数理解析研究所講究録
第 380 巻 1980 年 16-31

Le Cam による一定理の証明について

広島大 総合科学部 間瀬茂

このノートの目的は Le Cam 流の決定理論の基礎を成すある定理の詳しい証明(別証明でもなければ簡単な証明でもない)を与えることにある。これらの結果は Le Cam の有名な論文「Sufficiency and Approximate Sufficiency」, Ann. Math. Statist., 35 (1964), に始めて紹介され, 又 Le Cam によるレクチャーノート「Notes on Asymptotic Methods in Statistical Decision Theory」Publications CRM-25, Université de Montréal, の第一章の内容にあたる。

これらの結果の意味を簡単に述べれば次の様になる。自然数に対し四則演算を自由に行う為に有理数が考えだされ, 更に極限操作が自由に行う為に実数が考えだされたことは周知のことであるが, 統計学に於ける統計量の概念も理論的展開の必要に応じて, 又, s^2 のような極く自然な統計量から始まり, 単なる可測関数, 更に randomized statistics (Markov kernel）にまで拡大されてきたことは良く知られた通りである。しかしながら randomized statistics も極限操作の観点からみると決して最終的なものとみなせない。つまり $T_\alpha(x, dy)$ を Markov kernel の（有向）列とし表現

$$\gamma T_\alpha \mu = \iint \gamma(y) T_\alpha(x, dy) \mu(dx)$$

を考える。もし $\forall(\gamma, \mu)$ に対し $\lim_\alpha \gamma T_\alpha \mu = \gamma T \mu$ が存在しても $\gamma T \mu$ が Markov kernel による積分表現をもつとは限らない。LeCam はこの種の極限操作が自由に行なえる為には randomized statistics より更に一般的な transition というものを考える必要があることを示した。

次に transition とは何かを簡単に説明しよう。$(\mathcal{X}, \mathcal{A})$, $(\mathcal{Y}, \mathcal{B})$ を二つの可測空間，$\mathcal{M}(\mathcal{X}, \mathcal{A})$, $\mathcal{M}(\mathcal{Y}, \mathcal{B})$ を対応する finite signed measure の空間とする。任意の Markov kernel $T(x, dy)$ は変換

$$T: \mu(dx) \longmapsto T\mu(dy) = \int_{\mathcal{X}} T(x, dy) \mu(dx)$$

を定義し性質

A1. T は線型，

A2. $\mu \geqq 0$ なら $T\mu \geqq 0$，

A3. $\mu \geqq 0$ なら $\|T\mu\| = \|\mu\|$（$\|\mu\|$ は total variation），

を持つ。そこで逆に $\mathcal{M}(\mathcal{X}, \mathcal{A}) \to \mathcal{M}(\mathcal{Y}, \mathcal{B})$ への変換 T で上の性質 A1, A2, A3 を持つもののことを transition と呼ぶことに

する。

このtransitionの定義は極めて単純であると同時にあきらかに $\mathfrak{M}(\mathcal{X},\mathcal{O})$, $\mathfrak{M}(\mathcal{Y},\mathcal{L})$ の構造の特殊な部分にのみ関ることが了解されると思う。実際transitionはBanach lattice 间の正のoperatorの特別なものとして把握され，その限りに於て測度論的側面（更に極端に $\mathcal{X},\mathcal{Y}$ 等をも）をひとまず無視しても多くの事実が導きうる。又，このことを逆手に取り統計学の理論的基礎を測度論でなくより解数解析的なもので置きかえることも不可能でない。これはLe Camが実際系統的に遂行しているプログラムである。

これまで述べたことから生ずる疑問として，transitionはなるほどMarkov kernel（の生成する変換）の一般化ではあるが，randomized statisticsが（こじつけめくにせよ）一応実際的意味づけが可能であるのに反し，transitionが一見余りにも抽象的存在でしかないように見える点であろう。以下で証明するLe Camの定理はこの天下りに定義されたtransitionが実は通常のrandomized statisticsで任意に近似可能であることを主張している。つまりtransitionの全体はrandomized statisticsの全体を含み自然な極限操作について閉じている最少のものであることがわかる。要するに比喩的に言えば

