数理解析研究所講究録
第 377 巻 1980 年 157-181

C^*-環上のHermite元について

桃谷高校　　加藤佳宣

本稿では単位元1を持つC^*-環$\mathcal{A}$上の(有界線形)作用素全体の成すBanach環$\mathcal{B}(\mathcal{A})$のHermite元について考察してみたい。単位元1を持つBanach環$\mathcal{B}$のHermite元xとはixが$\mathcal{B}$のautomorphism groupの無限小生成元となっているようなものである。Banach環のHermite元はspectral operatorとも関係して重要なものであり多くの研究が為されて来ている。本稿で扱う$\mathcal{B}(\mathcal{A})$は一見してC^*-環に比べnormの性質も余り素直なものではなく、また非常に構造の複雑な対象であることから研究するには大きすぎるように思われるが後述するA.M. Sinclair [31]の結果によりBanach環論ではC^*-環などとともに重要な実例の一つとなっている。また、最近では作用素論の方でもE. Størmer [34]などが可分Hilbert空間$\mathcal{H}$上の(有界線形)作用素全体$\mathcal{B}(\mathcal{H})$に対して$\mathcal{B}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$をFourier変換論の問題意識で論じ始めている。こうしたことから一般の$\mathcal{B}(\mathcal{A})$

のHermite 元を作用素論の方向から考察してみることは幾分かの興味を惹くのではないかと思われる。 なお本稿はpre-print 作成中の[20]の紹介であるが一部に[21]の内容を引用してある。

さてBanach環$\mathcal{B}$のHermite 元の定義は上記の形のままではかなり扱い難いので数域という概念を利用するのが普通である。 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$に対する数域は通常$W(x)=\{(x\xi,\xi)\,;\,\|\xi\|=1\}$で定義するがそれと類似に$\mathcal{B}\ni x$に対して$V(x)=\{f(x)\,;\,f$は$\mathcal{B}$上の汎函数で$f(1)=1=\|f\|\}$と定める。 すると$x$がHermite 元である必十条件は$V(x)$が実数であることが判る。 このことから自然に次の定義が導入される。

x : positive元 $\Longleftrightarrow$ $V(x)\geqq 0$

x : normal元 $\Longleftrightarrow$ y, z : Hermite 元かつ$yz=zy$ で$x=y+iz$となるものが存在

x : (Hermitian) projection $\Longleftrightarrow$ $x^2=x$: Hermite元

注意 (1) Banach環の数域の定義には他にG. Lumer [23]に依るものが有るが上述の定義に関して差異は現われない。

(2) $\mathcal{B}(\mathcal{H})$に於いては$V(x)$は$W(x)$の閉包にあたっている。

(3) 必ずしも単位元を持たないBanach環に対してもその数域を、単位元添加した環に於けるものとして定めることが出来るが、ここではそのような場合は扱わないことにする。

(4) 他に数域に関する基本的な性質については[2]を参照して頂きたい。

Sinclairの結果というのは$\mathcal{B}(\mathcal{A})$のHermite元の特徴づけに関するものである。それを説明する為に幾つかの記号を述べる。$\mathcal{A} \ni a$に対して左multiplier $L_a \in \mathcal{B}(\mathcal{A})$とは$L_a(x) = ax$で定められるものである。同様に右multiplier $R_a \in \mathcal{B}(\mathcal{A})$も定義出来る。$\mathcal{A}$上の微分$D(\in \mathcal{B}(\mathcal{A}))$とは$D(xy) = D(x)y + xD(y)$を恒等的に満たすものである。特に$D_a = L_a - R_a$と置くと$D_a$は微分である。このような形の微分をinnerであるという。微分Dが$D(x^*) = -D(x)^*$を満たせば$*$-微分ということにする。

注意　$*$微分の定義を$D(x^*) = D(x)^*$としている文献も有る。

さて、このときSinclairの結果は次のように述べられる。

定理S　$\mathcal{B}(\mathcal{A}) \ni T$: Hermite元 $\Longleftrightarrow$

或る$\mathcal{A}$上の$*$-微分DとHermite元$a \in \mathcal{A}$が存在して

$T = D + L_a$ となる

これは作用素論的にも興味深い結果のように思われる。またこの結果以来、$\mathcal{B}(\mathcal{A})$はかなり扱い易い実例としてBanach環論の文献によく現われて来るようである。しかしこの特徴づけのままでは取り扱いにやや難が有りpositive元などの形がはっきり掴めない。本稿では若干の修正を施すことで

もう少し扱い易い形に直し更に幾つかの応用を述べてみたい。

注意　[18]の文脈では微分は1次元coboundaryにあたっている。ここでのHermite元が"非可換幾何学"([12])的に何か実体の有るものであれば興味深い。

修正した形を述べる前に次のことを注意して置く必要が有る。$\mathcal{A}$上の(左・右)multiplierと微分は$\mathcal{A}$を稠密に含む任意のW*-環$\mathcal{A}^W$上へと自然に拡張される([30])。$\mathcal{A}^W$としては例えばenvelop von Neumann環を取ればよい。拡張した場合、spectrumの不変性の問題は残るが、大抵の場合同一視して扱うことが出来る。以下$\mathcal{A}^W$は一つ固定し、そのような同一視を特に断わらない限り行なうものとする。このとき、修正した形は次のようになる。$\mathcal{B}(\mathcal{A}) \ni T$に対して、

T：Hermite元 $\Longleftrightarrow$ 或るself-adjoint(Hermite)元h, k $\in \mathcal{A}^W$に対して$T = L_h + R_k$

T：normal元 $\Longleftrightarrow$ 或るnormal元m, $n \in \mathcal{A}^W$に対して $T = L_m + R_n$

T：positive元 $\Longleftrightarrow$ 或るpositive元a, $b \in \mathcal{A}^W$に対して $T = L_a + R_b$

