数理解析研究所講究録
第383巻 1980年 21-37

Homogeneous type の空間上での H^p について

東北大 教養部数学科 内山明人

概要。 $\psi_0(x) \in \mathcal{S}(R^n)$, $\int \psi_0 \, dy \neq 0$ とする. $f \in \mathcal{S}'$, $x \in R^n$, $M > 0$ に対し,

$$f^+(x) = \sup_{t>0} |f * \psi_{0_t}(x)|$$

$$f^{*M}(x) = \sup \{ |f * \psi_t(x)| : \psi \in \mathcal{S}$$

$$\operatorname{supp} \psi \subset \{ y \in R^n : |y| < 1 \},$$

$$\|D^\alpha \psi\|_\infty \quad (|\alpha| \leq M) \}$$

と定義する。但し, $\psi_t(y) = t^{-n} \psi(y/t)$.

Fefferman - Stein [11] は次を示した。

定理A. $\forall p > 0$ に対し $M(p,n)$ が存在し, $\forall M \geq M(p,n)$ に対し,

$$c \|f^+\|_{L^p} \leq \|f^{*M}\|_{L^p} \leq C \|f^+\|_{L^p}$$

が成立する。但し, c と C は, ψ_0 , p, n , M にのみよる。

以下, 定理Aを, homogeneous type の空間で考察する。

問題の説明（R^nの場合）

以下の２ページにおいては，xは$(x_1, \cdots, x_n)$をいみし，$|x|$は$\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$をいみする。

まず，Coifman-Weiss[8]によって，$H^p(R^n)$を定義する。

関数$a(x)$が p-atom（但し$0 < p \leq 1$）であるとは，ある球$B(x_0, r) = \{x : |x - x_0| < r\}$が存在して

$$\operatorname{supp} a \subset B(x_0, r)$$

$$\|a\|_\infty \leq |B(x_0, r)|^{-1/p}$$

$$\int a(x)p(x) = 0 \quad (\forall p(x) : [n/p - n] \text{次以下の多項式})$$

なることである。但し，$|B|$はBのルベーグ測度をいみする。$[t]$はtの整数部分をいみする。

$f \in \mathcal{S}'(R^n)$と$0 < p \leq 1$とに対し

$$\|f\|_{H^p} = \inf \left\{ \left(\sum |\lambda_j|^p\right)^{1/p} : \exists \{a_j(x)\}_{j=1}^\infty \text{ p-atoms s.t. } f = \sum \lambda_j a_j \right\}$$

と定義する。もしも，かかる$\{\lambda_j\}$が存在しないときは，$\|f\|_{H^p} = \infty$と定義する。

$$H^p(R^n) = \{ f \in \mathcal{S}'(R^n) : \|f\|_{H^p} < \infty \}$$

と定義する。

Fefferman-Riviere-Sagher [10] の結果を使って，Coifman [5]は次を示した。

定理B. $1 \geq p > 0$, $M > [n/p - n]$ であれば,
$\forall f \in \mathcal{S}'(R^n)$ に対し

$$c\|f^{*M}\|_{L^p} \leq \|f\|_{H^p} \leq C\|f^{*M}\|_{L^p}$$

が成立する。但し, C と c は M, p, n にのみよる。

Coifman は $n=1$ の case で示した. $n \geq 2$ は, Latter [14] による。

定理A, Bをあわせることにより, 次が得られる。

$$(*) \quad c\|f^+\|_{L^p} \leq \|f\|_{H^p} \leq C\|f^+\|_{L^p}.$$

$p=1$ の場合には, Carleson [3] が (*) の別証明を与えている。Carleson の証明を拡張して, Coifman-Weiss-Meyer は (*) が homogeneous type の空間上でも, $p=1$ の場合には成立することを示した。[[8] p642.] この証明は, H^1-BMO の duality を使っている。しかし, $p<1$ のときは, $\|\cdot\|_{H^p}$ はノルムにならないので, dual space を使う議論は, あまり有効ではない。

ある種の条件をみたす homogeneous type の空間上においては, 定理Aが成立するという結果を得たので以下報告する。一方, Macias-Segovia [16] は, 定理Bが homogeneous type の空間上で成立することを示しているので, 我々の結果とあわせることにより, (*) が homogeneous type の空間上において成立することがわかる。