整数：有理数：実数＝可測関数：Markov kernel：transition。

これよりくだんの定理を述べその証明を与えるが，証明は self-contained とは程遠いが必要な事実は逐一出典を挙げることにする。これは Le Cam の original proof 中の議論を忠実にたどったものになっている（はずである）。$(\mathcal{X},\mathcal{A})$, $(\mathcal{Y},\mathcal{B})$ を二つの可測空間，$\mathcal{M}(\mathcal{X},\mathcal{A})$, $\mathcal{M}(\mathcal{Y},\mathcal{B})$ を対応する有界測度の空間に total variation norm を考えた Banach space, $\mathcal{F}(\mathcal{X},\mathcal{A})$, $\mathcal{F}(\mathcal{Y},\mathcal{B})$ を有界可測関数の空間に sup norm を考えた Banach space とする。$\mathcal{M}(\mathcal{X},\mathcal{A})$, $\mathcal{M}(\mathcal{Y},\mathcal{B})$ が次の性質をもつことは良く知られている。

B1. Banach lattice である，

B2. $\mu,\nu \geq 0$ なら $\|\mu+\nu\|=\|\mu\|+\|\nu\|$,

つまり抽象L空間の構造をもつ。$\mathcal{F}(\mathcal{X},\mathcal{A})$, $\mathcal{F}(\mathcal{Y},\mathcal{B})$ は性質B1に加え性質

B3, $f,g \geq 0$ なら $\|f+g\|=\max\{\|f\|,\|g\|\}$

をもつ，つまり抽象M空間である。

$\mathcal{F}(\mathcal{X},\mathcal{A})$ の双対空間は $(\mathcal{X},\mathcal{A})$ 上の有界変動な有限加法的測度のつくる空間と同一視される。[1] つまり $\forall\varphi\in\mathcal{F}^*(\mathcal{X},\mathcal{A})$ に対し $(\mathcal{X},\mathcal{A})$ 上の有界変動な有限加法的測度 Φ があり，$\forall f\in\mathcal{F}(\mathcal{X},\mathcal{A})$ で

$$\langle\varphi,f\rangle=\int_{\mathcal{X}} f(x)\,d\Phi(x) \quad \text{(Radon積分)}$$

φ の双対ノルム＝Φ の全変動 $\int_{\mathcal{X}} d|\Phi|(x)$。

とくに Φ が σ加法的なら上の積分は通常の積分であり，従って $\mathcal{M}(\mathcal{X},\mathcal{A})$ は $\mathcal{F}^*(\mathcal{X},\mathcal{A})$ の部分空間と自然に同一視可能。

又抽象M空間の双対空間は抽象L空間であることから[2] $\mathcal{S}^*(\mathfrak{X},\mathfrak{A})$ は抽象L空間であり $\mathfrak{M}(\mathfrak{X},\mathfrak{A})$ はその部分抽象L空間。

通常の統計学の範ちゅうから見れば興味あるのは $\mathfrak{M}(\mathfrak{X},\mathfrak{A})$ から $\mathfrak{M}(\mathfrak{Y},\mathfrak{B})$ への変換であるが，今述べたことから値域を有界有限加法的測度の空間 $\mathcal{S}^*(\mathfrak{Y},\mathfrak{B})$ に一般化して良いことがわかる。そこで $\mathfrak{M}(\mathfrak{X},\mathfrak{A})$ から $\mathcal{S}^*(\mathfrak{Y},\mathfrak{B})$ への（又特に $\mathfrak{M}(\mathfrak{Y},\mathfrak{B})$ への）transition を既述の性質A1,A2,A3をもつ変換のこととする。

$\mathfrak{M}(\mathfrak{X},\mathfrak{A})$ の双対空間（抽象M空間）は単位元 I をもつ，i.e. $\langle\mu, I\rangle = \|\mu\vee 0\| - \|(-\mu)\vee 0\| = \int d\mu$, 要するに I は $\mathfrak{X}$ 上の関数1。
H が $\mathfrak{M}^*(\mathfrak{X},\mathfrak{A})$ の linear sublattice とは，線型部分空間で $\beta\in H$ なら $|\beta|\in H$ となるもののこと。

定理（Le Cam） H を $\mathfrak{M}^*(\mathfrak{X},\mathfrak{A})$ の linear sublattice で単位元 I を含み，更に H の単位球 $\{\beta\in H;\ |\beta|\le I\}$ は $\mathfrak{M}^*(\mathfrak{X},\mathfrak{A})$ の単位球 $\{u\in\mathfrak{M}^*(\mathfrak{X},\mathfrak{A}):\ |u|\le I\}$ 中弱位相で密とする。$\mathcal{B}$ を $\mathfrak{M}(\mathfrak{X},\mathfrak{A})$ から $\mathcal{S}^*(\mathfrak{Y},\mathfrak{B})$ への transition の全体，$\mathcal{B}_0$ を $T\in\mathcal{B}$ で次の形にかけるものの全体とする；