T：projection元 $\Longleftrightarrow$ 或るprojection元p, $q \in \mathcal{A}^W$に対して$T = L_p + R_q$でかつそれぞれのcentral coverは直交する

まず初めに$\mathcal{B}(\mathcal{A})$のHermite元について考察してみたい。このときSinclairの特徴づけが我々の特徴づけを導くことはW^*-環上では微分がすべてinnerになる([30])ことから判る。

注意　上述の特徴づけに[27]と[32]の内容を併せて考えてみると興味深いように感じられる。

我々の特徴づけを使えば比較的見通しよく次の定理が得られる。

定理1　$\mathcal{B}(\mathcal{A})$のHermite元S，Tの積STがまたHermite元であればSとTは可換である

この定理は一般のBanach環については[26]に未解決と述べられている。　定理1の証明の梗概を以下に記す。　鍵となるのは"劈開補題"と名付ける次の補題である。

補題2(劈開補題)　W^*-環$\mathfrak{M}$に於いて$L_s D_t = 0$であれば或るcentral projection元$e \in \mathfrak{M}$が存在して$se = 0$かつ$(1-e)t$がcentral元となる.

略証　$\vee$を通常の束演算でのjoinとして$e_u = \vee\{v^* p_u v\ ;\ v \in \mathfrak{M}$はunitary$\}$, $e = \vee\{e_u ;\ u \in \mathfrak{M}$はunitary$\}$とすればよい。　p_uは$t - u^* t u$のsupport projectionである。

次の補題はKleinecke-Shirokovの定理([15])からすぐ判る。

補題3　$A = L_a + R_b$, $B = L_c + R_d$について、

$$AB = BA \iff ac = ca \text{ かつ } bd = db$$

ここで$A=L_a+R_b$, $B=L_c+R_d$, $AB=L_s+R_t$(a, b, c, d, s, t は self-adjoint)とする。

補題4　恒等的に$D_a(x)D_d(y)+D_c(x)D_b(y)=0$

略証　$D_s(x)=D_a(x)d+D_c(x)b$であるがD_c, D_a, D_cは微分であるから示せる。

補題5　$b=d=0$ならば$AB=BA$　(証略)

補題6　a, b, c, dのどれか一つでも0なら$AB=BA$

略証　例えば$b=0$とする。　補題4より$D_d(x)D_a(y)=0$となるから劈開補題が使えて命題は補題3と5の場合に帰着される。

補題7　$ac=ca$か$bd=db$であれば$AB=BA$である

略証　例えば$ac=ca$とすると補題4より$D_b(d)D_a(x)=0$であるから劈開補題により補題3と6の場合に戻る。

そこで定理1の証明は補題4から$D_b(d)D_a(x)=0$となるので劈開補題で補題7の場合へ帰着させれば済む。

次にnormal元について述べてみたい。　その前に次の集合を定義して置くと都合がよい。

$$\mathcal{B}(\mathcal{A})^J=\{L_x+R_y\in\mathcal{B}(\mathcal{A});\ x, y\in\mathcal{A}^W\}$$

すなわち$\mathcal{B}(\mathcal{A})^J$は$\mathcal{B}(\mathcal{A})$のHermite元全体により張られる部分空間であり、その元はCartesian分解を一意に許す。　そこで$T\in\mathcal{B}(\mathcal{A})^J$には自然に$T^*$にあたるものを定めることが出来

る([ ])。 すぐに$T=L_x+R_y$であれば$T^*=L_{x^*}+R_{y^*}$となっていることが判る。 この事実と補題3とを組み合わせれば前述のような$\mathcal{B}(\mathcal{A})$のnormal元の特徴づけが得られる。

注意 (1) $\mathcal{B}(\mathcal{A})$には$T^*(x)=T(x^*)^*$として$*$を導入することが出来る。 xがnormal元であるときをD_xをnormal微分と呼ぶことの正当化が[19]ではこの$*$を用いて成されている。 すなわち、D_x: normal微分である必十条件が$D_x^*D_x=D_xD_x^*$であるからだというのである。 しかしこの$*$に依れば$(L_x)^*=R_x$となり、すべてのL_xがnormal元のようになってしまうのでややまずいのではないかと思われる。 この用語の正当化は前述の$*$で行なった方が考え易いようである。 以下では$*$はこの意味に限定する。 (2) normal元の特徴づけからFuglede-Putnamの定理が$\mathcal{B}(\mathcal{A})$の見地より再定式化出来る。 これは通常intertwining性として理解されていたものである。 すなわち、$T\in\mathcal{B}(\mathcal{A})$がnormal元ならば$\ker T=\ker T^*$ 実はこの形の定理はL. A. Harrisに依り一般のBanach環に対して得られている([6])。 このことはBanach環の一般論をひとまず$\mathcal{B}(\mathcal{A})$で受け取めそれから$\mathcal{A}$自身の議論へと下げて行くことで新しい結果を大規模に得られるかもしれないという希望を抱かせる。

(3) [3]では線形力学系として、

$L[x](t)=x'(t)+a(t)x(t)$(xは可微分関数、aは区間上の

連続行列値関数)の形のものを取り扱い更にその随伴系L^*というものを、

$$L^*[x](t) = -x'(t) + a^*(t)x(t)$$

で定めている。　これに類似的に$\mathcal{B}(\mathcal{A})$の元Tを、

$$T(x) = D(x) + L_a(x) \quad (D\text{は微分で}D(x^*) = D(x)^*\text{を満たす})$$

と定め、その随伴を、

$$T^*(x) = -D(x) + R_{a^*}(x)$$

と置いてみる。　するとこのT^*は$\mathcal{B}(\mathcal{A})^J$で考えた$*$に一致する。　(4)　[28]も参照されたい。

そてC.R.DePrimaとB.K.Richard[9]は次のような定理を示している。

定理D　$\mathcal{A} \ni T$に対して　$T \geq 0$(すなわちpositive元)

