数理解析研究所講究録
第 383 巻 1980 年 1-20

H^p 空間の実解析的構成

東北大・教養　金子　誠

1. Atomによる構成

E.M.Stein-G.Weiss は [16] において $R_+^{n+1} \equiv \{(x,y) : x \in R^n, y > 0\}$ における調和函数で

(1) $$\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad , \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \quad (j \neq k)$$

(ここで $x_0 = y$) なる $(n+1)$ 個の函数の組 $F = (u_0, u_1, \cdots, u_n)$ を考えた。$n=1$ の場合は、複素上半平面における、解析函数の、実部と虚部の組みであり、(1)は Cauchy-Riemann の等式である。

$p_1 \equiv (n-1)/n$ とおくならば、$S \equiv |F|^{p_1} \equiv (\sum_{j=0}^{n} |u_j|^2)^{p_1/2}$ が、劣調和である事が重要な性質である。$p > p_1$ ならば、$\delta \equiv p/p_1$ とおけば、$\delta > 1$ であって、

$$\int_{R^n} \{S(x,y)\}^{\delta} dx = \int_{R^n} |F(x,y)|^p \, dx .$$

従って、$\sup_{y>0} \int_{R^n} |F(x,y)|^p dx < \infty$ ならば、$S(x,y) \leq P_y * f(x)$ となる、$f \in L^{\delta}(R^n)$ が存在する。ここで、$P_y(x)$ は、R_+^{n+1} における Poisson 核である。$f \in L^{\delta}(R^n)$ の

Poisson 積分 $P_y * f$ は扱い易い。

(1)は、F がある調和函数の gradient である事を意味する。それより、$p \leqq p_1$ なる p に対しても次のような事が考えられる。

$p_k = (n-1)/(n-1+k)$ $(k = 1, 2, \cdots)$ として、$(n+1)^k$ 個の函数の組（rank k の tensor）である $F = (u_{j_1 \cdots j_k})$ が次の性質を持つものとする。

$$u_{j_1 \cdots j_k j_{k+1}} = \frac{\partial}{\partial x_{j_{k+1}}} u_{j_1 \cdots j_k} \quad (j_{k+1} = 0, 1, \cdots, n)$$

とおくとき、rank $(k+1)$ の tensor $(u_{j_1 \cdots j_k j_{k+1}})$ が symmetric で trace が 0 となる。つまり、

(2) $\quad u_{j_1 \cdots j_\mu \cdots j_\nu \cdots j_{k+1}} = u_{j_1 \cdots j_\nu \cdots j_\mu \cdots j_{k+1}}, \quad \sum_{j=0}^{n} u_{jj j_1 \cdots \hat{j}_\mu \cdots \hat{j}_\nu \cdots j_{k+1}} = 0 \quad (\mu \neq \nu).$

このときやはり $|F|^{p_k} = \left(\sum_{j_1 \cdots j_k = 0}^{n} |u_{j_1 \cdots j_k}|^2\right)^{p_k/2}$ が劣調和となる。従って $p > p_k$ に対して、先に述べた事と同様の性質がある。$p > p_k$ に対して、上のような F の集合として

$$\mathfrak{H}^p = \left\{ F = (u_{j_1 \cdots j_k}) \; ; \; \|F\|_{\mathfrak{H}^p} = \sup_{y>0} \left(\int_{R^n} |F(x, y)|^p \, dx \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

とおく。[14]にも述べられているように次の命題が成立する。

<u>Proposition 1</u> $\quad p \geqq 1$ のとき $F = (u_0, u_1, \cdots u_n) \in \mathfrak{H}^p$

なる為の必要十分条件は，$u_0 = P_y * f$，$u_j = P_y * (R_j f)$ $(j=1,\cdots,n)$ となる $f \in L^p(R^n)$ が存在する事である．ここで，$R_j f$ は，f の Riesz 変換である．

R_+^{n+1} 上の調和函数 u が，$\sup_{y>0} \int_{R^n} |u(x,y)|^p dx < \infty$ ならば，$f = \lim_{y\to 0} u(\cdot, y)$ が $\mathcal{S}'$ の意味で存在する．しかも u は，f によって，完全に決ってしまう。$F = (u_{j_1\cdots j_k})$ が $\mathfrak{h}^p$ の元ならば，$f_{j_1\cdots j_k} = \lim_{y\to 0} u_{j_1\cdots j_k}(\cdot, y)$ が定まるが，(2) の関係より，$u_{j_1\cdots j_k}$ は $u_{0\cdots 0}$ によって決ってしまう．そこで，C. Fefferman - E.M. Stein [7] は，$H^p(R_+^{n+1})$ を次のように定義した．$H^p(R_+^{n+1})$ は，R_+^{n+1} 上の調和函数より成る集合で，

(i)　$1 < p < \infty$ の場合

$$u \in H^p(R_+^{n+1}) \iff \|u\|_{H^p(R_+^{n+1})} = \sup_{y>0} \left(\int_{R^n} |u(x,y)|^p dx\right)^{1/p} < \infty$$

(ii)　$p > p_k = (n-1)/(n-1+k)$ なる場合

$$u \in H^p(R_+^{n+1}) \iff {}^{\exists}F = (u_{j_1\cdots j_k}) \in \mathfrak{h}^p \; ; \; u = u_{0\cdots 0}$$

として，この場合 $\|u\|_{H^p(R_+^{n+1})} = \|F\|_{\mathfrak{h}^p}$

このように定義した Hardy class H^p が，種々の形で特徴付けられる事を，C. Fefferman - E.M. Stein [7] が示した．それを次の定理にまとめておく．さらに，この定理が，上のような定義に，矛盾の無い事をも保証する．

<u>定理 1</u>　u は，R_+^{n+1} で調和とする．このとき，次の（A）から（E）は同値である．

(A) $\quad u \in H^p(R_+^{n+1})$.