$\exists\{y_1,\cdots,y_\ell\}\subset\mathfrak{Y}$, $\exists\{\beta_1,\cdots,\beta_\ell\}\subset H$ such that

$\beta_j\geq 0$, $\beta_1+\cdots+\beta_\ell = I$ があり

(1) $$\gamma T\mu = \langle\gamma, T\mu\rangle = \sum_{j=1}^{\ell}\gamma(y_j)\langle\beta_j,\mu\rangle$$

for $\forall\gamma\in\mathcal{S}(\mathfrak{Y},\mathfrak{B})$, $\forall\mu\in\mathfrak{M}(\mathfrak{X},\mathfrak{A})$。

Kを$\mathcal{F}(\mathfrak{Y},\mathfrak{B})\times\mathfrak{M}(\mathfrak{X},\mathfrak{O})$の部分集合で，$A\times B$，$A\subset\mathcal{F}(\mathfrak{Y},\mathfrak{B})$，$B\subset\mathfrak{M}(\mathfrak{X},\mathfrak{O})$，A, Bはそれぞれ弱化位相でcompactで少くとも一方はnorm-compact，の形のrectangleの有限個のunionの全体とする。$\mathcal{B}_0$は$\mathcal{B}$中K上の一様収束位相に関し密である。

注1。以下簡単の為$L=\mathfrak{M}(\mathfrak{X},\mathfrak{O})$，$M=L^*$，$\Gamma=\mathcal{F}(\mathfrak{Y},\mathfrak{B})$と書くことにする。実は以下の証明は，Lが抽象L空間，Γがuniform lattice, i.e. 或る集合D上の有界関数のつくる或る線型空間で通常の関数のsup, infに関しlattice，関数1を含みsup normに関し完備なもの，という事実のみを用いて証明される。

注2。$M=\mathfrak{M}^*(\mathfrak{X},\mathfrak{O})$は$\mathcal{F}(\mathfrak{X},\mathfrak{O})$を含むが一般に一致しない。従って(1)中の$\beta_j$は$\mathfrak{X}$上の関数とは限らない。もし$\{\beta_1,\cdots,\beta_\ell\}\subset\mathcal{F}(\mathfrak{X},\mathfrak{O})$なら(1)のtransition TはMarkov kernel

(2) $$T(x,dy)=\sum_{j=1}^{\ell}\beta_j(x)\delta_{y_j}(dy),$$
δ_{y_j}は点y_j上のDirac measure

により定義されている。もし定理中のHが$\mathcal{F}(\mathfrak{X},\mathfrak{O})$の部分集合に取れるなら，結局$\mathcal{B}_0$は(2)の形のMarkov kernelから成ると言える。所が一寸したtrickで常にHとして$\mathcal{F}(\mathfrak{X},\mathfrak{O})$自身を取って良いことがわかる。$T\in\mathcal{B}$とする。先に述べたように$\mathfrak{M}(\mathfrak{X},\mathfrak{O})$は$\mathcal{F}^*(\mathfrak{X},\mathfrak{O})$の部分抽象L空間であるが，更に$\mathcal{F}^*(\mathfrak{X},\mathfrak{O})$のband[3]であることがわかる。よって$\forall\mu\in\mathcal{F}^*(\mathfrak{X},\mathfrak{O})$

は $\exists \mu_1 \in \mathcal{M}(\mathfrak{X}, \mathfrak{A})$ と $\exists \mu_2 \in \mathcal{L}^*(\mathfrak{X},\mathfrak{A})$ such that $|\mu_2| \wedge |\nu| = 0$ for $\forall \nu \in \mathcal{M}(\mathfrak{X},\mathfrak{A})$ の和に一意に分解される[(4)]。$\nu \in \mathcal{L}^*(\mathfrak{Y}, \mathfrak{B})$ such that $\nu \geq 0$, $\int d\nu = 1$ を任意に一つ固定し, $\mathcal{L}^*(\mathfrak{X},\mathfrak{A})$ から $\mathcal{L}^*(\mathfrak{Y},\mathfrak{B})$ への transition T' を

$$T'\mu = T\mu_1 + \left(\int d\mu_2\right)\nu$$

で定義する。T' が transition であること, T' の $\mathcal{M}(\mathfrak{X},\mathfrak{A})$ への制限が T であることは容易にわかる。つまり transition の定義域を $\mathcal{L}^*(\mathfrak{X},\mathfrak{A})$ に広げても一般性を失わない。他方ノルム空間 E の単位球 $\{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ は $\sigma(E^{**}, E^*)$ 位相（E^{**} の弱位相）に関し E^{**} の単位球中密[(5)]。E として $\mathcal{L}(\mathfrak{X},\mathfrak{A})$ を考えることにより, $H = \mathcal{L}(\mathfrak{X},\mathfrak{A})$ が定理の仮定をみたすことがわかる。更に $H = \mathcal{L}(\mathfrak{X},\mathfrak{A})$ が $\mathcal{L}^{**}(\mathfrak{X},\mathfrak{A})$ の linear sublattice であることもわかる[(6)]。

