数理解析研究所講究録
第381巻 1980年 195-206

多値論理関数の極小閉集合

電気通信大学　　町田　元

1. はじめに

自然数 $k>1$ に対して $E_k=\{0,1,\cdots,k-1\}$ とおく。E_k 上の n 変数関数 ($n>0$)，すなわち E_k の n 個の直積 $(E_k)^n$ から E_k の中への関数，を n 変数 k 値論理関数とよび，その全体を $P_k^{(n)}$ と表わす。さらに，k 値論理関数の全体，すなわち $\bigcup_{n=1}^{\infty} P_k^{(n)}$，を P_k と表わす。($k=2$ の場合はブール関数である。)以下，k は固定して考えるので，添字の k は省略することが多い。

論理関数を扱うときに基本的な演算は，関数の合成演算である。論理関数の集合 $F\subseteq P_k$ が合成に関して閉じているとき F を閉集合とよぶ。(詳しい定義は次節参照。)閉集合すべてを決定し，それらの間の包含関係を求める問題は，論理関数の理論における一つの重要な問題であり，これまでに次のような結果が知られている。

（i）　$k=2$ の場合の閉集合の完全な決定（包含関係の決定を含む）（E. L. Post〔2〕 1941）

（ii）　$k \geqq 3$ の場合の極大閉集合の完全な決定（I. V. Rosenberg〔3〕 1970）

（iii）　閉集合全体の濃度（$k=2$ のとき可算濃度，$k \geqq 3$ のとき連続濃度）（Y. I. Janov and A. A. Muchnik〔1〕 1959）

しかし，この問題は一般に非常に難しく，これらの結果を除くとまだほとんど解明されていない状態である。

ここでは，（本質的）極小閉集合を取り上げ考察する。主要な結果として，（本質的）極小閉集合は有限個しか存在しないことを示す。

2. 定義

$k\,(>1)$ は固定して考える。まず，閉集合をきちんと定義するが，そのために射影関数について定めよう。任意の $x_1, x_2, \cdots, x_n \in E$ に対して　$pr_i^n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_i$　($n>0$, $1 \leqq i \leqq n$) をみたす関数 $pr_i^n \in P^{(n)}$ を射影関数（projection）とよび，$PR^{(n)} = \{ pr_i^n \mid 1 \leqq i \leqq n \}$ および $PR = \bigcup_{n=1}^{\infty} PR^{(n)}$ とおく。

<u>定義 2.1.</u>　$F \subseteq P$ に対して，$F \cup PR$ の元を（重複を許して有限個）合成して得られる関数全体の集合を F の<u>閉包</u>

(closure) とよび，$\overline{F}$と表わす。$\overline{F}=F$のときFは閉集合(closed set)であるという。Fが有限集合$\{f_1, f_2, \cdots, f_s\}$のときは，$\overline{F}$を$\langle f_1, f_2, \cdots, f_s\rangle$と表わすこともある。

たとえば，自明な例であるが，P，PR は閉集合であり，$P^{(1)}$，ϕは閉集合でない。もう少し自明でない閉集合の例としては，単調非減少関数全体から成る集合などがある。

定義 2.2.　$f\in P^{(n)}$ および $1\leqq i\leqq n$ に対して，f は第 i 変数に本質的に依存 (essentially dependent) するというのは，適当な $a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_n, a_i' \in E$ $(a_i \neq a_i')$ に対して

$$f(a_1, \cdots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \cdots, a_n) \neq f(a_1, \cdots, a_{i-1}, a_i', a_{i+1}, \cdots, a_n)$$

が成り立つことをいう。

f が $1\leqq i_1<i_2<\cdots<i_m\leqq n$ なる m 個の $i_1, i_2, \cdots, i_m$ に対して第 i_1 変数，第 i_2 変数，…，第 i_m 変数にそれぞれ本質的に依存し，しかも任意の $j\in\{1, 2, \cdots, n\}-\{i_1, i_2, \cdots, i_m\}$ については第 j 変数に本質的に依存しないとき，f は本質的 m 変数 (essentially m-variable) 関数であるという。(f がどの変数にも本質的に依存しないとき，すなわち f が定数値関数であるときは，f は本質的 0 変数関数であるという。)　以後，本質的 m 変数関数の全体を $P^{ess(m)}$ と表わす。

本稿の主題である極小閉集合についてはいくつかの相異なる定義のしかたが考えられるであろうが，ここでは、本質的に2変数以上の関数を少なくとも1つ含む閉集合だけを取り上げ，それらの中で包含関係に関して極小であるものを考察することにする。

定義 2.3.　閉集合 $F \subseteq P$ に対して，F が次の (i), (ii) をみたすとき，F は**本質的極小閉集合** (essentially minimal closed set) であるという。

(i) $F \cap \left(\bigcup_{m=2}^{\infty} P^{ess(m)} \right) \neq \phi$,

(ii) 任意の閉集合 $F' \subseteq P$ について，$F' \subsetneq F$ ならば

$$F' \cap \left(\bigcup_{m=2}^{\infty} P^{ess(m)} \right) = \phi \quad (\text{i.e.}\ F' \subseteq P^{ess(0)} \cup P^{ess(1)})$$