(B) $\quad u^*(x) = \sup_{|x-z|<y} |u(z,y)| \in L^p(R^n)$.

(C) $\quad u^+(x) = \sup_{y>0} |u(x,y)| \in L^p(R^n)$.

(D) $\quad S(u)(x) = \left(\int_{|x-z|<y} |\nabla u(z,y)|^2 y^{1-n} dz dy\right)^{1/2} \in L^p(R^n)$.

として $\lim_{y\to\infty} u(x,y) = 0$.

(E) $\quad g(u)(x) = \left(\int_0^\infty |\nabla u(x,y)|^2 y \, dy\right)^{1/2} \in L^p(R^n)$

として $\lim_{y\to\infty} u(x,y) = 0$.

先に述べたように、$u \in H^p$ は境界値をもつ ことを定理の形で述べておく.

<u>定理2</u> $\quad u \in H^p$ ならば $f = \lim_{y\to 0} u(\cdot, y)$ が $\mathcal{S}'$ の意味で存在し、f は u を決定する.

定理2における f が、実は H^p を完全に決定する.

<u>定理3</u> $\quad 0 < p < \infty$, $f \in \mathcal{S}'$ に対して、次の(A)から(D)は同値となる.

(A) $\quad u^+(x) = \sup_{y>0} |(\varphi_y * f)(x)| \in L^p(R^n)$ となる $\int_{R^n} \varphi(x) dx \neq 0$ なる $\varphi \in \mathcal{S}$ が存在する.

(B) $\quad u^*(x) = \sup_{|x-z|<y} |(\varphi_y * f)(z)| \in L^p(R^n)$ となる $\int_{R^n} \varphi(x) dx \neq 0$ なる $\varphi \in \mathcal{S}$ が存在する.

(C)　十分大きな N_0 をとり

$$\mathcal{C} \equiv \left\{ \Phi \in \mathcal{S} : \int_{R^n} (1+|x|)^{N_0} \sum_{|\alpha| \le N_0} \left| \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} \Phi(x) \right|^2 dx \le 1 \right\}$$

とおくとき

$$f^*(x) \equiv \sup_{\Phi \in \mathcal{C}} \sup_{|x-z|<y} |(\Phi_y * f)(z)| \in L^p(R^n).$$

(D)　$f = \lim_{y \to 0} u(\cdot, y)$ なる $u \in H^p(R^{n+1}_+)$ が存在する.

上の定理において, $\varphi_y(x) = y^{-n} \varphi(y^{-1}x)$ である. C. Fefferman・E.M. Stein [7] は, (C) を convolution operator の評価に用いて, その有用性を述べている.

定理3より, Hardy class を, その境界値の集合として とらえ, 次のような定義を置く.

$$H^p(R^n) \equiv \{ f \in \mathcal{S}' ; \ f \text{は} (A) \sim (D) \text{のいずれかを満たす} \}$$

定義として, (B)を採用して $f \in H^p(R^n)$ に対して $\|f\|_{H^p(R^n)} \equiv \|u^*\|_{L^p(R^n)}$ とする事が多いようである. このように定義された $H^p(R^n)$ の一つの特徴付けとして 次の事が成立する.

<u>Proposition 2</u>　(A. Miyachi [12], P. Sjölin [13]) $p_k < p < \infty$, $f \in L^2(R^n)$ とすれば, $f \in H^p(R^n)$ なることと, $R_{j_1} \cdots R_{j_k} f \in L^p(R^n)$ $(j_1, \cdots, j_k = 1, \cdots, n)$ なる事は同値である.

C. Fefferman [1] は次の事を示した.

定理4　$(H^1)^* = BMO$

ここで．$g \in BMO$ であるとは．

$$\|g\|_{BMO} \equiv \sup_{Q} \inf_{c\in R} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)-c|\,dx < \infty$$

ここで．Qは R^n における立方体で．cは定数である．この定義と 定理4とより．$f \in H^1(R^n)$ なる事と $f=\sum f_Q$, $\int_Q f_Q(x)\,dx = 0$, $\operatorname{supp} f_Q \subset Q$，$\sum |Q|\|f_Q\|_\infty < \infty$ と書ける事とが同値である．（C. Fefferman，[2]，[10]参照）

R. R. Coifman [2]，R. H. Latter [11]，A. Uchiyama [19] は．定理3の性質（C）を用いて．上の C. Fefferman の結果を constructive に証明している．aが．p-atom であるとは．或る ball B が存在して $\operatorname{supp} a \subset B$，$\|a\|_\infty \le |B|^{-1/p}$, $\int_{R^n} a(x)x^\alpha\,dx = 0$ $\left(|\alpha| \le n\left(\frac{1}{p}-1\right)\right)$ なる性質を持つ事である．Coifman-Latter-Uchiyama の結果は 次の通りである．

定理5　$f \in H^p(R^n)$ なる事と $f=\sum_j \lambda_j a_j$，a_jは p-atom，$\sum|\lambda_j|^p < \infty$ と書る事は同値である．そして

$$\|f\|_{H^p(R^n)} \approx \inf\left\{\left(\sum|\lambda_j|^p\right)^{1/p};\ f=\sum\lambda_j a_j,\ a_j \text{は} p\text{-atom},\ \sum|\lambda_j|^p<\infty\right\}.$$