以下四つの補題を準備した後定理の証明に入る。

補題1。集合 Ω 上の uniform lattice Γ, Γ の norm-compact 集合 A, $\varepsilon > 0$ に対し有限集合 $\{g_j; 1 \le j \le \ell\} \subset \Gamma$, $g_j \ge 0$, $\sum_{j=1}^{\ell} g_j = \Gamma$ の単位元 $\mathbb{1}$, $\{\omega_j; 1\le j\le \ell\} \subset \Omega$ があり, $\forall \gamma \in A$ で

$$\left\|\gamma - \sum_{j=1}^{\ell} \gamma(\omega_j) g_j\right\| \le \varepsilon.$$

証明。A の compact 性から $\exists \{\gamma_i; 1\le i\le n\} \subset A$ があり $\forall \gamma \in A$ に対し $\exists \gamma_i$ で $\|\gamma - \gamma_i\| \le \varepsilon$ とできる。$k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ に対し

$$\gamma_{i,k} = 2(\gamma\wedge(k+1)\varepsilon J) - \gamma\wedge k\varepsilon J - \gamma\wedge(k+2)\varepsilon J$$

とおく。$\gamma_{i,k} \geq 0, \in \Gamma$ であり $\varepsilon J = \sum_k \gamma_{i,k}$。又 $\{y: \gamma_{i,k}(y) > 0\}$ $= \{y: k\varepsilon < \gamma < (k+2)\varepsilon\}$ より γ_i の $\mathrm{Supp}\,\gamma_{i,k}$ 上の oscillation は $\leq 2\varepsilon$。∃有限集合 $F \subset \mathbb{Z}$ があり $k \notin F$ なら $\gamma_{i,k} \equiv 0$ である。

$$\varepsilon J = \sum_{k\in F}\gamma_{1,k} = \cdots = \sum_{k\in F}\gamma_{n,k}$$

に分解の補題(7)を適用, $\exists\{\xi_a;\ a=(a_1,\cdots,a_n)\in F^n\} \subset \Gamma$ such that

$$\xi_a \geq 0,\quad J = \sum_a \xi_a,\quad \gamma_{i,k} = \sum\{\xi_a : a_i = k\} \text{ for } \forall(i,k)$$

とできる。$\xi_a \leq \gamma_{i,a_i}$ より各 γ_i の $\mathrm{Supp}\,\xi_a$ 上の oscillation は $\leq 2\varepsilon$。y_a を $\mathrm{Supp}\,\xi_a$ から一つ固定（空集合なら任意）。以上から $\forall\gamma\in A$ に対し $\|\gamma-\gamma_i\| \leq \varepsilon$ とすると

$$\begin{aligned}
&|\gamma(y) - \textstyle\sum_a \gamma(y_a)\xi_a(y)| \\
&\leq |\gamma(y)-\gamma_i(y)| + |\gamma_i(y) - \textstyle\sum_a \gamma_i(y_a)\xi_a(y)| + |\textstyle\sum_a[\gamma(y_a)-\gamma_i(y_a)]\xi_a(y)| \\
&\leq \|\gamma-\gamma_i\| + |\textstyle\sum_a \gamma_i(y)\xi_a(y) - \sum_a \gamma_i(y_a)\xi_a(y)| + \|\gamma-\gamma_i\| \textstyle\sum_a \xi_a(y) \\
&\leq 4\varepsilon。
\end{aligned}$$