である。

各 k (>1) について本質的極小閉集合をすべて決定することが目標であるが，現在はまだそこまで至っていない。

以後，簡単のため，本質的極小を単に**極小**と称する。

3. （本質的）極小閉集合

次の２つの性質は基本的であるが，証明は容易なので省略する。

<u>定理 3.1.</u>　$F \subseteq P$ が極小閉集合ならば，F は１つの元 $f \in P^{ess(m)}$ （$m \geqq 2$）によって生成される（i.e. $F = \langle f \rangle$）。

<u>定理 3.2.</u>　$f \in P^{ess(m)}$ （$m \geqq 2$）に関する次の２つの命題 (1)，(2) は同値である。

(1)　$\langle f \rangle$ は極小閉集合である。

(2)　任意の $g \in \langle f \rangle$ に対して，$g \notin P^{ess(0)} \cup P^{ess(1)}$ ならば $f \in \langle g \rangle$ である。

２つの関数 $f \in P^{(n)}$，$g \in P^{(n-1)}$ について，ある i，j （$1 \leqq i < j \leqq n$）が存在して任意の $x_1, \cdots, x_{j-1}, x_{j+1}, \cdots, x_n \in E$ に対して　$g(x_1, \cdots, x_{j-1}, x_{j+1}, \cdots, x_n) = f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \cdots, x_n)$ となるとき，g は f から第 i 変数と第 j 変数を同一視して得られるという。このとき，$g = f_{i \equiv j}$ と表わす。閉包の定義から明らかなように，$f_{i \equiv j} \in \langle f \rangle$ である。

次の定理が本稿において最も重要な定理である。

定理 3.3.　$n \geqq k+2$ とする。任意の $f \in P_k^{ess(n)}$ に対して，f からある２つの変数を同一視して得られる関数 g で $g \in P_k^{ess(m)}$，$2 \leqq m < n$，となるものが存在する。

証明.　$f \in P^{ess(n)} \cap P^{(n)}$ と仮定して証明すれば十分である。f から２つの変数を同一視して得られる関数はすべて本質的０変数または本質的１変数であると仮定して矛盾を導く。

f は第１変数に本質的に依存するから，適当な $a_1, a_2, \cdots, a_n, a_1' \in E$ に対して

$$f(a_1, a_2, \cdots, a_n) \neq f(a_1', a_2, \cdots, a_n)$$

となる。$\alpha = f(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，$\beta = f(a_1', a_2, \cdots, a_n)$ とおく。($\alpha \neq \beta$ である。) 仮定より $n-1 \geqq k+1$ であるから，$a_2, \cdots, a_n$ のうち少なくとも２つ相等しいものがある。いま仮に

$$a_{n-1} = a_n$$

とする。すると，$f_{n-1 \equiv n}(x_1, \cdots, x_{n-1})$ $(= f(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_{n-1}))$ は仮定より本質的０変数または１変数関数であるが

$$f_{n-1 \equiv n}(a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}) = \alpha \neq \beta = f_{n-1 \equiv n}(a_1', a_2, \cdots, a_{n-1})$$

であるから，$f_{n-1 \equiv n}$ は第１変数のみに依存する本質的１変数関数である。

一方，f は第２変数にも本質的に依存するので，適当な

$b_1, b_2, \cdots, b_n, b_2' \in E$ に対して

$$f(b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n) \neq f(b_1, b_2', b_3, \cdots, b_n)$$

となる。上と同様に $n-1 \geqq k+1$ であることより，$b_1, b_3, \cdots, b_n$ のうち少なくとも2つ相等しいものがある。仮に

$$b_i = b_j$$

とする（$i, j \in E-\{2\}$, $i \neq j$）。$f_{i\equiv j}$ は第2変数のみに依存する本質的1変数関数であることが同様にして示される。

以上より次式が得られる。

$$\begin{array}{ccc}
\alpha = f_{n-1\equiv n}(a_1, b_2, a_1, \cdots, a_1) & & f_{n-1\equiv n}(a_1', b_2, a_1', \cdots, a_1') = \beta \\
\| & & \| \\
f(a_1, b_2, a_1, \cdots, a_1, a_1) & & f(a_1', b_2, a_1', \cdots, a_1', a_1') \\
\| & & \| \\
f_{i\equiv j}(a_1, b_2, a_1, \cdots, a_1) & = & f_{i\equiv j}(a_1', b_2, a_1', \cdots, a_1')
\end{array}$$

すなわち，$\alpha = \beta$ が得られたが，実は $\alpha \neq \beta$ であったのでこれは矛盾である。よって，定理が証明された。 □