なお．$H^p(R^n)$，$p<1$，の dual が Lipschitz class $\Lambda\alpha$，$\alpha = n\left(\frac{1}{p}-1\right)$，である事は Duren-Romberg-Shields [5]（Duren [4]参照），A. P. Frazier [8]，T. Walsh [20] が示している．

2. <u>atom の一般化</u>　R.R. Coifman - G. Weiss [3] は (p, q)-atom, $0 < p \leqq 1 \leqq q \leqq \infty$, $p \neq q$, なるものを次のように定義した. 或る ball B が存在し, $\operatorname{supp} a \subset B$, $\left(\frac{1}{|B|}\int_B |a(x)|^q dx\right)^{1/q} \leqq |B|^{-1/p}$, $\int_{R^n} a(x)dx = 0$ となるとき a は (p, q)-atom であると定義する. この定義においては a の定義されている空間が R^n である必要は無く, 適当な距離と測度があればよく, 実際, [3] においては homogeneous type の空間において議論を展開している.

M.H. Taibleson - G. Weiss [18] は $0 < p \leqq 1 \leqq q \leqq \infty$, $p \neq q$, $s \geqq [n(\frac{1}{p} - 1)]$ なる p, q, s に対して a が (p, q, s)-atom であるとは或る ball B が存在して $\operatorname{supp} a \subset B$, $\left(\frac{1}{|B|}\int_B |a(x)|^q dx\right)^{1/q} \leqq |B|^{-1/p}$, $\int_{R^n} a(x)x^\alpha dx = 0$ $(|\alpha| \leqq s)$ となる事であると定義した.

1 に於て $H^p(R^n)$ を $\mathcal{S}$ の双対空間 $\mathcal{S}'$ の中で構成した atom による Hardy class を Lipschitz space の双対空間の中で考える. その為に S. Campanato [1] が導入した空間を考える. 局所可積な函数 g で

$$|g|_{\eta, q', s} \equiv \sup_B \frac{1}{|B|^\eta} \inf_{P \in \mathcal{P}_s} \left(\frac{1}{|B|}\int_B |g - P|^{q'} dx\right)^{1/q'} < \infty$$

なるものの全体を $\mathcal{L}(\eta, q', s)$ と書く. ここで $\eta > 0$, $1 \leqq q' \leqq \infty$, $s \geqq 0$ は整数である. $\mathcal{P}_s$ は s 次以下の多項式全体

$\widetilde{\mathcal{L}}(\eta,\infty,s_0) \subset \mathcal{L}(\eta,q',s)$，$1 \le q' \le \infty$，$s_0 \le s$，であり、$a$ が (p,q,s)-atom で、$g \in \mathcal{L}((\frac{1}{p}-1),q',s)$，$\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$，ならば、$a \cdot g \in L^1(R^n)$ であり、a の対応する support を B とすれば、

$$\left|\int_{R^n} a \cdot g\, dx\right| \le |B| \left(\frac{1}{|B|}\int_B |a|^q dx\right)^{1/q} \left(\frac{1}{|B|}\int_B |g-P|^{q'} dx\right)^{1/q'}$$

$(P \in \mathcal{P}_s)$ ゆえに

$$\left|\int_{R^n} a \cdot g\, dx\right| \le |g|_{\frac{1}{p}-1,q',s} \le |g|_{\frac{1}{p}-1,\infty,s_0}$$

$(s \ge s_0 = [n(\frac{1}{p}-1)])$。そこで、$L(\frac{1}{p}-1,q',s) \equiv \mathcal{L}(\frac{1}{p}-1,q',s)/\mathcal{P}_s$ とおけば、(p,q,s)-atom a は $L(\frac{1}{p}-1,\infty,s_0)^*$ の元と見なしてよい。（実際は $L(\frac{1}{p}-1,q',s)^*$ と見なせる事を示したのであるが。）この事より。

$$H^{p,q,s} \equiv \left\{ f \in L(\tfrac{1}{p}-1,q',s_0)^* \,;\ f = \sum \lambda_j a_j,\ a_j \text{ は } (p,q,s)\text{-atom},\ \text{そして } \sum |\lambda_j|^p < \infty \right\}$$

と定義する。1. の定理5は $H^p(R^n) = H^{p,\infty,s_0}$ を示している。

Taibleson-Weiss [18] は (p,q,s)-atom が (p,∞,s)-atom に、また (p,q,s_0)-atom が (p,q,s)-atom に分解できる事を直接構成する方法で示している。そして次の結果を述べている。

<u>定理 6.</u>　$0 < p \le 1 \le q \le \infty$，$p \ne q$，$s \ge s_0 = [n(\frac{1}{p}-1)]$ のとき $H^{p,q,s} = H^{p,\infty,s_0}$

特異積分等の像をとらえる為に Coifman-Weiss[3]は molecule なる概念を導入した。更に Taibleson-Weiss[18]は それを拡張して次のような定義を与えている。$M\in L^q(R^n)$ が (p,q,s,ε)-molecule であるとは、或る $x_0\in R^n$ があって

$$\|M\|_q^{a/b}\cdot\|M(x)|x-x_0|^{nb}\|_q^{1-(a/b)}<\infty$$

$$\int_{R^n} M(x)x^\alpha dx=0 \quad (|\alpha|\le s)$$

が成立する事である。ここで $0<p\le 1\le q\le\infty$, $p\ne q$, $s\ge s_0=[n(\frac{1}{p}-1)]$, $\varepsilon>\mathrm{Max}\{\frac{1}{p}-1,\frac{s}{n}\}$, $a=1+\varepsilon-\frac{1}{p}$, $b=1+\varepsilon-\frac{1}{q}$.