つまり $\|\gamma - \sum_a \gamma(y_a)\xi_a\| \leq 4\varepsilon$。証明了。

補題2。L を抽象L空間, $M = L^*$, I を M の単位元とする。H は M の linear sublattice, U, U_0 は各々 M, H の単位球とする。各 $\mu \in L$ に対し $W_\mu = \{\nu \in L: |\nu| \leq |\mu|\}$ と書く。$\{\alpha_j: 1 \leq j \leq l\}$ は M の元で $\alpha_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^{l}\alpha_j = I$, $\varepsilon > 0$, μ は L の元で ≥ 0, 又 U_0 の弱位相での閉包は U とする。この時 $\exists\{\beta_j: 1 \leq j \leq l+1\}$

such that $\beta_j \geqq 0$, $\sum_{j=1}^{l+1} \beta_j = I$ があり

$$\sup_{\nu\in W_\mu} |\langle \alpha_j - \beta_j, \nu\rangle| \leqq \varepsilon,\quad 1\leqq j\leqq l$$

$$\sup_{\nu\in W_\mu}|\langle \beta_{l+1}, \nu\rangle| \leqq \varepsilon.$$

証明。一般性を失うことなく或る compact Hausdorff 空間 K があり $M=\mathcal{C}(K)$ (K 上の実数値連続関数のつくる空間に sup norm を考えたもの), $L=\{\mu\in\mathcal{C}^*(K);\ \mu(A)=0$ for $^\forall$meager $A\subset K\}$ と仮定して良い(8)。I は K 上の関数 1 で $\|\alpha_j\|\leqq 1$ に注意。

仮定から凸集合 U_0 は弱位相で閉包 U を持つ。故に U_0 の Mackey 位相 $\tau(M,L)$ に関する閉包も U となる(9)。又 L の区間 W_μ は弱化位相 $\sigma(L,M)$ で compact, circled & convex(10)。故に $^\exists$net $\{\gamma_{j,n}\}\subset H$ で $\|\gamma_{j,n}\|\leqq 1$ かつ

$$\sup_{\nu\in W_\mu}\left|\int(\alpha_j-\gamma_{j,n})\,d\nu\right| \xrightarrow{n} 0 .$$

$\|\alpha_j-\gamma_{j,n}\|\leqq 2$ より $\nu\equiv\frac{1}{2}(\alpha_j-\gamma_{j,n})\mu\in W_\mu$ に注意して, 特に

$$\int|\alpha_j-\gamma_{j,n}|^2\,d\mu \longrightarrow 0.$$

結局 $^\exists$sequence $\{\gamma_{j,n}\}\subset H$ で $\|\gamma_{j,n}\|\leqq 1$ かつ $^\exists\varepsilon_n\to 0$ で

$$|\alpha_j-\gamma_{j,n}|^2\equiv\int|\alpha_j-\gamma_{j,n}|^2\,d\mu\leqq\varepsilon_n .$$

$\alpha_j\geqq 0$ より $|\alpha_j-\gamma_{j,n}\vee 0|\leqq|\alpha_j-\gamma_{j,n}|$ 又 $\gamma_{j,n}\vee 0\in H$, 故に $\gamma_{j,n}\geqq 0$ と仮定して一般性を失わない。$\delta>0$ を固定, $B_n^\delta=\{x\in K;\ 1+\delta<\sum_1^l\gamma_{j,n}(x)\}$ とおく。

$$|I-\textstyle\sum_1^l\gamma_{j,n}|=|\sum_1^l\alpha_j-\sum_1^l\gamma_{j,n}|\leqq\sum_1^l|\alpha_j-\gamma_{j,n}|\leqq l\varepsilon_n\to 0$$

より $\sum_1^\ell \gamma_{j\cdot n} \to 1$ in μ-measure で従って $\mu(B_n^\delta) \to 0$。

$$\gamma_{1\cdot n}' = \gamma_{1\cdot n} \wedge (1+\delta)I,$$

$$\gamma_{2\cdot n}' = \gamma_{2\cdot n} \wedge [(1+\delta)I - \gamma_{1\cdot n}'],$$

- - - - - - - - - - - - - -

$$\gamma_{\ell\cdot n}' = \gamma_{\ell\cdot n} \wedge [(1+\delta)I - \textstyle\sum_1^{\ell-1} \gamma_{j\cdot n}'],$$

$$\gamma_{\ell+1\cdot n}' = (1+\delta)I - \textstyle\sum_1^\ell \gamma_{j\cdot n}'$$ とおく。

構成から明らかに $\gamma_{j\cdot n}' \in H, \geqq 0$ で $\sum_1^{\ell+1} \gamma_{j\cdot n}' = (1+\delta)I$, 又 $\gamma_{j\cdot n}' \leqq \gamma_{j\cdot n}$。

一方 $B_{j\cdot n}^\delta \equiv \{x \in K;\ \gamma_{j\cdot n}' \neq \gamma_{j\cdot n}\} = \{x : (1+\delta) - \sum_1^{j-1} \gamma_{k\cdot n}' < \gamma_{j\cdot n}\} \subset B_n^\delta$。

