

長大桁・長大指数演算パッケージMULPACとその応用

筑波大電子情報 森 正武
京大数理研 今井敬子

§1. MULPACとその改良

MULPACシステムとは、DECUSに登録されているDEC SYSTEM-20上で稼動可能なFORTRAN用多倍長・長大指数演算のサブルーチン・パッケージのことである。MULPACで扱う数値の内部表現ならびに機能は下記の通りである。

○内部表現：連続した N WORD (N は任意, 1 WORD 36 bit)

から成り, そのうち1 WORDは指数部, うち2~ N WORDは仮数部で, それぞれ2進表示である。

○機能：四則演算サブルーチン。

大小比較サブルーチン。

上記内部表現のための長さ指定ルーチン。

上記の数値とdouble, real, integerとの間の変換ルーチン。

上記パッケージを使用するにあたっては, 演算の一つ一つがサブルーチン・コールになるなど, プログラム作成あるいは

はデバッグ上の不便がある。また、DEC SYSTEMの SYSTEM 変更により使用不可能なサブルーチンが出てくるなどの問題点もある。そこで、これらの欠点を補うため、下記のような pre-processor を作成した。

— pre-processor —

○ 入力言語：FORTRAN statement +
MULPAC 宣言文

例 MULPAC X(3), Y(2, 4)

○ 出力言語：FORTRAN

この pre-processor は 1-pass translator であり、それ自身 9K WORD から成る Pascal で書かれている。現在のところ、内部表現として 4 WORD (N=4) をとっている。

入力言語の機能としては、標準の FORTRAN の機能以外に下記のもものが追加されている。

1. 上記 MULPAC 宣言文で宣言された変数 (以下 MULPAC 変数と呼ぶ) の四則, 比較等の演算に対して, FORTRAN と同じ記号の使用を許す。
2. FORTRAN の標準の type (integer, real, double) との混合演算を許す。
3. MULPAC 変数のための関数: MPABS (絶対値), MPSIN (sin), MPCOS (cos), MPEXP (exp), MPLÖG (log),

MPSQRT (平方根)。

現段階でのこの pre-processor には, 内部表現が 4 WORD に制限されていること以外に, MULPAC 変数のままでの入出力ができないという制約がある。その主な理由は, もとものの MULPAC パッケージに入出力機能が全く無いためである。それ以外に, この pre-processor を使用する際の制限事項としては以下のようなものがある。

1. pre-processor によって translate された結果が 2 以上の statement に分かれるような MULPAC 変数の演算を含む文は, DO 文の最後の文に使用することができない。次の例は許されない例である。

```

DO 10 I=1, 100
  :
10 X = X + Y + Z (X, Y, Z は MULPAC 変数)
  ↓
DO 10 I=1, 100
  :
10 CALL MPADD(X, Y, WK0000)
   CALL MPADD(WK0000, Z, X)

```

2. 論理 IF 文の true statement についても同様の制限がある。

3. 文関数の宣言を許していない。

4. TYPE宣言として INTEGER*8 は許されず、したがって
2 WORD INTEGER の使用が許されていない。

上記制限事項は今後 pre-processor を version up するときに
少しずつ取除いていきたいと考えている。

pre-processor の入力言語とその出力のプログラム例を次の
ページに示す。

§2. 二重指数関数型数値積分公式への応用

数値計算における長大桁および長大指数のもつ有効性を、
二重指数関数型数値積分公式を例にとりて調べてみよう。積
分の例として

$$I(\alpha) = \int_{-1}^1 (1-x^2)^\alpha dx = 2 \int_0^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\alpha dx, \quad -1 < \alpha \quad (1)$$

を取り上げる。この積分に $x = \tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh t\right)$ なる変換をほどこすと

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \tanh^2\left(\frac{\pi}{2} \sinh t\right)\right)^\alpha \frac{\frac{\pi}{2} \cosh t}{\cosh^2\left(\frac{\pi}{2} \sinh t\right)} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{\pi}{2} \cosh t}{\cosh^{2(\alpha+1)}\left(\frac{\pi}{2} \sinh t\right)} dt \end{aligned} \quad (2)$$

となるが、これにきざみ幅一定の台形則を適用すれば、二重

```

C
  Mulpac X,Y
  DOUBLE PRECISION A,B,C
  READ(5,1000) A,B
1000 FORMAT(2F10.5)
  X=A
  IF(X+1.0.GT.X*B) GO TO 1 ①
  Y=X*X+2.0*MPSIN(B) ②
  GO TO 2
  1 Y=X+MPABS(X)-B ③
  2 C=Y
  WRITE(6,2000) A,B,C
2000 FORMAT(' A= ',D25.18/' B= ',D25.18/' C= ',D25.18)
  STOP
  END

