数理解析研究所講究録
第378巻 1980年 35-46

CM体のℓ拡大における cyclotomic invariants

山形大 理　木田 祐司

ℓは固定された奇素数とする。

§ $\mathbb{Q}(\zeta_{\ell^{n+1}})$ を円のℓ^{n+1}分体とし，下図のように体を定める。

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
 & \mathbb{Q}(\zeta_{\ell^{n+1}}) \arrow[d] & \\
\mathbb{Q}(\zeta_\ell) \arrow[ur] \arrow[d] & \mathbb{B}_n \arrow[r] & \cdots \bigcup_{n=0}^{\infty}\mathbb{B}_n=\mathbb{B}_\infty \\
\mathbb{Q} \arrow[ur] \arrow[ur, bend right, "\ell^n\text{次cyclic}"'] & &
\end{tikzcd}$$

任意の有限次代数体Kについて $K\cdot\mathbb{B}_\infty/K$ を cyclotomic $\mathbb{Z}_\ell$-拡大という。K_n をK上ℓ^n次cyclicな中間体とし $K\cdot\mathbb{B}_\infty = K$ とおく。

今，$h(K_n)$ でK_nの類数をあらわせば $\ell^{e_n} \,\|\, h(K_n)$ で定まる整数e_nについて次の式が成立する。

$$e_n = \lambda_\ell(K)\cdot n + \mu_\ell(K)\cdot \ell^n + \nu_\ell(K) \qquad \forall n \gg 0$$

ここに $\lambda_\ell(K), \mu_\ell(K), \nu_\ell(K)$ は n に無関係な整数である。

一方，K_n の ℓ-class group を $A(K_n)$ とすると

$X = \varprojlim A(K_n)$ は abel 群としては，大体

$$\mathbb{Z}_\ell^{\lambda_\ell(K)} \oplus (\ \ell^{\mu_\ell(K)}\text{次 abel 群の可算無限積}\ )$$

に同型になる。

代数函数体の類似から $\mu_\ell(K) = 0$ が予想され（これは K が Q 上 abelian ならば［1］で肯定的に解かれた）また $\lambda_\ell(K)$ は genus に対応する量と考えられる。この辺は［5］に詳しい。

ここで K を CM 体（すなわち総実代数体の2次拡大となっている総虚代数体）とすると，以上のものすべての minus part（e_n^-, $\lambda_\ell^-(K)$, $\mu_\ell^-(K)$, $\nu_\ell^-(K)$, $A^-(K_n)$, X^-）が考えられる。すると $\mu_\ell^-(K) = 0$ ならば

$\Lambda 1.$ $\quad \lambda_\ell^-(K) = e_{n+1}^- - e_n^- \quad \forall n \gg 0$

が，すぐに出る，更に少し議論を要するが

$\Lambda 2.$ $\quad \lambda_\ell^-(K) = d^{(\ell)} A^-(K_n) \quad \forall n \gg 0$

が出る。$d^{(\ell)}$ は ℓ-rank を示す。

この2方向から $\lambda_\ell^-(K)$ を追って次の公式を得る。

<u>定理</u>　L，F は共に CM 体で，L/F は有限 ℓ 拡大（すなわち有限次 Galois 拡大で次数が ℓ の巾）とする。更に $\mu_\ell^-(F) = 0$ とすると $\mu_\ell^-(L) = 0$ であり，かつ

$$\lambda_\ell(L) - \delta = [L_\infty : F_\infty](\lambda_\ell(F) - \delta) + \sum_{\mathfrak{p} \nmid \ell}(e_{\mathfrak{p}} - 1) - \sum_{\mathfrak{p}_+ \nmid \ell}(e_{\mathfrak{p}_+} - 1)$$

ただし $\delta = \begin{cases} 1 & \text{if } F \ni \zeta_\ell \\ 0 & \text{if } F \not\ni \zeta_\ell \end{cases}$

であり，$e_{\mathfrak{p}}$, $e_{\mathfrak{p}_+}$ は L_∞, $L_{\infty,+}$ （L, L_+ ではない）の素ideal $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}_+$ のそれぞれ L_∞ / F_∞, $L_{\infty,+} / F_{\infty,+}$ における分岐指数を示す。