$\Longleftrightarrow$任意の自然数nに対して$V(T^n)$の実部が非負

この定理の一般のBanach環への拡張が問題となるが、実は彼らはそれが$\mathcal{B}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$としてすらうまく行かないことを注意している。　しかしながら次のように考えてみれば彼らの結果は任意の$\mathcal{B}(\mathcal{A})$に対して一般化される。

定理8　$\mathcal{B}(\mathcal{A}) \ni T$に対してすべての自然数$n$について$T^n \in \mathcal{B}(\mathcal{A})^J$であると仮定するとき、$T^n \geq 0$

$\Longleftrightarrow$任意の自然数mについて$(T^m)^* + T^m \geq 0$

この証明の方針は劈開補題を前のように使って定理Dへと

帰着させるというものである。

注意 (1) $V(T)$の実部が非負であるときTは発展作用素と呼ばれている。 C^*-環の元Tが発展作用素であることは、$T^* + T \geq 0$と同値となる。 またBanach環$\mathcal{B}$に対して、$\mathcal{B} = \mathcal{B}^J$である必要条件は$\mathcal{B}$が$C^*$-環であることである([2])。 ついでながら$C^*$-環とはHermite 性とself-adjoint性が一致するような$*$-Banach環のことだと言ってもよい([23])。 (2) 定理8がより一般のBanach環に於いて成立するかどうかは不明である。 (3) これも余談ではあるが定理Dから次の命題が得られるので挙げて置く。

命題9 $\mathcal{A}$の元$a \geq 0$とxに対してもしすべての自然数nについて$a^n x + x a^n \geq 0$であれば$ax = xa$となる

$\mathcal{B}(\mathcal{A})$のnormal元の特徴づけはまた“病理的”な実例を得るのにも使える。 ここでは一例を挙げる。 M.J.Crabb [5] は或る特殊なBanach環を構成してその中にnormal元でありながら$\|T\|/r(T) = \sqrt{2}$となっているようなものが存在し得ることを示した。 但し$r(T)$はTのspectral半径である。 しかしながらこのような現象は次に示すように$\mathcal{B}(\mathcal{A})$にあってはむしろ通常であることが判る。

定理10 $\mathcal{A}$：可換 $\Longleftrightarrow$ $\|T\|/r(T) \geq \sqrt{2}$であるnormal元Tが$\mathcal{B}(\mathcal{A})$に存在しない

略証　$\mathcal{A}$が非可換であればKaplanskyの定理から$n^2=0$，$\|n\|=1$なる元が存在する。　このとき$n=a+ib$をCartesian分解として$T=L_a+R_{ib}$と置けばこれが求めるものである。　その検証には、

定理11　$\mathcal{B}(\mathcal{A})^J \ni L_x+R_y$に対して、

(1)　$\|L_x+R_y\|=\inf\{\|x+z\|+\|y-z\|;\ z$は$\mathcal{A}^w$のcentral元$\}$

(2)　$r(L_x+R_y)=\inf\{r(x,y,z);\ z$は$\mathcal{A}^w$のcentral元$\}$（但し、

$$r(x,y,z)=\sup\{|\lambda+\mu|;\ \lambda\in\sigma(x+z),\ \mu\in\sigma(y-z)\}）$$

を用いるとよい。　定理11の証明については以下に述べる**L. Zsidó**の手法を用いればよいので省略する。

注意　(1)　ここで病理性と呼んでいるものはC^*-環では現われない性質のことである。　(2)　$\mathcal{A}$が可換であっても$\mathcal{B}(\mathcal{A})$のnormal元に病理性は現われて来る。　例えば可換な$\mathcal{A}$で、$\mathcal{B}(\mathcal{A})$の元Uが$\|U\|=\|U^{-1}\|=1$となってもnormal元でないことが有り得る。

さて今度は$\mathcal{B}(\mathcal{A})$のpositive元を扱うことにする。　この特徴づけの為にL. Zsidó [37]に依り考案された手法を利用することにする。

注意　[17]の結果を使っても出来る。

まずΩを$\mathcal{A}^w$のcenterの極大ideal空間とし、各$t\in\Omega$に対して$[t]$はtを含むような$\mathcal{A}^w$の最小両側norm閉idealでν_tは$\mathcal{A}^w$

から $\mathfrak{M}_t = \mathcal{A}^W/[t]$ への自然写像とする。 このときどの $\mathfrak{M}_t$ も或るHilbert空間 $\mathcal{H}_t$ に於いて忠実は既約表現を有している([16])ので以後 $\mathfrak{M}_t$ を $\mathcal{B}(\mathcal{H}_t)$ の稠密な C^*-部分環と見做すことにする。

$A = L_m + R_n \in \mathcal{B}(\mathcal{A}^W)^J$ に対し $A_t \in \mathcal{B}(\mathcal{B}(\mathcal{H}_t))^J$ を $A_t = L_{\nu_t(m)} + R_{\nu_t(n)}$ として定める。 次の二定理を援用する。

定理B([2]) Banach環 $\mathcal{B}$ のnormal元 T に対して $V(T)$ は T のspectrumの凸包に等しい

定理R([29]) $T \in \mathcal{B}(\mathcal{A}^W)$ が $T\mathcal{A} \subset \mathcal{A}$ を満たし $\sigma_{\mathcal{A}^W}(T)$ (T の $\mathcal{B}(\mathcal{A}^W)$ でのspectrum)が平面を分離しないならば $\sigma_{\mathcal{A}^W}(T) = \sigma_{\mathcal{A}}(T)$ (T の $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ でのspectrum)である

補題12 $a \in \mathcal{A}^W$: positive元 $\Longleftrightarrow$ どの $t \in \Omega$ に対しても $\nu_t(a)$: positive元

