x_t\}_{t\in G}$ の ∇ に関する <u>observation space</u> は

$$\mathfrak{h}(\tilde{x} : \nabla) = \mathfrak{S}\{x_t ; t\in\nabla\}$$

で定義される。

(2) $s\in G$ に対して $U_s x_t = x_{st}$，$t\in G$ で定義される

$\mathfrak{H}(\tilde{x})$ 上の operator U_s を $\{x_t\}_{t\in G}$ の <u>shift operator</u> と呼ぶ。U_s は Gramian unitary で $s\to U_s$ が weakly continuous になるから $\hat{G}$ 上の spectral measure $P(\cdot)$ が存在して $U_s=\int_{\hat{G}}\overline{\langle s,\chi\rangle}P(d\chi)$ となる。

(3) Γ を $\{x_t\}_{t\in G}$ の covariance function とすると、Theorem 3.4 により $\hat{G}$ 上の $T(H)^+$-valued c.a. measure $F_{\tilde{x}}$ が存在して

$$\Gamma(s)=[x_s,x_e]=\int_{\hat{G}}\overline{\langle s,\chi\rangle}F_{\tilde{x}}(d\chi),\quad s\in G$$

となる。$F_{\tilde{x}}$ は $\{x_t\}_{t\in G}$ の <u>spectral distribution</u> と呼ばれる。□

Wold の分解定理を定式化するために次の定義が必要である。

<u>4.4. Definition.</u> $\mathcal{J}$ を G の nonempty subsets の作る family で translation invariant なものとする。つまり $t\in G$, $V\in\mathcal{J}$ ならば $tV\in\mathcal{J}$ を満たすとする。

(1) G 上の X-valued sp $\{x_t\}_{t\in G}$ が <u>$\mathcal{J}$-regular</u> であるとは、

$$\bigcap_{V\in\mathcal{J}}\mathfrak{H}(\tilde{x}:V)=\{0\}$$

が成立することである。また <u>$\mathcal{J}$-singular</u> であるとは

$$\mathfrak{H}(\tilde{x}:V)=\mathfrak{H}(\tilde{x})$$

が $^\forall V\in\mathcal{J}$ で成立することである。

(2) $\{x_t\}_{t\in G}$, $\{y_t\}_{t\in G}$ を G 上の X-valued sp's とするとき，$\{y_t\}_{t\in G}$ が $\{x_t\}_{t\in G}$ に <u>$\mathcal{J}$-subordinate</u> であるとは，$[x_s, y_t]$ が st^{-1} だけに依存し，

$$\mathfrak{H}(\tilde{y}:\nabla) \subset \mathfrak{H}(\tilde{x}:\nabla), \ \forall \nabla\in\mathcal{J}$$

および $\mathfrak{H}(\tilde{y}) \subset \mathfrak{H}(\tilde{x})$ が成立することである。□

以上の準備の下で Wold decomposition は次のようになる。(c.f. [4, 6, 15])。

<u>4.5. Theorem.</u> $\{x_t\}_{t\in G}$ を G 上の X-valued sp，$\mathcal{J}$ を G の nonempty subsets の family で translation invariant であるとする。このとき $\{x_t\}_{t\in G}$ の一意な分解 $x_t = y_t + w_t$, $t\in G$ が存在して次を満たす：

(1) $\{y_t\}_{t\in G}$, $\{w_t\}_{t\in G}$ は G 上の X-valued sp's である。

(2) $[y_s, w_t] = 0$, $\forall s, t\in G$。

(3) $\{y_t\}_{t\in G}$, $\{w_t\}_{t\in G}$ は $\{x_t\}_{t\in G}$ に $\mathcal{J}$-subordinate である。