同様の定義を筆者は10月の実解析セミナーで与えたのであるが、その定義では $q=\infty$ の場合が除かれるので、定義としては上の定義の方が良い。実解析セミナーでは $M^+(x)=\sup_{y>0}|(M*\varphi_y)(x)|\in L^p(R^n)$ となる事より $M\in H^p(R^n)$ を示したのであるが、Taibleson-Weiss は (p,q,s,ε)-molecule M が (p,q,s)-atom に分解できる事を直接示して、次の結果を得ている。

<u>定理7</u>　$0<p\le 1\le q\le\infty$, $p\ne q$, $s\ge s_0$ としておくと、M が (p,q,s,ε)-molecule ならば $M\in H^{p,q,s}$.

この結果と定理6とより、M が (p,q,s,ε)-molecule ならば $M\in H^p(R^n)$ が得られる。

$q=2$ の場合が応用上最も重要である。

molecule が $H^p(R^n)$ に入る事を別の方法で示しておく.

<u>Proposition 3</u>　$0 < p \leqq 1 \leqq q \leqq \infty$, $p \neq q$, $\varepsilon > \frac{1}{p} - 1$, $s_0 = [n(\frac{1}{p} - 1)]$ とする. M が (p, q, s_0, ε)-molecule ならば, $M \in H^p(R^n)$.

実解析セミナーでは, $q = 1$ の場合を省いたが, $q = 1$ の場合も正しい.

<u>Prop 3 の証明</u>　定理3より. $0 \leqq \varphi \in \mathcal{S}$, $\operatorname{supp}\varphi \subset (|x| \leqq 1)$, $\int_{R^n} \varphi(x)dx = 1$ なる φ をとり

$$M^+(x) \equiv \sup_{t>0} |(\varphi_t * M)(x)| \in L^p(R^n)$$

を示せばよい.

$$\|M\|_q^{a/b} \cdot \| M(x)|x|^{nb} \|_q^{1-(a/b)} \leqq 1$$

としておく. $\forall t > 0$ に対して.

$$\begin{aligned}(\varphi_t * M)(x) &= \int_{R^n} M(z)\varphi_t(x-z)\,dz \\ &= \int_{R^n} M(z)\left\{\varphi_t(x-z) - \sum_{k=0}^{s_0} \frac{1}{k!}((-z\cdot\nabla)^k \varphi_t)(x)\right\} dz\end{aligned}$$

と表わされる. M^* を M の Hardy-Littlewood の max. ft. とすれば, 最初の等式より.

$$M^+(x) \leqq M^*(x).$$

次に, $K_t(x,z) \equiv \varphi_t(x-z) - \sum_{k=0}^{s_0} \frac{1}{k!}((-z\cdot\nabla)^k\varphi_t)(x)$ とおき, 二番目の等式より.

$$\begin{aligned}(\varphi_t * M)(x) &= \left(\int_{|z|<r} + \sum_{j=1}^{\infty} \int_{2^{j-1}r \leqq |z| < 2^j r}\right) M(z)K_t(x,z)\,dz \\ &\equiv I^t(x) + \sum_{j=1}^{\infty} J_j^t(x)\end{aligned}$$

とおく. $r>0$ は後で定めることゝし,

$$\int_{R^n}\{M^+(x)\}^p dx \leq \int_{|x|<2r}\{M^*(x)\}^p dx$$
$$+\int_{|x|\geq 2r}\{\sup_{t>0}|I^t(x)|\}^p dx$$
$$+\sum_{j=1}^{\infty}\Big(\int_{|x|\geq 2^{j+1}r}+\int_{2r\leq|x|<2^{j+1}r}\Big)\{\sup_{t>0}|J_j^t(x)|\}^p dx$$

(1) $$\equiv K_1+K_2+\sum_{j=1}^{\infty}(K_3^j+K_4^j)$$

とおく. $|K_t(x,z)|\leq c|z|^{s_0+1}|x|^{-n-s_0-1}$ $(|x|>2|z|,\ 0<t<\infty)$ なる事より,

(2) $$|I^t(x)|\leq c\|M\|_\ell\, r^{s_0+1+n/\ell'}|x|^{-n-s_0-1} \qquad (|x|\geq 2r,\ t>0).$$

$$|J_j^t(x)|\leq c|x|^{-n-s_0-1}(2^j r)^{s_0+1-n\varepsilon}\Big(\int_{R^n}|M(z)|z|^{n\varepsilon}|^\ell dz\Big)^{1/\ell}$$

(3) $$\leq c|x|^{-n-s_0-1}(2^j r)^{s_0+1-n\varepsilon}\|M\|_\ell^{-a/(\frac{1}{p}-\frac{1}{\ell})}$$

$$(|x|\geq 2^{j+1}r,\ t>0).$$

また, $|((-z\cdot\nabla)^k\varphi_t)(x)|\leq c|y|^k|x|^{-n-k}$ なる事から, $|K_t(x,z)|\leq \varphi_t(x-z)+c\sum_{k=0}^{s_0}|y|^k|x|^{-n-k}$. $M_0(x)\equiv M(x)|x|^{n\varepsilon}$ とおけば,

(4) $$|J_j^t(x)|\leq c(2^j r)^{-n\varepsilon}M_0^*(x)+c\sum_{k=0}^{s_0}|x|^{-n-k}(2^j r)^{k-n\varepsilon}\|M\|_\ell^{-a/(\frac{1}{p}-\frac{1}{\ell})}.$$