略証 $\Longleftarrow$ のみ示す。 $a = a_+ - a_-$ をJordan分解とすれば $\nu_t(a) = \nu_t(a_+) - \nu_t(a_-)$ は $\nu_t(a)$ のJordan分解であるから $\nu_t(a_-) = 0$ が言える。 ここで $\|a_-\| = \sup\{\|\nu_t(a_-)\|; t \in \Omega\}$ であるから([37])、$a = a_+$ となる。

ところで、$\mathcal{B}(\mathcal{A})$ のHermite元、normal元がそれぞれ $\mathcal{B}(\mathcal{A}^W)$ の元と見做せることはそれらの特徴づけからすぐに判る。 また $\mathcal{B}(\mathcal{A})^J \subset \mathcal{B}(\mathcal{A}^W)^J$ と見做してもよい。 positive元については、

補題13 $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ のpositive元は $\mathcal{B}(\mathcal{A}^W)$ のpositive元と見做せる

そしてもしAがpositive元なら各tについてA_tはpositive元である

略証　前半は定理BとRに依る。後半は$V(A_t)\subset V(A)$に注意する。

補題14　Hermite元$A=L_h+R_k$に対して、$\sigma_{\mathfrak{M}_t}(A_t)$($\mathcal{B}(\mathfrak{M}_t)$でのspectrum)$=\sigma(\nu_t(h))+\sigma(\nu_t(k))$が成立する

略証　A_tがHermite元であるから定理Rに依り$\sigma_{\mathfrak{M}_t}(A_t)=\sigma_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_t)}(A_t)$であり、それは[33]に依り$\cap\{\sigma(\nu(h+z))+\sigma(\nu(k-z))$; $z\in\mathcal{B}(\mathcal{H}_t)$はcentral元$\}$であるから判る。

ここでpositive元の特徴づけが示せる。まずTがpositive元$a, b\in\mathcal{A}^W$に対し$T=L_a+R_b$と書ければTはHermite元であり定理Bにより$V(T)=\mathrm{co}\,\sigma_{\mathcal{A}^W}(T)\subset\mathrm{co}(\sigma(a)+\sigma(b))$である(但しcoは凸包)からpositive元であることが判る。逆にTがpositive元であれば確かに$T=L_h+R_k$となるような$h<0$と$k>0$が$\mathcal{A}^W$内に取れる。補題13に依り各tに対しT_tがpositive元となる。補題14から$\sigma(\nu_t(h))+\sigma(\nu_t(k))=\sigma_{\mathfrak{M}_t}(T_t)\geq 0$となることに注意する。そのとき補題12に依り$\nu_t(k)-\|\nu_t(h)\|\geq 0$が判る。そこで関数$z: t\longrightarrow\|\nu_t(h)\|$が連続である([14])から$z$を$\mathcal{A}^W$のcentral元と考え$a=h+z$, $b=k-z$と置けばよい。

系15　$T\in\mathcal{B}(\mathcal{A})$: positive元$\Longleftrightarrow$

どの$t \in \Omega$に対してもT_t: positive元

$\mathcal{B}(\mathcal{A})$のpositive元も一見素直な形に特徴づけられたがやはりかなりの病理性が有る。 例えば、

定理16 次は同値である

(i) $\mathcal{A}$は可換

(ii) 任意のpositive元$T \in \mathcal{B}(\mathcal{A})$に対して$T^2$がnormal元

(iii) 任意の可逆なpositive元$T \in \mathcal{B}(\mathcal{A})$に対して$T^{-1}$がnormal元

しかしながら他方で次のような性質を持っているので目下の処、どのような病理性が現われるのかを見通すことは難しい。

定理17 $\mathcal{B}(\mathcal{A}) \ni A, B$に対して$A \geq 0$かつ$B$がHermite元であり$AB + BA = 0$を満たせば$AB = 0$となる

証明は両定理とも劈開補題を使って単純な場合に漸次帰着させて行けばよい。

もしpositive元Aがroot(すなわち$B^2 = A$となるような$B \geq 0$)を持つときにはその性質はぐっと扱い易くなる。 実際、このときは劈開補題が有効に使えて次が得られる。

定理18 positive元$A \in \mathcal{B}(\mathcal{A})$がrootを持てばそれは一意的であり、或る$a, b \in \mathcal{A}^W$で$T = L_a + R_b$かつ$C(a)$($a$のsupport projectionのcentral cover)と$C(b)$とが直交するようなもの

が存在し、このときAのrootは$L_{a^{1/2}}+R_{b^{1/2}}$である

この定理から$\mathcal{B}(\mathcal{A})$のprojection元の特徴づけが容易に得られる。以下$\mathcal{B}(\mathcal{A})^P$を$\mathcal{B}(\mathcal{A})$のprojection元の全体とする。これは$\mathcal{A}$のprojection元全体$\mathcal{A}^P$に似た種々の性質を持っているがやはり意外な病理性も示す。

注意　$\mathcal{B}(\mathcal{A})^P$の構造に初めて注目したのは綿谷安男氏であると思われる。氏の(未発表の)結果は、$\mathcal{A}$がII_1-factorであれば$\mathcal{B}(\mathcal{A})^P=\{L_p, R_p\ ;\ p\in\mathcal{A}^P\}$となる、というものである。この結果は一般の$\mathcal{B}(\mathcal{A})^P$を考察する上で非常に示唆的であった。

$\mathcal{B}(\mathcal{A})^P$の病理性の一例は可換$C^*$-環$\mathcal{A}$に於いても挙げられる。

定理19　$C(\Omega)$をcompact Hausdorff空間Ω上の連続函数の成すC^*-環としたとき、Ωが一点集合でない限り$\mathcal{B}(C(\Omega))$の元Tで$T^2=T$, $\|T\|=1$でありながらnormal元でないようなものが存在する