本論

以下，x，y，z は位相空間 X の元とする。X にはボレル測度 μ と，仮似距離 d が定義され，次をみたす。

(0) $d(x,y) = d(y,x) \geq 0$

(1) $d(x,y) > 0 \quad (x \neq y)$

(2) $d(x,z) < A(d(x,y) + d(y,z))$

(3) $A^{-1}r \leq \mu(B(x,r)) \leq r$

但し，$B(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$ $(r>0)$ が点 x の開近傍の基をなす。

$K(r,x,y)$ は $R^{+} \times X \times X$ 上で定義された非負連続関数で，次をみたす。

(4) $K(r,x,y) = 0 \quad \text{if} \quad d(x,y) > r$

(5) $K(r,x,x) > A^{-1} > 0$

(6) $K(r,x,y) \leq 1$

(7) $|K(r,x,y) - K(r,x,z)| \leq (d(y,z)/r)^{\gamma}$.

次のことに注意せよ。

$\exists C_1 > 0$, $\exists C_2 > 0$ s.t.

(8) $C_1 K(r,x,y) > 1 \quad \text{if} \quad d(x,y) < C_2 r$

定義. $f \in L^{1}_{loc}(X)$ のとき，

$$F(r,x,f) = \int K(r,x,y) f \, d\mu(y) / r$$

$$f^{+}(x) = \sup_{r>0} |F(r,x,f)|$$

$$M_p(f)(x) = \sup_{r>0} (F(r, x, |f|^p))^{1/p}$$

$$L(f, 0) = \sup_{x\in X, r>0} \inf_{c\in R} \int_{B(x,r)} |f(y)-c| \, d\mu(y)/r$$

$$L(f,\alpha) = \sup_{x\in X,\, y\in X,\, x\neq y} |f(x) - f(y)| / d(x,y)^{\alpha}$$

$$(\alpha > 0)$$

$$\|f\|^{(\alpha)} = L(f,\alpha) \quad \text{if} \quad \mu(X) = \infty$$

$$\|f\|^{(\alpha)} = L(f,\alpha) + \left|\int_X f(y)\, d\mu(y)\right| / \mu(X)^{\alpha+1}$$

$$\text{if} \quad \mu(X) < \infty$$

$$\mathcal{L}_\alpha(X) = \{ f \in L^\infty(X) : \|f\|^{(\alpha)} < \infty \}$$

定義. $\int a(y)\, d\mu(y) = 0$ かつ $\exists B(x_0, r_0)$ s.t. $\mathrm{supp}\, a \subset B(x_0, r_0)$, $\|a\|_\infty \leq r_0^{-1/p}$ のとき, $a(x)$ を p-atom と呼ぶ. (但し $0 < p \leq 1$)

注意. $\|a\|_{\mathcal{L}^*_{1/p-1}} \leq 1$ は明らかである。(但し, $\mathcal{L}^*_{1/p-1}$ は, $\mathcal{L}_{1/p-1}$ の dual space.)

定義. $f \in \mathcal{L}^*_{1/p-1}$ に対し

$$\|f\|_{H^p} = \inf \{ (\sum |\lambda_i|^p)^{1/p} : \exists \{a_i(x)\}_{i=1}^\infty \text{ p-atoms s.t. } f = \sum \lambda_i a_i \}$$

定義. $f \in L^1_{loc}(X)$ のとき,

$$f^*(x) = \sup \{ \left| \int f(y) \varphi(y)\, d\mu(y) \right| / r : r > 0,$$
$$\mathrm{supp}\, \varphi \subset B(x,r), \ L(\varphi,\gamma) \leq r^{-\alpha},$$
$$\|\varphi\|_\infty \leq 1 \}$$

我々の結果は次のものである。

定理1. X のみできまるある $p_1 < 1$ が存在して次をみたす。任意の $f \in L^1(X)$ と任意の $p > p_1$ とに対し，

$$\|f^*\|_{L^p} \leq c_1 \|f^+\|_{L^p}$$

が成立する。但し，c_1 は p と X とのみできまる。

注意．$p > 1$ のときは，上の結果は，Hardy - Littlewood の maximal theorem から明らかである。$p = 1$ の場合は，[8] によって示されている。