(4) $\{y_t\}_{t\in G}$ は $\mathcal{J}$-regular である。

(5) $\{w_t\}_{t\in G}$ は $\mathcal{J}$-singular である。

(Outline of the proof) $\mathfrak{H}(\tilde{x}:\mathcal{J}) = \bigcap_{\nabla\in\mathcal{J}} \mathfrak{H}(\tilde{x}:\nabla)$ とおくと，これは $\mathfrak{H}(\tilde{x})$ の Hilbert $B(H)$-submodule になっている。そこで P を $\mathfrak{H}(\tilde{x})$ から $\mathfrak{H}(\tilde{x}:\mathcal{J})$ の上への Gramian projection として

$$w_t = Px_t, \quad y_t = x_t - w_t, \quad t \in G$$

とおき，$\{y_t\}_{t\in G}$，$\{w_t\}_{t\in G}$ が (1)〜(5) を満たすことを確かめる。∎

4.6. Definition. $\{x_t\}_{t\in G}$ を G 上の X-valued sp，$F_{\tilde{x}}$ をその spectral distribution とする（c.f. Definition 4.3）。また $d\chi$ を $\hat{G}$ の Haar measure とする。

(1) $F_{\tilde{x}}$ が $d\chi$ に関して absolutely continuous（$F_{\tilde{x}} \ll d\chi$）であるとは，$\forall \phi, \psi \in H$ に対して

$$(F_{\tilde{x}}(\cdot)\phi, \psi) \ll d\chi$$

となることである。

(2) $F_{\tilde{x}}$ が $d\chi$ に関して singular（$F_{\tilde{x}} \perp d\chi$）であるとは，$\forall \phi, \psi \in H$ に対して

$$(F_{\tilde{x}}(\cdot)\phi, \psi) \perp d\chi$$

となることである。∎

4.7. Lemma. $\{x_t\}_{t\in G}$ を G 上の X-valued sp，$P(\cdot)$ を shift operators U_s $(s \in G)$ から導かれた $\hat{G}$ 上の spectral measure，$d\chi$ を $\hat{G}$ の Haar measure とする。また，

$$\mathfrak{M}_a = \{ y \in \mathfrak{H}(\tilde{x})\ ;\ (P(\cdot)y, y)_X \ll d\chi \}$$

$$\mathfrak{M}_s = \{ z \in \mathfrak{H}(\tilde{x})\ ;\ (P(\cdot)z, z)_X \perp d\chi \}$$

とおく。もし，$\hat{G}$ が σ-compact であれば，$\mathfrak{M}_a$，$\mathfrak{M}_s$ は $\mathfrak{H}(\tilde{x})$ の Hilbert $B(H)$-submodules になり，共に U_s-invariant

$(s \in G)$ で，$\mathfrak{H}(\tilde{x}) = \mathfrak{M}_a \oplus \mathfrak{M}_s$ が成立する。

(*Outline of the proof*) Halmos [2] によると，$\mathfrak{M}_a$, $\mathfrak{M}_s$ は Hilbert space $\mathfrak{H}(\tilde{x})$ の closed subspaces で $\mathfrak{H}(\tilde{x}) = \mathfrak{M}_a \oplus \mathfrak{M}_s$ を満足する。$P(\cdot)U_s = U_s P(\cdot)$, $s \in G$ であるから $\mathfrak{M}_a$, $\mathfrak{M}_s$ は U_s-invariant である。$\mathfrak{M}_a$, $\mathfrak{M}_s$ が left $B(H)$-modules になっていることも容易に確かめられる。∎

Cramér の decomposition は次のようになる (c.f. [1, 4, 6, 15])。

<u>4.8. Theorem.</u> $\{x_t\}_{t \in G}$ を G 上の X-valued sp, $F_{\tilde{x}}$ をその spectral distribution, $d\chi$ を $\hat{G}$ の Haar measure とする。もし，$\hat{G}$ が σ-compact であれば，$\{x_t\}_{t \in G}$ の一意な分解 $x_t = y_t + z_t$, $t \in G$ が存在して，次を満たす：