```

C

```

C
  DOUBLE PRECISION A,B,C
  DIMENSION X(4) , Y(4)
  DIMENSION WZ0000(4),WZ0001(4),WZ0002(4),WZ0003(4),WZ0004(4),
- WZ0005(4),WZ0006(4),WZ0007(4),WZ0008(4),WZ0009(4),WKZERO(4)
  INTEGER WKBL01,WKBL02,WKBL03,WKBL04,WKBL05
  DATA WKZERO/0,0,0,0/
  CALL ERRSET(0)
  CALL MPINI
  READ(5,1000) A,B
1000 FORMAT(2F10.5)
  CALL MPDCON(A,X)
! X=A
  CALL MPCONS(1.0,WZ0000)
  CALL MPADD(X,WZ0000,WZ0001)
  CALL MPDCON(B,WZ0002)
  CALL MPMUL(X,WZ0002,WZ0003)
  CALL MPTEST(WZ0001,WZ0003,WKBL01)
  IF(WKBL01.GT.0) GOTO 1
  CALL MPMUL(X,X,WZ0000)
  CALL MPDCON(B,WZ0001)
  CALL MPSIN(WZ0001,WZ0002)
  CALL MPCONS(2.0,WZ0003)
  CALL MPMUL(WZ0003,WZ0002,WZ0004)
  CALL MPADD(WZ0000,WZ0004,Y)
! Y=X*X+2.0*MPSIN(B)
  GO TO 2
  1 CALL MPABS(X,WZ0000)
  CALL MPADD(X,WZ0000,WZ0001)
  CALL MPDCON(B,WZ0002)
  CALL MPSUB(WZ0001,WZ0002,Y)
! 1 Y=X+MPABS(X)-B
  2 CALL MPDPV(Y,C)
! 2 C=Y
  WRITE(6,2000) A,B,C
2000 FORMAT(' A= ',D25.18/' B= ',D25.18/' C= ',D25.18)
  STOP
  END
C

```

指数関数型公式による結果が得られる。

α が -1 に近いとき，この計算で二つの問題が生ずる。

(i) $1-x^2 = (1-x)(1+x)$ の計算における， $\alpha = \pm 1$ に近いところでの桁落ち。

(ii) 重み $\frac{\pi}{2} \cosh t / \cosh^2(\frac{\pi}{2} \sinh t)$ の $t \rightarrow \pm\infty$ におけるアンダー・フロー。

このうち，(i) の問題は長大桁の採用により，また (ii) の問題は長大指数の採用により解決することができる。これらを簡単に考察してみよう。

(i) 桁落ちの問題

ε をいわゆる計算機イフシロンとすると， $1-x$ の計算ではつねに ε 程度の誤差が生ずると考えられる。 α が 1 に近づいて，その差が計算機イフシロン以下になると，桁落ちによって $1-x$ の計算結果は 0 になり，積分は通常はそこで打ち切らざるを得ない。その α の上限を α_{\max} ，すなわち

$$\varepsilon = 1 - \alpha_{\max} \quad (3)$$

と置く。すると， $1-x$ の計算で生ずる誤差の積分への寄与 ΔI_ε はほゞ次のようになる。

$$\Delta I_\varepsilon = 2 \int_0^{\alpha_{\max}} \{(1-x+\varepsilon)^\alpha - (1-x)^\alpha\} (1+x)^\alpha dx + 2 \int_{\alpha_{\max}}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\alpha dx \quad (4)$$

右辺の1項は積分される関数値のもつ誤差から生ずる積分誤差の上限で、2項は x_{\max} で打切ったことにより生ずる誤差である。ここで、 α は -1 に近い場合を考え、積分は $x = -1$ の近くでの寄与が大きいとして、 $(1+x)^\alpha \doteq 2^\alpha \doteq 2^{-1}$ 、 $(1-x_{\max})^\alpha \gg 1$ とすると、 ΔI_ε は次のようになる。

$$\begin{aligned} \Delta I_\varepsilon &\doteq 2^{1+\alpha} \varepsilon \alpha \int_0^{x_{\max}} (1-x)^{\alpha-1} dx + 2^{1+\alpha} \int_{x_{\max}}^1 (1-x)^\alpha dx \\ &= \varepsilon \left[(1-x_{\max})^\alpha - 1 \right] + \frac{1}{\alpha+1} (1-x_{\max})^{\alpha+1} \\ &= \frac{\alpha+2}{\alpha+1} \varepsilon^{\alpha+1} \end{aligned} \quad (5)$$