略証　$\Omega\ni x_0$を取り、$f\in C(\Omega)$に対して$(T(f))(z)=f(x)$と定めればよい。

この定理の応用として$\mathcal{B}(\mathcal{A})$がC^*-環とはかなり異質な対象であることが示せる。Banach環がIR環([10])であるとは、それが或るHilbert空間$\mathcal{H}$に対し$\mathcal{B}(\mathcal{H})$にnormも込めて埋め込めるときである。

定理20　$\mathcal{B}(\mathcal{A})$がIR環であるのは$\mathcal{A}$が複素数体のときに限

る

略証　$\mathcal{B}(\mathcal{A})$が或る$\mathcal{B}(\mathcal{H})$に埋め込めたとすれば単位元も一致していると考えてよい。　すると$\mathcal{B}(\mathcal{A})$のHermite 元は、$\mathcal{B}(\mathcal{H})$でもそうであり従って定理16が使えて$\mathcal{A}$が可換と判る。　そこで$\mathcal{A}$の極大ideal空間をΩとすれば定理19に依りΩは一点集合となるから示せた。

しかしながら$\mathcal{B}(\mathcal{A})^P$では$\mathcal{A}^P$と同様にSz.-Nagy の定理が成立する。　すなわち、

定理21　$\mathcal{B}(\mathcal{A})^P \ni P,\ Q$　$\|P - Q\| < 1$　であれば或るHermite 元Sが存在して$S^2 = 1$かつ$P = SQS$

この証明の方針は次の補題を利用して$\mathcal{B}(\mathcal{A})$の話を$\mathcal{A}$での話に下げるというものであるが詳細は略す。

補題22　$\mathcal{A}^W$のprojection 元p，qが$\|L_p - R_q\| < 1$を満たせば$p = q$でありかつそれはcentral 元である

この補題の証明はZsidóの手法で出来るが、また次の"一意中心定理"と名付けた命題から導いてもよい([21])。

定理23　$\mathcal{A}^P \ni p$，qが、

(*)　$\|p - r\| < 1$なるすべての$r \in \mathcal{A}^P$に対して$\|q - r\| < 1$を満たすならば$p = q$となる

この定理は粗く言えば$\mathcal{A}^P$の形状が真に円いということを主張していると見做せる。　証明はやや面倒である。

注意 (1) Banach環が或るHilbert空間$\mathcal{H}$に対し$\mathcal{B}(\mathcal{H})$の部分Banach環として位相同型に埋め込めるときR環という。$\mathcal{A}$が有限次元であれば$\mathcal{B}(\mathcal{A})$はR環であるが逆が成立するかどうかは現在不明のままである。 (2) $\mathcal{A}$のunitary全体に、"一意中心定理"が成立することはすぐ判る。 しかし$\mathcal{A}$のpartial isometry全体の場合にはどうかは不明である。

次の定理は[22]での結果の$\mathcal{B}(\mathcal{A})$での類似であるが定理21の応用として得られる。

定理24 $\mathcal{B}(\mathcal{A})^P \ni P$に対して次は同値

(1) Pは$\mathcal{B}(\mathcal{A})^P$での孤立点 (2) Pは$\mathcal{B}(\mathcal{A})^J$でのcentral元

(3) Pは$\mathcal{A}$の或るcentral projection pに対して$P = L_p$

今度は$\mathcal{B}(\mathcal{A})^P$の順序的構造を考察してみたい。 この場合、自然に考えつく二つの順序の導入が有る。 すなわち、$P \geq Q$というのを$P - Q$がpositive元となるときと定義するか、それとも$PQ = Q$または$QP = Q$として定義するかということである。 ここで$PQ = Q \Longleftrightarrow QP = Q$であることは定理1の帰結である。 幸いなことに、

定理25 $\mathcal{B}(\mathcal{A})^P \ni P, Q$に対し次は同値

(1) $P - Q \geq 0$ (2) $PQ = Q$

(3) $Q^{\perp} - P^{\perp} \geq 0$ (但し$P^{\perp} = 1 - P$)

これには次の二つの補題を用いればよい。

補題26　$\mathcal{A}^P \ni p$，q に対して

$$p-q \geq 0 \Longleftrightarrow L_p - L_q \quad 0 \Longleftrightarrow R_p - R_q \geq 0$$ (証略)

補題27　$\mathcal{A}^P \ni p$，q に対して

$L_p - R_q \geq 0 \Longleftrightarrow R_p - L_q \geq 0 \Longleftrightarrow L_p R_q = R_q \Longleftrightarrow$ $R_p L_q = L_q \Longleftrightarrow$ 或る central 元 $z \in \mathcal{A}^W$ に対して $p - z \geq 0$ かつ $z - q \geq 0 \Longleftrightarrow$ 或る central projection 元 $e \in \mathcal{A}^W$ に対して $p - e \geq 0$ かつ $e - q \geq 0$　(証略)

さて $\mathcal{B}(\mathcal{A})^P$ に順序が素直に入って来るとすれば、それでは果たして $\mathcal{B}(\mathcal{A})^P$ がこの順序に対し束を成すかということが考えられる。　これは実は一般にはうまく行かないことが以下のようにして言える。　写像 $\mu : \mathcal{B}(\mathcal{A})^P \longrightarrow \mathcal{A}^P$ を $\mu(P) = P1$ として定めれば μ は順序を保存し onto である。　従って $\mathcal{B}(\mathcal{A})^P$ が束を成せば $\mathcal{A}^P$ も束となる。　そこで問題は $\mathcal{A}^P$ が束を成さないような C^*-環 $\mathcal{A}$ の例を見つけ出せばよい。　非常に奇妙な盲点と思われるのであるが現在迄に調べた限りでは束論の文献中にはこのように基本的な C^*-環の実例は紹介されていないようである。　昨年の四月に S. S. Holland は前田周一郎先生宛の私信で、$*$-環 R でその projection 元全体が束とならないものの実例を尋ねて来ている。　但し R での projection 元 p とは $p^* = p = p^2$ を満たすものであり、projection 元 p，q に対する順序 $p \geq q$ は $pq = q$ で定めるものである。　これを今後