最後に $\beta_{j\cdot n} = (1+\delta)^{-1} \gamma_{j\cdot n}'$ とおくと, $\beta_{j\cdot n} \in H, \geqq 0$, $\sum_1^{\ell+1} \beta_{j\cdot n} = I$。

又,
$$\| \alpha_j - \beta_{j\cdot n} \| \leqq \| \alpha_j - \gamma_{j\cdot n} \| + \| \gamma_{j\cdot n} - (1+\delta)^{-1} \gamma_{j\cdot n}' \|,$$

$$\| \gamma_{j\cdot n} - (1+\delta)^{-1} \gamma_{j\cdot n}' \|^2 = \int | \gamma_{j\cdot n} - (1+\delta)^{-1} \gamma_{j\cdot n}' |^2 d\mu$$
$$\leqq \int_{(B_{j\cdot n}^\delta)^c} (\delta/1+\delta)^2 |\beta_{j\cdot n}|^2 d\mu + \int_{B_{j\cdot n}^\delta} |\gamma_{j\cdot n}|^2 d\mu$$
$$\leqq \delta^2 \mu(K) + \mu(B_n^\delta),$$

$$\| \beta_{\ell+1\cdot n} \| = \| I - \textstyle\sum_1^\ell \beta_{j\cdot n} \| = \| \sum_1^\ell (\alpha_j - \beta_{j\cdot n}) \| \leqq \sum_1^\ell \| \alpha_j - \beta_{j\cdot n} \|。$$

故に十分小さい δ, 十分大きい n に対し

$$\| \alpha_j - \beta_{j\cdot n} \| \leqq \varepsilon / \sqrt{\mu(K)},\quad 1 \leqq j \leqq \ell,$$

$$\| \beta_{\ell+1\cdot n} \| \leqq \varepsilon / \sqrt{\mu(K)}。$$

よって $\forall \nu \in \mathfrak{M}_\mu$ に対し $\| d\nu/d\mu \| \leqq 1$ より

$$\left| \int (\alpha_j - \beta_{j\cdot n}) d\nu \right| \leqq \| \alpha_j - \beta_{j\cdot n} \| \| d\nu/d\mu \| \leqq \varepsilon,\quad 1 \leqq j \leqq \ell,$$

$$\left| \int \beta_{\ell+1\cdot n} d\nu \right| \leqq \| \beta_{\ell+1\cdot n} \| \| d\nu/d\mu \| \leqq \varepsilon.$$

従って補題の証明が終了。

<u>補題3</u>。Lは抽象L空間，HはL^*のlinear sublatticeで$\sigma(L^*, L^{**})$位相でL^*中密，Γはuniform latticeとする。$\Gamma\hat{\otimes}_\pi L$を$\Gamma$と$L$の$\pi$-tensor積の完備化とする。($\forall h\in\Gamma\hat{\otimes}_\pi L$は，$h=\sum_0^\infty a_n\otimes b_n$, $a_n\in\Gamma$, $b_n\in L$ such that $\sum_0^\infty \|a_n\|\|b_n\|<\infty$と表現可能[11]。又その$\pi$-tensor normは$\|h\|_\pi\equiv\inf\{\sum_0^\infty\|a_n\|\|b_n\| : h=\sum_0^\infty a_n\otimes b_n\}$)。$\Gamma\hat{\otimes}_\pi L$の双対空間は$\Gamma\times L$上の連続双線型形式の空間と同一視可能[12]，i.e. $\langle T, a\otimes b\rangle = aTb$。$\mathcal{B}(L,\Gamma^*)$を$L$から$\Gamma^*$へのtransitionの空間とする。$\forall T\in\mathcal{B}(L,\Gamma^*)$は$aTb=\langle a, Tb\rangle$, $(a,b)\in\Gamma\times L$，により$\Gamma\times L$上の双線型形式で$IT\mu=\|\mu\|$ for $\forall\mu\in L$, $\geqq 0$ (IはΓのunit)であるものと同一視できることに注意。$\mathcal{B}_0$を$\exists\{y_j\}\subset D$, $\exists\{\beta_j\}\subset H$, $\beta_j\geqq 0$, $\sum\beta_j = L^*$のunit，で

$$\gamma T\mu = \sum_1^\ell \gamma(y_j)\langle\beta_j,\mu\rangle$$

とあらわせるtransitionの全体とする。$\mathcal{B}_0$の$\sigma([\Gamma\hat{\otimes}_\pi L]^*, \Gamma\hat{\otimes}_\pi L)$位相に関する閉包は$\mathcal{B}(L,\Gamma^*)$。