K_1 については, $\ell\neq 1$ の場合は, max. fc. の L^ℓ-有界性より $K_1\leq c(r^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{\ell})}\|M\|_\ell)^p$ が得られる. $\ell=1$ の場合は, $p<1$ に注意すれば $K_1\leq c\,r^{n(1-p)}\|M\|_1^p$. 従って, $1\leq\ell\leq\infty$ に対して

$$K_1\leq c\Big(r^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{\ell})}\|M\|_\ell\Big)^p.$$

が得られる. K_2 に対しては, (2) を用いて

$$K_2\leq c\Big(r^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{\ell})}\|M\|_\ell\Big)^p$$

が, $p(n+s_0+1)>n$ なる事より得られる. K_3^j には (3) を用いて

$K_3^j \leqq c\left(r^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|M\|_q\right)^{-pa/(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} 2^{-panj}$ が得られ、$a = 1+\varepsilon-\frac{1}{p} > 0$ なる事より

$$\sum_{j=1}^{\infty} K_3^j \leqq c\left(r^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|M\|_q\right)^{-pa/(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}.$$

K_4^j に対しては、先ず(4)より

$$\begin{aligned} K_4^j \leqq\ & c(2^j r)^{-np\varepsilon}\int_{|x|<2^{j+1}r} \{M_\varepsilon^*(x)\}^p\,dx \\ & + c\sum_{k=0}^{s_0}(2^j r)^{p(k-n\varepsilon)}\|M\|_q^{-pa/(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\int_{2r\leqq|x|<2^{j+1}r}|x|^{-p(n+k)}\,dx \\ \equiv\ & L_1 + L_2 \end{aligned}$$

とおく。$L_2 \leqq c\left(r^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|M\|_q\right)^{-pa/(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(1+\log 2^j)\,2^{-pnaj}$. L_1 に関しては K_1 の場合と同様にして $L_1 \leqq c\left(r^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|M\|_q\right)^{-pa/(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\cdot 2^{-npaj}$ が得られる。ゆえに

$$\sum_{j=1}^{\infty} K_4^j \leqq c\left(r^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|M\|_q\right)^{-pa/(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}$$

以上の評価を (1)に用いて $r \equiv \|M\|_q^{-1/n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}$ とすれば $\int_{R^n}\{M^+(x)\}^p\,dx \leqq c$ が得られる。(q.e.d.)

3. <u>応用例</u>　atom と molecule の議論を Riesz-Bochner 平均に適用することができる。multiplier operator S^δ, $\delta > 0$, を $(S^\delta f)^\wedge(\xi) \equiv (1-|\xi|^2)_+^\delta \hat{f}(\xi)$ により定義すれば次の事が成立する。

<u>定理8</u>　(i)　$0 < p \leqq 1$, $\delta > \frac{n}{p} - \frac{n+1}{2}$ ならば S^δ は $H^p(R^n)$ から $H^p(R^n)$ への有界作用素である。

(ii)　$0 < p \leqq 1$, $\delta \leqq \frac{n}{p} - \frac{n+1}{2}$ ならば $S^\delta f \notin H^p(R^n)$ となる $f \in H^p(R^n)$ が存在する。

証明　(i)　a が $(p, 2, s_0)$-atom で. 対応する ball を $B \equiv B(0, r)$, 原点中心の半径が r の ball, とし. $S^\delta a$ が molecule となる事を示す.

$K(x) \equiv 2^{\delta+(n/2)} \pi^{n/2} \Gamma(\delta+1) J_{\frac{n}{2}+\delta}(2\pi|x|)(2\pi|x|)^{-\frac{n}{2}-\delta}$ とおけば

$(S^\delta a)(x) = (K * a)(x)$.

$$1 + \frac{s_0}{n} \leqq \frac{1}{p} < 1 + \frac{s_0+1}{n}, \quad \frac{n-1}{2} + s_0 < \delta \leqq \frac{n-1}{2} + s_0 + 1,$$
$$\delta > \frac{n}{p} - \frac{n+1}{2}$$

としておく. 先ず

(1) $\quad \|S^\delta a\|_2 \leqq \|a\|_2 \leqq c\, r^{n(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}$

(2) $\quad \left(\int_{|x|\leqq 2r} \left|(S^\delta a)(x)|x|^{n(1+\varepsilon-\frac{1}{2})}\right|^2 dx\right)^{1/2} \leqq c\, r^{n(1+\varepsilon-\frac{1}{2})} \|S^\delta a\|_2 \leqq c\, r^{n(1+\varepsilon-\frac{1}{p})}$.

$\left(\int_{|x|\geqq 2r} \left|S^\delta a(x)|x|^{n(1+\varepsilon-\frac{1}{2})}\right|^2 dx\right)^{1/2}$ の評価をする. $\delta > \frac{n}{p} - \frac{n+1}{2}$ であるから $\frac{1}{n}\left(\delta - \frac{n+1}{2}\right) > \varepsilon > \frac{1}{p} - 1$ なる $\varepsilon > 0$ をとっておく. $|y| < r$ に対して $|K(x-y)| \leqq c|x-y|^{-(n+1)/2-\delta} \leqq c|x|^{-(n+1)/2-\delta}$ なる事より,

(3)$'$ $\quad |(S^\delta a)(x)| \leqq c|x|^{-\frac{n+1}{2}-\delta} \|a\|_1 \leqq c\, r^{n(1-\frac{1}{p})} |x|^{-\frac{n+1}{2}-\delta}$

(3) $\quad \int_{|x|\geqq 2r} \left|(S^\delta a)(x)|x|^{n(1+\varepsilon-\frac{1}{2})}\right|^2 dx \leqq c\, r^{2n(1+\varepsilon-\frac{1}{p}) - 2(\delta - \frac{n+1}{2})}$.