注　特に $F \ni \zeta_\ell$ の時は L_∞ / F_∞ で分岐する（すなわち $e_{\mathfrak{p}} \neq 1$）$\mathfrak{p}(\nmid \ell)$ は $L_\infty / L_{\infty,+}$ で分解するから上式は

$$\begin{aligned} \lambda_\ell(L) - 1 &= [L_\infty : F_\infty](\lambda_\ell(F) - \delta) + \sum_{\mathfrak{p}_+ \nmid \ell}(e_{\mathfrak{p}_+} - 1) \\ &= [L_\infty : F_\infty](\lambda_\ell(F) - \delta) + \frac{1}{2}\sum_{\mathfrak{p} \nmid \ell}(e_{\mathfrak{p}} - 1) \end{aligned}$$

となって Riemann - Hurwitz の公式の類似を与える。

注　この公式は ℓ-拡大でないと必ずしも成立しない。たとえば $\ell = 3$ として 5次 cyclic 拡大 $\mathbb{Q}(\zeta_3, \zeta_{11} + \zeta_{11}^{-1}) / \mathbb{Q}(\zeta_3)$ を考えると，公式をそのまま適用すれば，

$\lambda_3(\mathbb{Q}(\zeta_3, \zeta_{11}+\zeta_{11}^{-1})) = -4 < 0$ となって矛盾する。これは1つの素数lについてだけ考えているのだから、ある意味では当然である。体を固定して、lを動かした時のλ_l達（boundedであるだろうか？）の集合を考え、そこから何か新しい量、概念を導き出す必要があるのかもしれない。もっとも cyclotomic $\hat{\mathbb{Z}}$ 拡大の理論などというものが作られれば、それは自然に出て来るのだろうが、そんな理論は今のところ糸口すら見出されていない。

§ 有限l拡大はl次cyclic拡大のつみ重ねであるから、まずCM体のl次cyclic拡大について調べる。

K, F 共にCM体で K/F はl次cyclicとする。

Fのideal $\mathfrak{a}$について$\mathfrak{a}$を含むFのideal類を、$\mathfrak{a}$を含むKのideal類に対応させれば $C(F)$ から $C(K)$ への自然な準同型が得られる（一般論は[4]などを参照のこと）。これより（定義域制限）

$$\varphi^-: A^-(F) \longrightarrow A^-(K)$$

が作られる。

<u>命題1</u>　$F \ni \zeta_{l^\nu}$, $\not\ni \zeta_{l^{\nu+1}}$ としてνを定めるとき、次のどれかが成立すれば、φ^-はinjectiveとなる。

1) $\nu = 0$。

2) $\nu \geqq 1$ で $K = F(\zeta_{\ell^{\nu+1}})$ 。

3) K/F で ℓ を割らない素 ideal が分岐する 。

注　実際に φ^- が non-injective な事があるのかどうかは筆者は知らない 。

次に特異類について調べる 。

$A(K)^G \overset{\text{def}}{=} \{ a \in A(K) \mid a^\sigma = a \quad \text{for } \forall \sigma \in G = Gal(K/F) \}$

とすると $\forall \sigma \in G$ と 複素共役は可換ゆえ

$$A(K)^G = A^+(K)^G \oplus A^-(K)^G$$

と分解される 。 ここで $A^+(K)^G \simeq A(K_+)^{G^+}$, $G^+ = Gal(K_+/F_+)$ だから特異類数の公式 ([8]) を用いて $A(K)^G$, $A^+(K)^G$ の位数を求め比をとれば

命題2　$|A^-(K)^G| = |A^-(F)| \cdot \ell^{t - t_+ - \delta}$

ここに , t , t_+ は K/F , K_+/F_+ で分岐する素 ideal の数で $\ell^\delta = [W(F) : W(F) \cap N_{K/F} K^\times]$ ($W(F)$ は F に含まれる 1 の巾根全体の群) 。 更に ν を命題 1 のと同じものとすると