"Holland問題"として引用して行くことにする。 この問題はC*-環での実例を示すことで完全に解決出来る。 その実例の一つはCalkin環([21])であることが判った。 Calkin環 $A(\mathcal{H})$は可分Hilbert空間$\mathcal{H}$に対して$\mathcal{B}(\mathcal{H})$のそのcompact idealに依る剰余環である([11])。

定理28 $A(\mathcal{H})^P$ は束を成さない

略証 $A(\mathcal{H})^P \ni p$, qに対してその上限をrとする。 p, qの双方に可換なunitary uに対して $r=(u^*pu)\vee(u^*qu) = u^*ru$ であることから[36]での可分C*-部分環に対するbicommutant定理が使えてまず次の補題が言える。

補題29 $A(\mathcal{H})^P$ が束を成すと仮定し$A(\mathcal{H})$の二つのC*-部分環$\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$でprojection元p, qを共に含むものとするときこのp, qの$\mathcal{A}$での上限と$\mathcal{B}$での上限は一致する

今、$\mathcal{M}_2$を2×2行列環とし$\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$を

$\mathcal{A}=\{f$：閉区間$[0, 1]$から$\mathcal{M}_2$への連続函数$\}$

$\mathcal{B}=\{f$：$[0, 1]$から$\mathcal{M}_2$への可測函数$\}$

と定め、更に、$a(t) = \begin{pmatrix} \cos^2 t & \sin t \cos t \\ \sin t \cos t & \sin^2 t \end{pmatrix}$, $p(t) = a(0)$

$$q(t) = \begin{cases} a(0) & t \in [0, \frac{1}{2}] \text{ のとき} \\ a(\pi(t-\frac{1}{2})) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \text{ のとき} \end{cases}$$

と置けば、明らかに$\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$でありそして$\mathcal{A}$内と$\mathcal{B}$内で$p$と$q$の上限は異なる。 そこで$\mathcal{B}$を或る可分Hilbert空

間$\mathcal{H}$に対して$\mathcal{B}(\mathcal{H})$に埋め込み、その$\mathcal{B}(\mathcal{H})$を写像j：$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ $\longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{H})$：$x \longrightarrow x\otimes 1$（$\otimes$はtensor積）でまた埋め込み、自然写像$\nu$：$\mathcal{B}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}) \longrightarrow A(\mathcal{H}\otimes\mathcal{H})$に対し$\nu\circ j$を考えてみるとこれは1－1となるから結局$\mathcal{B}$が$A(\mathcal{H})$の或る$C^*$－部分環に同型と判る。　従って補題29に反する。

この証明は束にならない機構がもうひとつピンと来ない憾みが有る。　またCalkin環は非可分的なので可分C^*－環での束にならない実例の有無も問題になる筈である。　これに答える為に次のようなC^*－環を考える。　$\mathbb{N}$を自然数全体とし

$\mathcal{D}=\{f ; f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{M}_2$ かつ $\lim_{n\to\infty} f(n)$が存在する$\}$と置く。

定理30　$\mathcal{D}^P$は束を成さない

略証　p, $q\in\mathcal{D}^P$ をそれぞれ、$p(n)=a(0)$,

$$q(n)=\begin{cases} a(0) & n\text{が奇数のとき} \\ a(\frac{1}{n}) & n\text{が偶数のとき} \end{cases}$$

と置いてみれば$p\vee q$の存在しないことはすぐ判る。

注意　(1)　Cuntz 環([7])とChoi環([4])は重要なC^*－環の例であるが、これらのprojection元全体が束を成すかどうかは現在知られていないようである。　(2)　$\mathcal{A}^P$が束を成すときには$\mathcal{B}(\mathcal{A})^P$も束を成しているかどうかは目下不明である。

しかしながら$\mathcal{A}$がW^*－環であれば$\mathcal{A}^P$は非常に性質のよい束になることが知られている。　この場合は$\mathcal{B}(\mathcal{A})^P$が束となるこ

とが期待される。 このことを説明する為に束論での幾つかの用語を準備する。 まず、束が完備であるとはその任意の部分集合に上限と下限が存在することである。 束の最小元を0，最大元を1と書くことにする。 0と1を持つ束の元xに対してx'が補元であるとは$x \vee x' = 1$かつ$x \wedge x' = 0$を満たしていることである。 xが補元を持ちしかも次の恒等式、$a \vee (b \wedge x) = (a \vee b) \wedge (a \vee x)$，$a \wedge (b \vee x) = (a \wedge b) \vee (a \wedge x)$，$x \vee (a \wedge b) = (x \vee a) \wedge (x \wedge b)$，$x \wedge (a \vee b) = (x \wedge a) \vee (x \wedge b)$をすべて満たせばcentral 元という。 束$\mathcal{L}$のcentral元全体を$\mathcal{L}^c$と書くことにする。 $\mathcal{L}^c$も束となる。 $\mathcal{L}$と$\mathcal{L}^c$が完備束であってしかも$\{z_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset \mathcal{L}^c$に対し恒等的に$(\bigvee_{\lambda\in\Lambda} z_\lambda) \wedge a = \bigvee_{\lambda\in\Lambda} (z_\lambda \wedge a)$が成立すれば$\mathcal{L}$をZ－束という。 束$\mathcal{L}$が次のような$\mathcal{L}$上の写像⊥を持つとき(⊥に関する)orthomodular束であると呼ばれる。 (1) $a^\perp$はaの(一つの)補元 (2) $a \geq b$ならば $b^\perp \geq a^\perp$ (3) $a^{\perp\perp} = a$ (4) $a \geq b$ならば$a = b \vee (a \wedge b^\perp)$