また. a が多項式と直交する事より. $(S^\delta a)(x) = \int_{|y|<r} a(y) \cdot \left\{K(x-y) - \sum_{k=0}^{s_0} \frac{1}{k!}(-y\cdot\nabla)^k K(x)\right\} dy$.　そして $K(x-y) - \sum_{k=0}^{s_0} \frac{1}{k!}(-y\cdot\nabla)^k K(x) = O\left(|y|^{s_0+1}|x|^{-\frac{n+1}{2}-\delta}\right)$ であるから

(4)$'$ $\quad |(S^\delta a)(x)| \leqq c|x|^{-\frac{n+1}{2}-\delta} \int_{|y|<r} |y|^{s_0+1} |a(y)|\, dy \leqq c\, r^{s_0+1+n-\frac{n}{p}} |x|^{-\frac{n+1}{2}-\delta}$

(4) $\quad \int_{|x|\geq 2r} \left| (S^\delta a)(x)|x|^{n(1+\varepsilon-\frac{1}{2})}\right|^2 dx \leq C\, r^{2n(1+\varepsilon-\frac{1}{p})+2(\frac{n-1}{2}+s_0+1-\delta)}$.

$r\geq 1$ の場合は(3)を、$r\leq 1$ の場合は(4)を用いて、

$$\left(\int_{|x|\geq 2r} \left|(S^\delta a)(x)|x|^{n(1+\varepsilon-\frac{1}{2})}\right|^2 dx\right)^{1/2} \leq C\, r^{n(1+\varepsilon-\frac{1}{p})}$$

従って、(2)の評価より、

$$\left(\int_{R^n} \left|(S^\delta a)(x)|x|^{n(1+\varepsilon-\frac{1}{2})}\right|^2 dx\right)^{1/2} \leq C\, r^{n(1+\varepsilon-\frac{1}{p})}$$

これと、(1)とより、

$$\|S^\delta a\|_2 \left(\int_{R^n} \left|(S^\delta a)(x)|x|^{n(1+\varepsilon-\frac{1}{2})}\right|^2 dx\right)^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})/2(1+\varepsilon-\frac{1}{p})} \leq C.$$

(3)', (4)' とより、$|(S^\delta a)(x)| \leq C|x|^{-(n+1)/2-\delta}$ $\quad (|x|\geq 2r)$. 従って $|(S^\delta a)(x)||x|^{s_0} \leq C|x|^{-n-(\delta-s_0-\frac{n-1}{2})}$ $\quad (|x|\geq 2r)$. ゆえに、$|\alpha| \leq s_0$ なる α に対して、$(S^\delta a)(x)\cdot x^\alpha \in L^1(R^n)$ であるから、

$$\int_{R^n} (-2\pi i x)^\alpha (S^\delta a)(x)\, dx = \left(\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^\alpha (S^\delta a)^\wedge\right)(0) = 0$$

従って、$S^\delta a$ は $(p,2,\varepsilon)$-molecule である。

(ii) $\quad \hat{\varphi}_1(\xi) = 1 \quad (|\xi|\leq 1)$, $\quad \mathrm{supp}\, \hat{\varphi}_2(\xi) \subset (|\xi| \leq \frac{1}{2})$ なる φ_1, $\varphi_2 \in \mathcal{S}$ をとり、$f = \varphi_1 - \varphi_2$ とおけば $f \in H^p(R^n)$. そして、$S^\delta f = S^\delta \varphi_1 - S^\delta \varphi_2$. $(S^\delta \varphi_2)^\wedge(\xi) = (1-|\xi|^2)^\delta \hat{\varphi}_2(\xi)$ であるから $S^\delta \varphi_2 \in \mathcal{S}$. 一方、$S^\delta \varphi_1(x) = K(x) \notin L^p(R^n)$ $(\delta \leq \frac{n}{p} - \frac{n+1}{2})$. $\quad$ (q.e.d.)

定理8の(i)は、Prop. 2を用いれば、Fefferman-Stein [7] の Th. 10 によっても得られる。また、A. Miyachi [12] の Th. 1', 2' と、interpolation とによっても得られる。

定理8に関連した結果が [15] に報告されている。

$\delta > 0$, $R > 0$ とし、multiplier operator S_R^δ を

$$(S_R^\delta f)^\wedge(\xi) \equiv \left(1 - \frac{|\xi|^2}{R^2}\right)_+^\delta \hat{f}(\xi)$$

で定義し、その max. operator S_*^δ を

$$(S_*^\delta f)(x) \equiv \sup_{R>0} |(S_R^\delta f)(x)|$$

で定義する。

定理8の(i)は、$0 < p \leq 1$, $\delta > \frac{n}{p} - \frac{n+1}{2}$ のとき、$\|S_R^\delta f\|_{H^p(R^n)} \leq C\|f\|_{H^p(R^n)}$, C は、R に無関係、となる事を示している。Stein-Taibleson-Weiss は [15] で、次の結果を報告している。

<u>定理9</u>　　$0 < p < 1$, $\delta = \frac{n}{p} - \frac{n+1}{2}$ のとき

$\exists C$; $|\{x ; (S_*^\delta f)(x) > \lambda\}| \leq \left(\frac{C}{\lambda}\|f\|_{H^p(R^n)}\right)^p$ $(\lambda > 0,\ f \in H^p(R^n))$