1) $\nu = 0 \Rightarrow \delta = 0$ 。

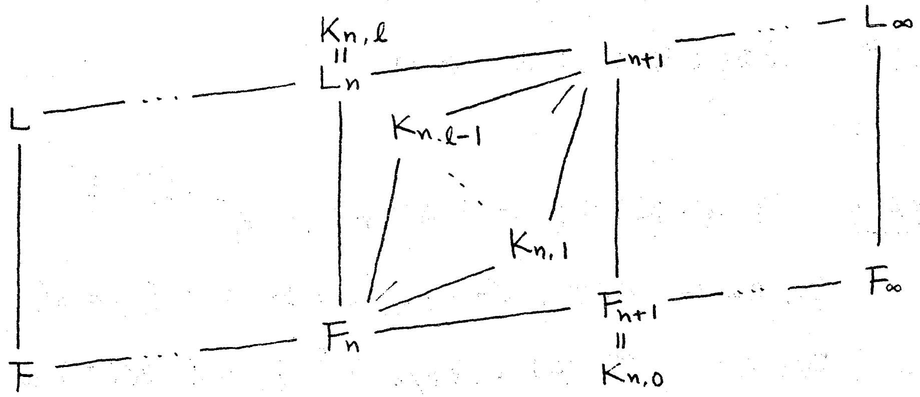
2) $\nu \geqq 1$ で $K = F(\zeta_{\ell^{\nu+1}}) \Rightarrow \delta = 0$ 。

3) $\nu \geqq 1$ で F の素 ideal で ℓ を割らず，K/F で分岐し $F(\zeta_{\ell^{\nu+1}})/F$ で分解しないものがある $\Rightarrow$ $\delta = 1$。

更に，この3つの場合 $A^{-}(K)^{G}$ の元はすべて特異 ideal を含む。

以上の2つの命題ともに類体論の簡単な応用なので証明は略する。

§ L/F が ℓ 次 cyclic の場合に定理の証明をするが，L_∞/F_∞ も ℓ 次 cyclic として示せば十分である。この時，中間体の状況は次の通りで，すべて CM 体である。



さて $\mu_\ell^{-}(F) = 0$ から $\mu_\ell^{-}(L) = 0$ を示す事は命題2を用いて [6] と同様の議論によりなされる。そこで以下では $\mu_\ell^{-}(F) = \mu_\ell^{-}(L) = 0$ とする。

まず、次の仮定をおく。

（仮定A）　ℓ を割らない素 ideal が L/F（従って L_n/F_n $\forall n \geqq 0$）で分岐している。

すると命題1より $A^-(F_n)$, $A^-(K_{n,i})$ をすべて $A^-(L_{n+1})$ の中で考えられる。又、命題2より $n \gg 0$ ならば、特異類は特異 ideal を含むので議論が簡単になって、次の命題を得る。この証明が最大の難関であるが、長いので略する。

<u>命題3</u>　$G_i = \mathrm{Gal}(K_{n,i}/F_n)$ とおくと、$i \neq 0$ ならば

$$d^{(\ell)}A^-(K_{n,i})^{G_i} = d^{(\ell)}A^-(F_n) + s_\infty - s_{\infty,+} - \delta \quad \forall n \gg 0$$

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{if } F \ni \zeta_\ell \\ 0 & \text{if } F \not\ni \zeta_\ell \end{cases}$$

s_∞, $s_{\infty,+}$ は L_∞/F_∞, $L_{\infty,+}/F_{\infty,+}$ で分岐する $L_\infty, L_{\infty,+}$ の素 ideal で ℓ を割らないものの個数。

ここで、特に $i=\ell$ の場合つまり L_n/F_n の特異類を考えれば　$d^{(\ell)}A^-(L_n) \leqq (\ell-1)\, d^{(\ell)}A^-(L_n)^{G_\ell} + d^{(\ell)}A^-(F_n)$ $\forall n \geqq 0$

ゆえ　$d^{(\ell)}A^-(L_n) \leqq \ell \cdot d^{(\ell)}A^-(F_n) + (\ell-1)(s_\infty - s_{\infty,+} - \delta)$ $\forall n \gg 0$

よって　$\lambda_\ell^-(L) \leqq \ell \cdot \lambda_\ell^-(F) + (\ell-1)(s_\infty - s_{\infty,+} - \delta)$