完備なorthomodular束はZ－束である。 そして次もよく知られている。

定理M W^*-環$\mathfrak{M}$ に対して⊥を$p^\perp = 1 - p$で定めれば、$\mathfrak{M}^p$ は完備orthomodularとなる

注意 これらについての詳細は[25]を参照して頂きたい。

そして実は次が成立する。

定理31　W^*-環$\mathcal{M}$に対して$\mathcal{B}(\mathcal{M})^P$は($\perp$に関して)完備orthomodular束を成す

orthomodular束は束論で重要なものであるが定理31は(調べた限りでは)その新しい実例を与えている。　この束$\mathcal{B}(\mathcal{M})^P$は$\mathcal{M}^P$の束構造と密接な関連を持っているが、その事情は束論の枠内で抽象的に扱ったほうがはっきりする。　しかもそのような取り扱いはZ-束(そしてorthomodular束)の新しい構成法ともなっている。　そこで今、$\mathcal{L}$をZ-束とする。　このとき$\mathcal{L}\ni x$に対して　$e(x)=\bigwedge\{z\in\mathcal{L}^c;\, z\geq x\}$, $h(x)=\bigvee\{z\in\mathcal{L}^c;\, x\geq z\}$が定まる。　$\mathcal{L}^\#$の元$(a,\ b)$とは$\mathcal{L}$の元の順序対で或るcentral元zに対し$z\geq a$かつ$z'\geq b$となるようなものとする。　このzを劈開子と呼ぶことにする。　明らかに$e(a)$と$e(b)'$は劈開子となる。　或るcentral元zに対して$a\geq z\geq b$となるとき$a\rhd b$と略記する。　すると$\mathcal{L}^\#$の二元$(a_1,\ b_1)$, $(a_2,\ b_2)$に対して次のように擬順序を定めることが出来る。

$(a_1,\ b_1)\gtrsim(a_2,\ b_2)$

$\Longleftrightarrow$それぞれの劈開子z_1, z_2が存在して、$a_1\wedge z_2\geq a_2\wedge z_1$, $a_1\wedge z_2'\rhd b_2\wedge z_1$, $b_1\wedge z_2\rhd a_2\wedge z_1'$, $b_1\wedge z_2'\geq b_2\wedge z_1'$を満たす

実はこの定義は劈開子の選び方に依らない。　そして$\gtrsim$により導入される同値関係で$\mathcal{L}^\#$を類別することが出来る。　そ

れを$\mathcal{L}^{\S}$と記す。　$\mathcal{L}^{\S}$は自然に順序集合となる。

$$a \vee_L b = a \wedge e(b)' \qquad a \vee_R b = (b \wedge e(a)')\vee(e(a)\wedge e(b))$$

$$a \wedge_L b = a \wedge k(b) \qquad a \wedge_R b = b \wedge k(a) \wedge k(b)'$$

と定義する。　$\{(a_\lambda, b_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$を劈開子$\{z_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$を持つような一つの族とする。　そして更に、$z_\Gamma = (\bigwedge_{\lambda\in\Gamma} z_\lambda)\wedge(\bigwedge_{\lambda\notin\Gamma} z'_\lambda)$　$(\bigwedge_{\phi} z_\lambda = 1)$,

$$a_\Gamma^{\vee L} = (\bigvee_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda)\wedge z_\Gamma \qquad b_\Gamma^{\vee R} = (\bigvee_{\lambda\in\Lambda} b_\lambda)\wedge z_\Gamma$$

$$a_\Gamma^{\wedge L} = (\bigwedge_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda)\wedge z_\Gamma \qquad b_\Gamma^{\wedge R} = (\bigvee_{\lambda\in\Lambda} b_\lambda)\wedge z_\Gamma$$

$$a \vee^L b = \bigvee_{\Gamma\subset\Lambda}(a_\Gamma^{\vee L} \vee_L b_\Gamma^{\vee R}) \qquad a \vee^R b = \bigvee_{\Gamma\subset\Lambda}(a_\Gamma^{\vee L} \vee_R b_\Gamma^{\vee R})$$

$$a \wedge^L b = \bigvee_{\Gamma\subset\Lambda}(a_\Gamma^{\wedge L} \wedge_L b_\Gamma^{\wedge R}) \qquad a \wedge^R b = \bigvee_{\Gamma\subset\Lambda}(a_\Gamma^{\wedge L} \wedge_R b_\Gamma^{\wedge R})$$

とする。　このとき、$[(a\vee^L b,\ a\vee^R b)]$と$[(a\wedge^L b,\ a\wedge^R b)]$は、それぞれ$\{[(a_\lambda, b_\lambda)]\}_{\lambda\in\Lambda}$（[　]は$\mathcal{L}^{\S}$での同値類を表す）の上限と下限になっていることが判る。　そして$\mathcal{L}^{\S}$はZ－束となることも示せる。　こうしてZ－束の新しい構成法が得られた。

$\mathcal{L}$が更に完備orthomodular束としたときは$\mathcal{L}^{\S}\ni[(a, b)]$に対し

$[(a, b)]^\perp = [(a^\perp\wedge e(a),\ b^\perp\wedge e(a)^\perp)]$として⊥を定めることにより$\mathcal{L}^{\S}$をorthomodular束にすることが出来る。　こうして、

定理32　W^*－環$\mathfrak{M}$に対し束$\mathcal{B}(\mathfrak{M})^P$と$(\mathfrak{M}^P)^{\S}$は同型である