(1) $\{y_t\}_{t \in G}$, $\{z_t\}_{t \in G}$ は G 上の X-valued sp's である。

(2) $F_{\tilde{y}}$, $F_{\tilde{z}}$ をそれぞれ $\{y_t\}_{t \in G}$, $\{z_t\}_{t \in G}$ の spectral distributions とすると

$$F_{\tilde{x}} = F_{\tilde{y}} + F_{\tilde{z}}$$

$$F_{\tilde{y}} \ll d\chi, \quad F_{\tilde{z}} \perp d\chi$$

が成立する。

(Outline of the proof) $P(\cdot)$ を $\{x_t\}_{t\in G}$ に associate された $\hat{G}$ 上の spectral measure として, $\mathfrak{M}_a$, $\mathfrak{M}_s$ を Lemma 4.7 のように定義する。Q を $\mathfrak{H}(\mathfrak{X})$ から $\mathfrak{M}_a$ の上への Gramian projection とし,

$$y_t = Qx_t, \quad z_t = x_t - y_t, \quad t \in G$$

とおく。この $\{y_t\}_{t\in G}$, $\{z_t\}_{t\in G}$ が (1), (2) を満たすことを確かめればよい。

Acknowledgements. この稿を書くにあたり東京工大の梅垣壽春教授には, 多くの有益な助言をいただいたことを感謝いたします。

References.

[1] H. Cramér, On the theory of stationary rondom processes, Ann. Math. 41(1940), 215-230.

[2] P. R. Halmos, Introduction to Hilbert Space and the Theory of Spectral Multiplicity, Chelsea, New York, 1951.

[3] Y. Kakihara and T. Terasaki, Hilbert B(H)-modules with applications I, Res. Rep. Inst. Inf. Sci. Tech., Tokyo Denki Univ. 5 (1979), 23-32.

[4] Y. Kakihara, Hilbert B(H)-modules with applications II, in preparation.

[5] I. Kaplansky, Modules over operator algebras, Amer. J. Math. 75(1953), 839–853.

[6] G. Kallianpur and V. Mandrekar, Spectral theory of stationary $\mathcal{H}$-valued processes, J. Multivar. Anal. 1(1971), 1–16.

[7] A.N. Kolmogorov, Stationary sequences in Hilbert space, Bull. Math. Univ. Moscow 2(1941), 1–40.

[8] V. Mandrekar and H. Salehi, The square-integrability of operator-valued functions with respect to a non-negative operator-valued measure and the Kolmogorov isomorphism theorem, J. Math. Mech. 20(1970), 545–563.

[9] ______________________, Subordination of infinite-dimensional stationary stochastic processes, Ann. Inst. Henri Poincaré sec.B. 6(1970), 115–130.

[10] M. Ozawa, Hilbert B(H)-modules and stationary processes, to appear in Kōdai Math. J.

[11] W.L. Paschke, Inner product modules over B^*-

algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 182 (1973), 443-468.

[12] R. Payen, Fonctions aleatoiles du second ordre a valeurs dans un espace de Hilbert, Ann. Inst. Henri Poincaré sec. B. 3 (1967), 323–396.

[13] M. A. Rieffel, Induced representations of C*-algebras, Adv. Math. 13 (1974), 175–257.

[14] M. Rosenberg, Infinite-variate wide sense Markov processes and functional analysis for bounded operator-forming vectors, J. Multivar. Anal. 8 (1978), 295–316.

[15] H. Salehi and J. K. Scheidt, Interpolation of q-variate weakly stationary stochastic processes over a locally compact abelian group, J. Multivar. Anal. 2 (1972), 307–331.

[16] R. Schatten, Norm Ideals of Completely Continuous Operators, Springer, Berlin, 1960.

[17] T. Terasaki, Prediction theory of Hilbert space valued stationary processes over locally compact abelian groups, unpublished.

[18] H. Umegaki and A. T. Bharucha-Reid, Banach space-valued random variables and tensor products of

Banach spaces, J. Math. Anal. Appl. 31(1970), 49–67.

[19] N. Wiener and P. Masani, The prediction theory of multivariate stochastic processes, I, Acta Math. 98 (1957), 111–150.