Macias - Segovia [16] は，次を示した。

定理C. $f \in L^1(X)$ かつ $1 \geq p > 1/(1+\gamma)$ とすると，

$$c_2 \|f^*\|_{L^p} \leq \|f\|_{H^p} \leq c_3 \|f^*\|_{L^p} .$$

但し，c_2 と c_3 は p と X とのみによる。

注意．定理Cは，[15] と同じ方法でも示せる。

定理1とCとの系として，次を得る。

系1. $p_2 < 1$ が X のみによってとることができ，$\forall f \in L^1(X)$ と $1 \geq \forall p > p_2$ とに対し，

$$\|f^+\|_{L^p} \leq c_4 \|f\|_{H^p} \leq c_5 \|f^*\|_{L^p} \leq c_6 \|f^+\|_{L^p}$$

但し，c_4，c_5，c_6 は p と X のみによる。

定理1の証明のために，補題を用意する。

以下，$N = \{1, 2, \cdots\}$，$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$ とする。

補題1. $d\nu$ を $X \times R^{+}$ 上の非負測度で

(10) $\nu(B(x,r)\times(0,r)) \le r^{1+\delta}$

をみたすとする。但し，$\delta \ge 0$ は r と x に独立。
このとき，$\forall p>1$ と $\forall f \in L^{p}(X)$ に対し次が成立.

$$\left\{\iint_{X\times R^{+}} |F(r,y,f)|^{p(1+\delta)} \, d\nu(y,r)\right\}^{1/(p(1+\delta))} \le c_{p,\delta} \, \|f\|_{L^{p}_{d\mu}(X)}.$$

注意. $\delta = 0$ のときは，よくしられた Carleson の結果である。$\delta > 0$ のときは，Duren [9] の結果である。

証明. $f \in L^{p}(X)$ ，$\lambda > 0$ とする.

$$V_\lambda = \{(x,r) \in X\times R^{+} : |F(r,x,f)| > \lambda\}$$

(11) $q = 2A$.

とする.

$$W_{n,\lambda} = \{x \in X : \sup_{q^{n-1} < r \le q^{n}} |F(r,x,f)| > \lambda\}$$

とすると $\exists M_{f,\lambda}$: $W_n = \Phi$ if $n > M$.
各 $n \le M$ に対し $\{B(y_{nj}, q^{n})\}_j$ がとれて次をみたす.

(12) $y_{nj} \in W_{n,\lambda}$

$B(y_{nj}, q^{n}) \cap (\bigcup_{m=n+1}^{M} \bigcup_i B(y_{mi}, q^{m})) = \Phi$

$\forall x \in W_{n,\lambda}$ に対し

$B(x, q^{n}) \cap (\bigcup_{m=n}^{M} \bigcup_i B(y_{mi}, q^{m})) \ne \Phi$.

(2) と (11) より，

$$V_\lambda \subset \cup_n \cup_j \left(B(y_{nj}, q^{n+1}) \times (0, q^n) \right).$$

よって,

$$\lambda^{p(1+\delta)} \nu(V_\lambda)$$
$$\leq \sum_n \sum_j \nu(B(y_{nj}, q^{n+1}) \times (0, q^n)) \lambda^{p(1+\delta)}$$
$$\leq \sum_n \sum_j q^{(n+1)(1+\delta)} \left(\int_{B(y_{nj}, q^n)} |f(y)|\, d\mu(y) / q^{n-1} \right)^{p(1+\delta)}$$
$$\leq \sum_n \sum_j q^{(n+1)(1+\delta)} q^{p(1+\delta)} \left(\int_{B(y_{nj}, q^n)} |f(y)|^p\, d\mu(y) / q^n \right)^{1+\delta}$$
$$\leq c_{p,\delta} \left(\sum_n \sum_j \int_{B(y_{nj}, q^n)} |f(y)|^p\, d\mu(y) \right)^{1+\delta}$$
$$\leq c_{p,\delta} \left(\int_X |f(y)|^p\, d\mu(y) \right)^{1+\delta}$$

よって, Marcinkiewicz の補間定理から, 補題1が示される。

補題2. $g(x)$ を, X 上で定義された非負関数とする. すると, 各 $t > 0$ に対し, $\{x(g,t,j)\}_{j=1,2,\cdots}$ が存在して次をみたす.