注意　(1)　$\mathcal{L}$から$\mathcal{L}^{\S}$への写像η_L, η_Rをそれぞれ$x \longrightarrow [(x, 0)]$, $[(0, x)]$で定める。　ここでもし$\mathcal{L}$から束$\mathcal{V}$への二つの束準同型写像f_L, f_Rが$\mathcal{L}^C$上で一致したなら$\mathcal{L}^{\S}$から$\mathcal{V}$への或る束準同型写像gが存在して$f_L = g\circ\eta_L$かつ$f_R = g\circ\eta_R$となる。

この意味で$\mathcal{L}^{\S}$は$\mathcal{L}$とそれ自身のtensor積([13])のようなものと見做せる。 (2) orthomodular束のhorizontal sumとは各束の0同士及び1同士を併せ、他は手つかずのままにして作る束をいう([24])。 完備orthomodular束$\mathcal{L}$に対してもし$\mathcal{L}^{c}=\{0, 1\}$であれば$\mathcal{L}^{\S}$は$\mathcal{L}$とそれ自身のhorizontal sumに同型となる。またLがBoole束であれば$\mathcal{L}^{\S}$は$\mathcal{L}$自身に同型である。

以上が現在迄の$\mathcal{B}(\mathcal{A})$のHermite元についての研究の概略である。 本稿の内容は基本的に筆者の

第14回関数解析研究会講演集録(1979／7／5-7), 大阪教育大学(於なにわ会館), 5－20.

での記事の発展したものであることをお断わりして置く。その記事中に気づいたミスをこの紙上を借りて訂正させて頂きたい。 一つは定理7(iii)でのT^2がT^{-1}である。 15頁の9行目の$\mathcal{B}(\mathcal{A})^P$は$\mathcal{A}^P$である。 それとこれは中本律男先生から御指摘の通り定理6の後半は必ずしも自明でないようである。(この御指摘に対し感謝致します。)

なお、$\mathcal{B}(\mathcal{A})$について今後の問題は色々と考えられるが、その一つとして劈開補題の改良を挙げて置きたい。 この補題を例えば次の問題に適用するのは難しいように思われる。

$$\mathcal{B}(\mathcal{A})^J \ni A, B \quad A^2 = B^2 \geq 0 \Longrightarrow A = B\ ?$$

最後になりましたが、この講演・報告の機会を与えて下さったことに対し斎藤偵四郎先生に深く感謝致します。

References

1. J.Anderson and C.Foiaş, Pacific J. Math., 61(1975), 315-325.

2. F.F.Bonsall and C.Duncan, Numerical Ranges of Operators on Normed Spaces and of Elements of Normed Algebras, Cambridge Univ. Press, 1971.

3. J.A.Burns, Lecture Notes on Generalized Inverses of Linear Operators in Normed Linear Spaces, Brown University, 1974.

4. M.-D. Choi, A simple C*-algebra generated by two finite-order unitaries, preprint.

5. M.J.Crabb, J. London Math. Soc., 2(1970), 741-745.

6. M.J.Crabb and P.G.Spain, Glasgow Math. J., 18(1977), 197-198.

7. J.Cuntz, Commun. math. Phys., 57(1977), 173-185.

8. C.Davis, Acta Sci. Math. Szeged, 19(1958), 172-187.

9. C.R.DePrima and B.K.Richard, Ind. Univ. Math. J., 23 (1973), 163-172.

10. P.G.Dixon, Proc. Edinburgh Math. Soc., 20(1976/7), 215-217.

11. R.G.Douglas, Banach Algebra Techniques in Operator Theory, Academic Press, New York and London,1972.

12. E.G.Effros, Aspects of non-commutative geometry, Preprint.

13. G.A.Fraser, Proc. Edinburgh Math. Soc., 20(1976/7), 121-131; 355-360.

14. J.G.Glimm, Ann. of Math., 72(1960), 216-244.

15. P.R.Halmos, A Hilbert Space Problem Book, Van Nostrand, Princeton, 1967.

16. H.Halpern, Trans. Amer. Math. Soc., 140(1969), 195-221.

17. H.Halpern, Math. Scand., 42(1978), 135-149.

18. B.E.Johnson, Mem. Amer. Math. Soc., 127(1972).

19. B.E.Johnson and J.P.Williams, Pacific J. Math., 58(1975), 105-122.

20. Y.Kato, Some structures of the Banach algebras over C*-algebras, 作成中

21. Y.Kato, Some theorems on projections of C*-algebras, 作成中

22. Y.Kato, Math. Japon., 21(1976), 367-370.

23. G.Lumer, Trans. Amer. Math. Soc., 100(1961), 29-43.

24. M.D.MacLaren, Trans. Amer. Math. Soc., 114(1965), 401-416.

25. F.Maeda and S.Maeda, Theory of Symmetric Lattices, Springer-Verlag, New York and Berlin, 1970.

26. I.S.Murphy, J. London Math. Soc., 6(1973), 427-428.

27. T.Okayasu, 関数解析学とその応用, アブストラクト集, (1978), 17-19.

28. A.L.T.Paterson and A.M.Sinclair, J. London Math. Soc., 6 (1972), 755-761.

29. C.E.Rickart, General Theory of Banach Algebras, Van Nostrand, Princeton, N. J., 1960.

30. S.Sakai, C*-Algebras and W*-Algebras, Springer-Verlag, New York and Berlin, 1971.

31. A.M.Sinclair, Proc. Amer. Math. Soc., 24(1970), 209-214.

32. A.M.Sinclair, Proc. London Math. Soc., 24(1972), 681-691.

33. M.K.Smith, Michigan Math. J., 23(1976), 151-153.

34. E.Størmer, Regular abelian Banach algebras of linear maps of operator algebras, preprint.

35. B.Sz.-Nagy, Comm. Math. Helv., 19(1946/7), 347-366.

36. D.Voiculescu, Rev. Roum. Math. Pures Appl., 21(1976), 97-113.

37. L.Zsidó, Proc. Amer. Math. soc., 38(1973), 147-150.