<u>注意</u>。補題中の説明の如く我々は$\mathcal{B}(L,\Gamma^*)$を$(\Gamma\hat{\otimes}_\pi L)^*$の部分集合と考える。この時$\mathcal{B}(L,\Gamma^*)$は弱閉である。なぜなら$\forall\{T_\nu\}\subset\mathcal{B}(L,\Gamma^*)$が$\exists T\in(\Gamma\hat{\otimes}_\pi L)^*$に弱収束すれば，$IT\mu=\lim IT_\nu\mu=\|\mu\|$ for $\forall\mu\geqq 0$。故にTもtransition。

<u>証明</u>。$\forall T\in\mathcal{B}(L,\Gamma^*)$, $\forall\varepsilon>0$, $\forall\{h_1,\cdots,h_m\}\subset\Gamma\hat{\otimes}_\pi L$に対し

$\exists S \in \mathcal{B}_0$ があり

$$|\langle T, h_i\rangle - \langle S, h_i\rangle| \leq \varepsilon, \quad 1 \leq i \leq m,$$

を示せば良い。$h_i = \sum_0^\infty \gamma_n^{(i)} \otimes \mu_n^{(i)}$ とあらわしておく。あるNがあり

$$\sum_{N+1}^\infty \|\mu_n^{(i)}\| \|\gamma_n^{(i)}\| < \varepsilon/4, \quad 1 \leq i \leq m。$$

又，$\langle T, h_i\rangle = \sum_0^\infty \gamma_n^{(i)} T \mu_n^{(i)}$ に注意。

$\{\|\gamma_n^{(i)}\|^{-1}\gamma_n^{(i)};\ 1\leq i\leq m,\ 1\leq n\leq N\}$ に補題1を適用すると $\forall\delta>0$ に対し $\exists\{g_j : 1\leq j\leq l\}\subset\Gamma$, $\exists\{y_j : 1\leq j\leq l\}\subset D$ があり

$$g_j \geq 0, \quad \sum_1^l g_j = \Gamma \text{ の unit}$$

$$\|\gamma_n^{(i)} - \sum_1^l \gamma_n^{(i)}(y_j) g_j\| \leq \delta \|\gamma_n^{(i)}\|, \quad 1\leq i\leq m,\ 1\leq n\leq N。$$

そこで $\{g_j T : 1\leq j\leq l\}\subset L^*$ に補題2を適用すると，$\forall\rho>0$ に対し $\exists\{\beta_j : 1\leq j\leq l+1\}\subset H$ such that

$$|\langle g_j T - \beta_j, \mu_n^{(i)}\rangle| \leq \rho \|\mu_n^{(i)}\|,$$

$$|\langle \beta_{l+1}, \mu_n^{(i)}\rangle| \leq \rho \|\mu_n^{(i)}\|, \quad 1\leq j\leq l,\ 1\leq n\leq N,\ 1\leq i\leq m$$

と出来る。$S\in\mathcal{B}_0$ を式

$$\gamma S \mu \equiv \sum_1^{l+1} \gamma(y_j) \langle \beta_j, \mu\rangle$$

で定義する。すると

$$\begin{aligned}
|\langle T, h_i\rangle - \langle S, h_i\rangle| &\leq \Big|\sum_1^N \gamma_n^{(i)} T \mu_n^{(i)} - \sum_1^N \gamma_n^{(i)} S \mu_n^{(i)}\Big| \\
&\quad + \Big|\sum_{N+1}^\infty \gamma_n^{(i)} T \mu_n^{(i)}\Big| + \Big|\sum_{N+1}^\infty \gamma_n^{(i)} S \mu_n^{(i)}\Big| \\
&\leq \varepsilon/2 + \sum_1^N \Big|\big(\gamma_n^{(i)} - \sum_1^l \gamma_n^{(i)}(y_j) g_j\big) T \mu_n^{(i)}\Big| \\
&\quad + \sum_1^N \Big|\sum_1^l \gamma_n^{(i)}(y_j) \langle g_j T - \beta_j, \mu_n^{(i)}\rangle\Big|
\end{aligned}$$

$$+\sum_1^N |\gamma_n^{(i)}(y_{\ell+1})\langle \beta_{\ell+1}, \mu_n^{(i)}\rangle|$$

$$\leq \varepsilon/2 + \delta\sum_1^N \|\gamma_n^{(i)}\|\|\mu_n^{(i)}\| + \ell\rho\sum_1^N \|\gamma_n^{(i)}\|\|\mu_n^{(i)}\| + \rho\sum_1^N \|\gamma_n^{(i)}\|\|\mu_n^{(i)}\|。$$