が出る。

以上はすべて代数的な議論だけで済んだが，逆向きの不等式を出すためには，解析的類数公式による次の補題が必要となる。これを避ける事が望ましい。

<u>補題</u> $h'(L_{n+1})/h'(F_n) = \prod_{i=0}^{l}\{h'(K_{n,i})/h'(F_n)\}$

$^\forall n \geqq 0$，ただし $h'(K) = h^-(K)/Q(K)$，$Q(K)$ は K の unit index。

整数 $e^-(K)$ を $l^{e^-(K)} \| h^-(K)$ で定めると，補題より，

$$e^-(L_{n+1}) - e^-(F_n) = \sum_{i=0}^{l}\{e^-(K_{n,i}) - e^-(F_n)\}$$

よって，$n \gg 0$ なら

$$\lambda_l^-(L) = \lambda_l^-(F) + \sum_{i=1}^{l-1}\{e^-(K_{n,i}) - e^-(F_n)\}$$

ゆえ，右辺才2項を下から評価する。

$A^-(F_n)$ が $A^-(K_{n,i})$ の中に自然に injective に入っているので，norm map N_i は $A^-(K_{n,i})$ から $A^-(F_n)$ への準同型と見ても，$A^-(K_{n,i})$ の自己準同型と見ても同じである。N_i は $A^-(K_{n,i})^{G_i}$ の元には l 乗する事と同じに作用する。よって $\mathrm{Ker}\, N_i \supset {}_lA^-(K_{n,i})^{G_i}$

すなわち $|\mathrm{Ker}\, N_i| \geqq l^{d^{(l)}A^-(K_{n,i})^{G_i}}$。又，類体論より $\mathrm{Im}\, N_i = A^-(F_n)$ であるから，これを一般な関係式 $|A^-(K_{n,i})| = |\mathrm{Im}\, N_i|\,|\mathrm{Ker}\, N_i|$ に代入すれば

$$e^-(K_{n,i}) - e^-(F_n) \geqq d^{(\ell)}A^-(K_{n,i})^{G_i} = \lambda_\ell^-(F) + s_\infty - s_{\infty,+} - \delta$$

$\forall n \gg 0$ が出る。　よって

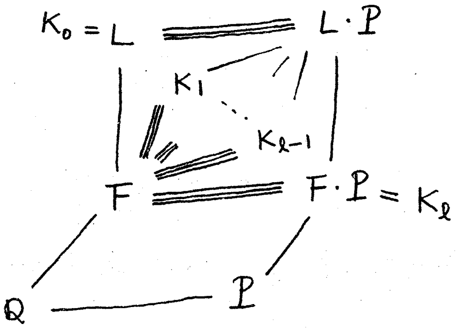
$$\lambda_\ell^-(L) \geqq \lambda_\ell^-(F) + (\ell-1)(\lambda_\ell^-(F) + s_\infty - s_{\infty,+} - \delta)$$

従って，仮定（A）のもと

$$\lambda_\ell^-(L) - \delta = \ell(\lambda_\ell^-(F) - \delta) + (\ell-1)(s_\infty - s_{\infty,+})$$

を得る。　これは定理に他ならぬ。

仮定（A）の成立しない場合，すなわち L/F が ℓ の外で不分岐の場合は，次のような補助の体 $\mathcal{P}$ を用いる。　体 $\mathcal{P}$ を $p \equiv 1 \pmod{\ell}$，$p \nmid d(F)$ なる素数 p についての $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ の $\mathbb{Q}$ 上 ℓ 次の中間体とする。



上図中，三重線の拡大では仮定（A）が成立しているから s_∞, $s_{\infty,+}$ を K_ℓ/F について定めれば $K_1, K_2, \cdots, K_{\ell-1}/F$ については同じ値，$L\cdot\mathcal{P}/L$ については $\ell \cdot s_\infty$, $\ell \cdot s_{\infty,+}$ となる。よって　$i = 1, 2, \cdots, \ell$ について，

$$\lambda_\ell^-(K_i) - \delta = \ell(\lambda_\ell^-(F) - \delta) + (\ell-1)(s_\infty - s_{\infty,+})$$

$$\lambda_\ell^-(L\cdot\mathcal{P}) - \delta = \ell(\lambda_\ell^-(L) - \delta) + (\ell-1)(\ell s_\infty - \ell s_{\infty,+}) \text{ .}$$