以上の3つの定理から直ちに次の系が得られ，極小閉集合が有限個しか存在しないことが証明されたことになる。

系 3.4. 任意の極小閉集合 $F \subseteq P$ に対して

$$F = \langle f \rangle$$

をみたす $f \in P^{(k+1)}$ が存在する。

従って，極小閉集合は有限個，高々 $|P^{(k+1)}|$ 個，しか存在しない。

次に，$f \in P^{(n)}$ に対して $\langle f \rangle$ が極小閉集合であるための必要条件を1つ示そう。$pr_1^1 \in P^{(1)}$ を id と記すことにする。また，任意の $f \in P^{(n)}$ に対して，$f_{(1)} \in P^{(1)}$ を

$$f_{(1)}(x) = f(x, x, \cdots, x)$$

として定める。

<u>定理 3.4.</u>　$f \in P^{(n)}$ に対して，$\langle f \rangle$ が極小閉集合であるとき，$f_{(1)}$ は全射でないか，または，$f_{(1)} = id$ であるかいずれかである。

証明は省略する。

4. 生成系

極小閉集合に対する生成系という概念を定義する。

<u>定義 4.1.</u>　$S \subseteq P$ が極小閉集合に対する<u>生成系</u>（generating

system, fundamental system）であるとは，任意の極小閉集合 F に対して

$$F = \langle f \rangle$$

となる $f \in S$ が存在することである。

次の定理は系3.4.の言いかえに過ぎない。

<u>定理4.2.</u>　$P^{(k+1)}$ は生成系である。

生成系として極小なものを求めることが所期の目標であるが，前述の通りその目標はまだ達成されていない。しかし，極小な生成系がみたすべき1つの必要十分条件を与えることはできる。

<u>定理4.3.</u>　任意の $S \subseteq P$ に対して次の2条件は同値である。

(1)　S は（極小閉集合に対する）極小な生成系である。

(2)　(a)　S は（極小閉集合に対する）生成系である。

(b)　$S \subseteq \bigcup_{m=2}^{\infty} P^{ess(m)}$.

(c)　任意の $f, g \in S$ に対して，$f \neq g$ ならば $g \notin \langle f \rangle$ である。

証明．　(1) ⇒ (2)：　(a) は明らか。また，(b) も S の極小性より明らか。　(c) ある $f, g \in S$ について $f \neq g$ であるが $g \in \langle f \rangle$ であるとする。$g \in \langle f \rangle$ は $\langle g \rangle \subseteq \langle f \rangle$ と同値であり，一方，$g \in \bigcup_{m=2}^{\infty} P^{ess(m)}$ であるので $S - \{f\}$ も生成系となり S の極小性に反する。

(2) ⇒ (1)：　S が極小でないとすると，$S' = S - \{f\}$ が生成系となるような $f \in S$ が存在する。この f について，(b) より $f \in \bigcup_{m=2}^{\infty} P^{ess(m)}$ であるから，$\langle g \rangle \subseteq \langle f \rangle$ をみたす $g \in S'$ が存在しなければならない。しかし，これは $g \in \langle f \rangle$ と同値であるから (c) に反する。よって，S は極小である。　□

5.　$k = 2$ の場合

$k = 2$ の場合，すなわちブール関数に対しては，次の定理で述べるように，極小閉集合をすべて決定することができた。ただし，第1節でも触れたように $k = 2$ の場合は閉集合すべてが，包含関係まで含めて，既に決定されているので，結果そのものが目新しい結果という訳ではない。

定理 5.1.　$k = 2$ のとき，次の4つの関数から成る集合は極小閉集合に対する極小な生成系である。

$x_1 \cdot x_2$,

$x_1 \vee x_2$,

$x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$,

$x_1 \cdot x_2 \oplus x_2 \cdot x_3 \oplus x_3 \cdot x_1$

証明は，定理4.2.の $P^{(3)}$ が生成系であることから始めて，順次小さな生成系を求めていき，最後に上の4つの関数だけを含む生成系が得られたところで定理4.3.を適用してこれが極小な生成系であることを確かめたが，詳細は省略する。

ここで，系3.4.あるいは定理4.2.にあらわれる $k+1$ という値について一言注意しておこう。定理5.1.の中の $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$ という関数に着目すると

$$\langle x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \rangle \cap P^{ess(2)} = \phi$$

であるので閉集合 $\langle x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \rangle$ の生成元を $P^{(2)}$ の中から探すことはできないことがわかる。すなわち，$k=2$ のとき $P^{(2)}$ は極小閉集合に対する生成系ではない。従って，一般には，上記の $k+1$ という値をさらに小さい値で置き換えることはできない。

6. あとがき

極小閉集合を調べる問題は，R. Pöschel 氏（東ドイツ）に

示唆されたものである。

参考文献

[1] Janov,Y.I. and A.A.Muchnik, Existence of k-valued closed classes without a finite basis (Russian). *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* 127 (1959) 44-46.

[2] Post,E.L. The two-valued iterative systems of mathematical logic. *Annals of Math. Studies* No.5 (Princeton Univ. Press, 1941)

[3] Rosenberg,I.G. Uber die funktionale Vollständigkeit in dem mehrwertigen Logiken. *Rozpravy Čs. Akademie Věd. Ser. Math. Nat. Sci.,* 80 (1970) 3-93.