故に δ, ρ を充分小さく取ることにより

$$|\langle T, \beta_i\rangle - \langle S, \beta_i\rangle| \leq \varepsilon,\quad 1\leq i\leq m,$$

と出来る。証明了。

<u>補題4</u>。E, F を二つの Banach spaces, A を E の norm compact 集合, B を F の $\sigma(F, F^*)$-compact 集合, $E\hat{\otimes}_\pi F$ を E と F の π-tensor 積の完備化, C を $\{a\otimes b : a\in A, b\in B\}$ の $E\hat{\otimes}_\pi F$ 中での弱化位相で閉の circled convex extension とする。C は $E\hat{\otimes}_\pi F$ の弱化位相で compact な部分集合。

<u>証明</u>。先述のように $E\hat{\otimes}_\pi F$ の双対空間は $E\times F$ 上の連続双線形式のつくる空間と同一視可能。$\forall$net $\{a_n\otimes b_n ; a_n\in A, b_n\in B\}$ に対し仮定から $\exists$subnet $\{m\}\subset\{n\}$ があり $a_m\to\exists a$ in norm, $b_m\to\exists b$ weak*ly。$\forall T\in(E\hat{\otimes}_\pi F)^*$ に対し T を双線型形式とみて

$$|a_m T b_m - aTb| \leq |(a_m - a)Tb_m| + |aT(b_m - b)|$$

$$\leq \|a_m - a\|\|T\|\|b_m\| + |aT(b_m - b)|。$$

B は弱化位相で compact だから norm bounded, 又 $aT\in F^*$。故に $a_m\otimes b_m \to a\otimes b$ (弱化位相で)。従って $\{a\otimes b ; a\in A, b\in B\}$ は weak* compact, その convex hull の weak* closure C は再び

weak* compact.[13] CはC'の circled extension であり再び weak* compact.[14] 証明了。

<u>定理の証明</u>。$(\Gamma\mathfrak{S}_\pi L)^*$上に2つの位相を考える。

1), $\Gamma\mathfrak{S}_\pi L$上の各点収束位相, i.e. weak topology,

2). $\Gamma\mathfrak{S}_\pi L$上の weak*-compact circled convex setsの全体 $\mathscr{A}$上の一様収束位相, i.e. $(\Gamma\mathfrak{S}_\pi L)^*$の Mackey topology。

補題3から$\mathcal{B}_0$の weak closure は$\mathcal{B}$で、一方$\mathcal{B}_0$は convex。Mackeyの定理[16]から$\mathcal{B}_0$の Mackey位相による閉包も$\mathcal{B}$となる。よって$^\forall T\in\mathcal{B}$に対し Mackey位相でTに収束する$\mathcal{B}_0$中の net $\{T_\nu\}$がある。補題4からKの任意の要素は$\mathscr{A}$の或る元に含まれるから, T_νはKの各元上Tに一様収束する。証明了。

以下の注の出典は

[B1] Bourbaki「代数」
[B2] 〃 「積分」
[B3] 〃 「位相線型空間」
[B4] 〃 「位相」
（[B1]–[B4]）邦訳. 東京図書

[D] Day, M.M.「Normed Linear Spaces」3rd. ed. Springer (1973)

[KA] カントロヴィッチ & アキロフ「ノルム空間の関数解析」

邦訳(1964), 東京図書

[KN] Kelly & Namioka.「Linear Topological Spaces」
Van Nostrand (1963)

[SC] Schaefer, H.H.「Banach Lattices and Positive Operators」, Springer (1974)

[SE] Semadeni, Z.「Banach spaces of continuous functions, Vol. I」PWN-Polish Scientific Publisher (1971)

(1) KA. 4章, 定理2

(2) KN. Sec. 24, Prop. 24.3

(3) B2. 2章, §1, n°5, 定義4

(4) B2. 2章, §1, n°5, 定理1

(5) B3, 4章, §5, n°2, 命題5

(6) KN, Sec. 24, Prop. 24.4

(7) B1. 6章, §1, n°10, 定理1

(8) KN. Sec. 24, Th. 24.9

(9) B3, 4章, §3, 命題4の系1 & 定理2及びその系

(10) D. 6章, §4, Th. 3

(11) SE. 5章, §20, 20.1.20 又は SC. 4章, §2, 定義2.1

(12) SE. 5章, §20, 20.1.10

(13) KN. 5章, §17, Th. 17.12

(14) B3, 1章, §1, p5, 命題3

(15) B3, 4章, §2, p3, 定理2の系

(16) B3, 4章, §2, p3, 定理2とその系及び命題4の系1。