DEC SYSTEM-20 の FORTRAN の 2 倍精度における計算機インフォシロンの

$$\varepsilon = 2^{-62} = 2.2 \times 10^{-19}$$

程度であるから、例えば $\alpha = -0.9$ とすると、 $I(-1) \doteq 10.7177\dots$ に対し $\Delta I_\varepsilon \doteq 1.5 \times 10^{-1}$ となり、2 倍精度では十分な精度は期待できない。しかし、仮数部に 3 WORD を使う現在の MULLPAC を利用しても

$$\varepsilon = 2^{-36 \times 3} = 2^{-108} = 3.1 \times 10^{-33}$$

であるから、 $\alpha = -0.9$ のときには $\Delta I_\varepsilon \doteq 6.2 \times 10^{-3}$ 程度であってあまりその効果はない。もし、 $\alpha = -0.9$ に対して $\Delta I_\varepsilon \doteq 10^{-15}$

程度の値を得ようとすると、 $\varepsilon = \left(\frac{0.1}{1.1} \times 10^{-15}\right)^{\frac{1}{0.1}} \doteq 2^{-533} = (2^{-36})^{14.8}$ より、15 WORD 程度の仮数部が必要となる。したがって、 α が-1に近いときには、多倍長演算はあまり効率的ではない。仮数部3 WORDの現在のMULPACで 10^{-15} 程度の精度が得られるのは、 $\alpha = -0.53$ あたりまでである。

この例のように、具体的に関数形が陽に定義できる被積分関数の場合には、

$$1 \mp \tanh x = \frac{2e^{\mp x}}{e^x + e^{-x}}$$

の関係を利用してうまくプログラムを行うことにより、桁落ちによる上記の誤差 ΔI_ε は避けることができる[1]。

(ii) アンダー・フローの問題

$|t| \rightarrow \infty$ のとき、(2)の重み $\frac{\pi}{2} \cosh t / \cosh^2(\frac{\pi}{2} \sinh t)$ の分母が著しく大きくなってアンダー・フローを起こすので、汎用サブルーチンではこれを避けるために

$$\cosh^2\left(\frac{\pi}{2} \sinh t_{\max}\right) \doteq 4 \exp\left(-\frac{\pi}{2} \exp t_{\max}\right) = \delta \quad (6)$$

を満たす t_{\max} 、すなわち

$$t_{\max} = \log\left(\frac{2}{\pi} \log \frac{4}{\delta}\right) \quad (7)$$

において積分の上下限を打切るようにしなければならない。

ただし、 δ は浮動小数点数の最小の絶対値で、DEC SYSTEM-20 では約 10^{-38} であり、対応する t_{\max} は約 4.03 である。この打切により、積分には

$$\Delta I_{\delta} \doteq 2 \int_{t_{\max}}^{\infty} \frac{1}{\cosh^2(H\alpha) \left(\frac{\pi}{2} \sinh t\right)} dt \doteq \exp\left(-\frac{\pi}{2}(H\alpha) \exp t_{\max}\right) \quad (8)$$

程度の誤差が生ずる。

DEC SYSTEM-20 の倍精度演算と MULPAC を使用して得た誤差を次に示す。MULPAC では積分値は $t_{\max} = 6.25$ で打切られてある。このとき、(6) より $\delta \doteq 10^{-354}$ である。

α	$I(\alpha)$	MULPAC	2倍精度	ΔI_{δ}
-0.8	5.74349	-0.4×10^{-15}	-0.4×10^{-7}	0.6×10^{-7}
-0.9	10.7177	-0.7×10^{-15}	0.5×10^{-3}	0.2×10^{-3}
-0.99	100.695	0.8×10^{-2}	$0.4 \times 10^{+2}$	0.4×10^0

最後の ΔI_{δ} は、(8) によって計算した 2倍精度に対する値である。この場合には、 $\alpha = -0.9$ 程度でも MULPAC で十分な効果を得られることがわかる。なお、この計算は、(i) の桁落ちによる誤差は生じないようにプログラムを組んで実行させた。

参考文献

- [1] 森正武「曲線と曲面 - 計算機による作図と追跡」教育出版 1974。