前の補題は任意の abelian (ℓ,ℓ) 拡大について成立する公式なので

$$\lambda_\ell^-(L\cdot\mathfrak{P}) - \lambda_\ell^-(F) = \sum_{i=0}^{\ell}\{\lambda_\ell^-(K_i) - \lambda_\ell^-(F)\}$$

が成立する。以上3式より $\lambda_\ell^-(L\cdot\mathfrak{P})$, $\lambda_\ell^-(K_i)$ $(i \neq 0)$ を消去すれば $\lambda_\ell^-(L) - \delta = \ell(\lambda_\ell^-(F) - \delta)$

となって，この時も定理は正しい。

§　一般の場合の証明は有限 ℓ 拡大は ℓ 次 cyclic 拡大のつみ重ねであるから induction で出来る。ただし ℓ を割らない素 ideal は L_∞/F_∞ で相対次数は変わらない事を注意しておく。

§　公式の別の解釈。公式は λ_ℓ のみの式であるが，それだけでかなり意味があるという事が次の2つの理由から言える。1つは λ_ℓ^+ が常に0（すなわち任意の総実代数体について λ_ℓ が0）と予想されている事。もう1つは [3] 等で述べているように

K を CM 体で ζ_ℓ を含むものとする。

X を K_∞ の最大不分岐 abel ℓ 拡大の Galois 群，

Y_+ を $K_{\infty,+}$ の ℓ の外で不分岐な最大 abel ℓ 拡大の Galois 群とすると

$$X^- \simeq Y_+ \quad (\text{abel群として})$$

（X^- の定義は[3]のそれとは異なるが同型である事はすぐわかる）となる。だから $\zeta_\ell + \zeta_\ell^{-1}$ を含む総実代数体の拡大の話だとも言える。

例　$\ell = 3$，$F = \mathbb{Q}(\zeta_3)$，L_+：ℓ を割らない素 ideal が分岐している $\mathbb{Q}$ 上3次 cyclic な体，$L = F \cdot L_+$ とおく。

$\lambda_3^-(F) = 0$ だから定理より $\lambda_3^-(L) = 2(s_{\infty,+} - 1)$

ただし $s_{\infty,+}$ は $L_{\infty,+}/F_{\infty,+}$ で分岐する $F_{\infty,+}$ の素 ideal の数。

しからば　$Y_+ \simeq \mathbb{Z}_3^{2(s_{\infty,+}-1)}$　を得る。

参考文献

[0] Kida, Y.: ℓ-Extensions of CM-fields and Cyclotomic Invariants, to appear in J. Number Theory.

[1] Ferrero, B., Washington, L.: The Iwasawa invariant μ_p vanishes for abelian number fields. Ann. of Math. 109, 377~395 (1979).

[2] Gold, R.: The nontriviality of certain $\mathbb{Z}_\ell$-extensions. J. Number Theory 6, 369~373 (1974).

[3] Greenberg, R.: On p-adic L functions and cyclotomic fields II. Nagoya Math. J. 67, 139~158 (1977).

[4] Iwasawa, K. : A note on the group of units of algebraic number field. J. Math. pure appl. 35, 189〜192 (1956).

[5] 岩沢健吉 : 代数体と函数体のある類似について。数学 第15巻 65〜67 (1963)。

[6] Iwasawa, K. : On the μ-invariants of Z_ℓ-extensions. In : Number Theory, Algebraic Geometry and Commutative Algebra, in honor of Y. Akizuki, pp 1〜11. Tokyo, Kinokuniya 1973.

[7] Iwasawa, K. : On Z_ℓ-extensions of algebraic number fields. Ann. of Math. 98, 246〜326 (1973).

[8] Yokoi, H. : On the class number of a relatively cyclic number field. Nagoya Math. J. 29, 31〜44 (1967).

※ この研究にあたっては 昭和54年度科学研究費補助金(奨励研究(A))を受けた。