この証明を試みたので、それを紹介する。[15] でも述べられているように、次の Lemma を示す。

<u>Lemma</u>　　$0 < p < 1$, non-negative ft. g_j と positive number c_j が、$|\{x ; g_j(x) > \lambda\}| \leq \lambda^{-p}$ $(\lambda > 0,\ j = 1, 2, \cdots)$, $\sum_{j=1}^\infty c_j^p \leq 1$ であれば、

$$|\{x ; \sum_{j=1}^\infty c_j g_j(x) > \lambda\}| \leq \frac{2-p}{1-p}\lambda^{-p} \quad (0 < \lambda < \infty)$$

<u>証明</u>　（E.M. Stein - N.J. Weiss, On the convergence of Poisson integrals. Trans. A.M.S. 140 (1969) p.37 Lemma 2.3 の手法による。）$\lambda > 0$ を与えておく。u_j, v_j を次のように定義する。

$$u_j(x) = g_j(x), \text{ if } g_j(x) > \lambda/c_j, \quad = 0, \text{ if } g_j(x) \leq \lambda/c_j$$

$$v_j(x) = g_j(x) - u_j(x)$$

すると $(\sum c_j u_j = 0) \cap (\sum c_j v_j \leq \lambda) \subset (\sum c_j g_j \leq \lambda)$. ゆえに

(1) $\quad |(\sum c_j g_j > \lambda)| \leq |(\sum c_j u_j > 0)| + |(\sum c_j v_j > \lambda)|$.

そして $(\sum c_j u_j > 0) \subset \bigcup_j (u_j > 0) = \bigcup_j (g_j > \lambda/c_j)$,

$|(g_j > \lambda/c_j)| \leq \lambda^{-p} c_j^p$. ゆえに

(2) $\quad |(\sum c_j u_j > 0)| \leq \lambda^{-p} \sum c_j^p \leq \lambda^{-p}$

また $(v_j > t) = \phi \quad (t \geq \lambda/c_j)$, $(v_j > t) = (t < g_j \leq \lambda/c_j) \subset$ $(g_j > t) \quad (t < \lambda/c_j)$. 従って

$$\int_{R^n} v_j(x)dx = \int_0^\infty |(v_j > t)|dt \leq \int_0^{\lambda/c_j} |(g_j > t)|dt$$
$$\leq \int_0^{\lambda/c_j} t^{-p} dt = (1-p)^{-1}\left(\frac{\lambda}{c_j}\right)^{1-p}$$

従って

(3) $$\int_{R^n} \sum c_j v_j(x)\,dx \leq \frac{\lambda^{1-p}}{1-p} \sum c_j^p \leq \frac{\lambda^{1-p}}{1-p}$$

(1), (2), (3) より $|(\sum c_j g_j > \lambda)| \leq \frac{2-p}{1-p}\lambda^{-p}$ が得られる. (q.e.d.)

<u>定理9の証明</u> $\quad f \in H^p(R^n)$ とすれば $f = \sum \gamma_j a_j$, $\sum |\gamma_j|^p < 2\|f\|^p_{H^p(R^n)}$, a_j は (p, ∞, s_0)-atom, と表わされるから Lemma より (p, ∞, s_0)-atom a に対して

(*) $\quad |\{x;\ (S_*^\varepsilon a)(x) > \lambda\}| \leq A\lambda^{-p} \quad (0 < \lambda < \infty)$

が示されればよい. ここで A は n, p のみに関係する定数である.

$\operatorname{supp} a \subset (|x| \leq r)$, $\|a\|_\infty \leq r^{-n/p}$, $\int_{R^n} a(x)x^\alpha dx = 0$ ($|\alpha| \leq s_0$) として (*)を示せば十分である.

$\delta > (n-1)/2$ であるから

(1) $\qquad (S_*^\delta a)(x) \leqq C a^*(x) \qquad (x \in R^n)$.

$K(x) \equiv 2^{\delta+(n/2)}\pi^{n/2}\Gamma(\delta+1)J_{\frac{n}{2}+\delta}(2\pi|x|)(2\pi|x|)^{-\frac{n}{2}-\delta}$, $K_\varepsilon(x) \equiv \varepsilon^{-n}K(\varepsilon^{-1}x)$ とすれば. $(S_R^\delta a)(x) = (K_{R^{-1}} * a)(x)$. $|x| \geqq 2r$ における $(K_{R^{-1}} * a)(x)$ を評価する.

$$(K_{R^{-1}} * a)(x) = \int_{R^n} K_{R^{-1}}(x-y)a(y)dy$$
$$= \int_{R^n}\left\{K_{R^{-1}}(x-y) - \sum_{k=0}^{s_0}\frac{1}{k!}((-y\cdot\nabla)^k K_{R^{-1}})(x)\right\}a(y)dy$$

と表わされる. $R^{-1} > |x| - r$ の場合 $K_{R^{-1}}(x,y) \equiv K_{R^{-1}}(x-y) - \sum_{k=0}^{s_0}\frac{1}{k!}((-y\cdot\nabla)^k K_{R^{-1}})(x) = \frac{1}{(s_0+1)!}((-y\cdot\nabla)^{s_0+1}K_{R^{-1}})(x-\theta y)$, $0 < \theta < 1$, であるから. $|y| < r$ に対して. $|K_{R^{-1}}(x,y)| \leqq C|y|^{s_0+1}R^{n+s_0+1} \leqq C|y|^{s_0+1}|x|^{-n-s_0-1}$. ゆえに

$$|(K_{R^{-1}} * a)(x)| \leqq C|x|^{-n-s_0-1}\int_{|y|<r}|y|^{s_0+1}|a(y)|dy$$

(2) $$\leqq Cr^{s_0+1+n-(n/p)}|x|^{-n-s_0-1} \leqq C|x|^{-n/p} \qquad (R^{-1} > |x|-r)$$

$R^{-1} \leqq |x| - r$ の場合. 先ず $|K_{R^{-1}}(x-y)| \leqq CR^n(R|x-y|)^{-\frac{n+1}{2}-\delta} \leqq CR^{\frac{n-1}{2}-\delta}|x|^{-\frac{n+1}{2}-\delta}$ $(|y| < r)$ なる事より

$$|(K_{R^{-1}} * a)(x)| \leqq CR^{\frac{n-1}{2}-\delta}|x|^{-\frac{n+1}{2}-\delta}\int_{|y|<r}|a(y)|dy$$

(3) $$\leqq C(Rr)^{-(\delta-\frac{n-1}{2})}|x|^{-\frac{n}{p}} \qquad (R^{-1} \leqq |x|-r)$$

もう一つの評価として. $|K_{R^{-1}}(x,y)| \leqq C|y|^{s_0+1}R^{n+s_0+1}(R|x-\theta y|)^{-\frac{n+1}{2}-\delta} \leqq C|y|^{s_0+1}R^{-\delta+\frac{n+1}{2}+s_0}|x|^{-\delta-\frac{n+1}{2}}$ $(|y| < r)$ を用いて

(4) $$|(K_{R^{-1}} * a)(x)| \leqq C(Rr)^{\frac{n-1}{2}+s_0+1-\delta}|x|^{-\frac{n}{p}} \qquad (R^{-1} \leqq |x|-r)$$

$(n-1)/2 < \delta < (n-1)/2 + s_0 + 1$ であるから $Rr \geqq 1$ のときは(3)

$Rr \leqq 1$ のときは(4)を用いて.

(5) $$|(K_{R^{-1}} * a)(x)| \leqq c|x|^{-\frac{n}{p}} \quad (R^{-1} \leqq |x| - r).$$

(2)と(5)より. $(S_*^\delta a)(x) \leqq c|x|^{-n/p}$ $(|x| \geqq 2r)$. 従って.

(6) $$|\{x \,;\, |x| \geqq 2r,\ (S_*^\delta a)(x) > \lambda\}| \leqq c\lambda^{-p}.$$

また. (1)より

$$\int_{|x|<2r} \{(S_*^\delta a)(x)\}^p dx \leqq c r^{n(1-\frac{p}{2})} \|S_*^\delta a\|_2^p$$
$$\leqq c r^{np(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})} \|a\|_2^p \leqq c r^{np(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})} r^{n(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})p} = c.$$

ゆえに. $|\{x \,;\, |x|<2r,\ (S_*^\delta a)(x) > \lambda\}| \leqq c\lambda^{-p}$. これと(6)とより. $|\{x \,;\, (S_*^\delta a)(x) > \lambda\}| \leqq A\lambda^{-p}$ と(*)が得られる. (q.e.d.)

参考文献

1. S. Campanato, Proprietà di una famiglia di spazi funzionali. Ann. Scuola Norm Sup. Pisa, 18 (1964) 137-160.
2. R.R. Coifman, A real variable characterization of H^p. Studia Math. 51 (1974) 269-274.
3. R.R. Coifman and G. Weiss, Extensions of Hardy spaces and their use in analysis. Bull. A.M.S. 83 (1977) 569-645.
4. P.L. Duren, Theory of H^p spaces. Academic Press (1970)
5. P.L. Duren, B.W. Romberg and A.L. Shields, Linear functionals on H^p spaces with $0<p<1$. J. Reine Angew. Math.

238 (1969)

6. C. Fefferman, Characterizations of bounded mean oscillation. Bull. A.M.S. 77 (1971) 587–588.

7. C. Fefferman and E. M. Stein, H^p spaces of several variables. Acta Math. 129 (1972) 137–193.

8. A. P. Frazier, The dual space of H^p of the polydisc for $0<p<1$. Duke Math. J. 39 (1972) 369–379.

9. B. Grevholm, On the structure of the spaces $\mathcal{L}_k^{p,\lambda}$. Math. Scand. 26 (1970) 241–254.

10. C. Herz, H^p spaces of martingales, $0<p\leq 1$. Z. W. 28 (1974) 189–205.

11. R. H. Latter, A characterization of $H^p(R^n)$. In terms of atoms. Studia Math. 62 (1978) 93–101.

12. A. Miyachi, Fourier multipliers for $H^p(R^n)$. Preprint

13. P. Sjölin, An H^p inequality for strong singular integrals. Math. Z. 165 (1979) 231–238.

14. E. M. Stein, Singular integrals and differentiability properties of functions. Princeton (1970).

15. E. M. Stein, M. H. Taibleson and G. Weiss, Weak Type estimates for maximal operators on certain H^p classes Notice A.M.S. 26 (1979) No. 6 A.548.

16. E. M. Stein and G. Weiss, On the theory of harmonic functions of several variables I. Acta Math. 103 (1960) 25-62.

17. E. M. Stein and N. J. Weiss, On the convergence of Poisson integrals. Trans. A.M.S. 140 (1969) 35-54.

18. M. H. Taibleson and G. Weiss, The molecular characterization of certain Hardy spaces. Preprint.

19. A. Uchiyama, On the characterization of $H^p(R^n)$ with atoms. Preprint.

20. T. Walsh, The dual of $H^p(R_+^{n+1})$ for $p<1$. Canad. J. Math. 25 (1973) 567-577.