(20) $1 \leq C_1 \sum_j K(t, x(g,t,j), y) \leq C_3 \quad (\forall y \in X)$

(21) $g(x(g,t,j)) \leq C_4 F(t, x(g,t,j), g^{1/2})^2 \quad (\forall j)$

証明. まず, 次をみたす $\{y(t,j)\}_j$ をえらぶ

(22) $d(y(t,i), y(t,j)) \geq (2A)^{-1} C_2 t \quad (i \neq j)$

(23) $\quad \sum_j \chi_{B(y(t,j),\,(2A)^{-1}C_2 t)}(x) \geq 1 \qquad (\forall x \in X)$

各 $y(t,j)$ に対し，$x(t,j)$ をつぎのようにとる。

(24) $\quad d(x(g,t,j),\, y(t,j)) \leq (2A)^{-1} C_2 t$

(25) $\quad g(x(g,t,j)) \leq$

$$\left(\int_{B(y(t,j),\,(2A)^{-1}C_2 t)} g(y)^{1/2}\, d\mu(y) \,/\, ((2A)^{-2} C_2 t) \right)^2$$

すると，(8)，(22)，(23)，(24)，(25) から (20)，(21) が出る。

補題 3．X のみできまる $p_1 < 1$ と C_5 が存在して次をみたす。$\forall f \in L^1_{loc}(X)$ と

$$\operatorname{supp} \varphi \subset B(x_0, r_0),\ L(\varphi, \gamma) \leq r_0^{-\gamma},\ \|\varphi\|_\infty \leq 1$$

をみたす $\forall \varphi$ $\forall x_0$ $\forall r_0$ とに対し，

$$\left| \int f(y)\varphi(y)\, d\mu(y) \right| / r_0 \leq$$
$$C_5 \left(\int_{B(x_0, r_0)} f^+(y)^{p_1}\, d\mu(y) \,/\, r_0 \right)^{1/p_1}$$

注意．以下の証明は，Carleson - Garnett [4] の idea を少し借用した．

証明．$r_0 = 1$ として，一般性を失わない。

(30) $\quad \varepsilon = 1/(4C_3)$

とする。η は X のみによる十分小なる正数とする。以下，$\varphi(x) \geq 0$ として示す。まず，次をみたす $\{x_{sj}\}_{s=1,2,\cdots;\, j=1,2,\cdots j(s)}$ $\subset X$ を帰納的に構成する。

$$(31)\quad \left\| \sum_{j=1}^{j(s)} \chi_{B_{sj}} \right\|_\infty \le C_3 \qquad (\forall s \in N)$$

但し、 $B_{sj} = B(x_{sj}, C_2 \eta^s)$

$$(32)\quad f^+(x_{sj}) \le C_4 F(\eta^s, x_{sj}, f^{+1/2})^2$$

$$(33)\quad 0 \le \varphi_s(x) \le (1-\varepsilon)^s$$

但し、

$$(34)\quad \varphi_s(x) = \varphi(x) - \sum_{i=1}^{s} \varepsilon(1-\varepsilon)^{i-1} \sum_{j=1}^{j(i)} C_1 K(\eta^i, x_j, x)$$

まず、$\varphi_0(x) = \varphi(x)$ とおく。$\{x_{ij}\}_{i=1,\cdots,s-1;\, j=1,\cdots,j(i)}$ が構成されたとする。φ_{s-1} を(34)で定義する。すると、(31)と(7)とから、

$$\begin{aligned}(35)\quad |\varphi_{s-1}(x) - \varphi_{s-1}(y)| &\le |\varphi(x) - \varphi(y)| + \\ &\sum_{i=1}^{s-1} \varepsilon(1-\varepsilon)^{i-1} \sum_j C_1 |K(\eta^i, x_{ij}, x) - K(\eta^i, x_{ij}, y)| \\ &\le d(x,y)^\gamma + \sum_{i=1}^{s-1} \varepsilon(1-\varepsilon)^{i-1} C_1 2 C_3 (d(x,y)/\eta^i)^\gamma \\ &\le d(x,y)^\gamma \{ 1 \\ &\quad + \varepsilon(1-\varepsilon)^{-1} 2C_1C_3 ((1-\varepsilon)/\eta^\gamma)^{s-1} (1 - \eta^\gamma/(1-\varepsilon))^{-1} \} \\ &\le C((1-\varepsilon)/\eta^\gamma)^{s-1} d(x,y)^\gamma\end{aligned}$$

$\Omega_{s,\lambda} = \{ x \in X : \varphi_{s-1}(x) > \lambda(1-\varepsilon)^{s-1} \}$ とおく。$g = f^+$ と $t = \eta^s$ とに対して補題2を適用すると、(20)-(21)をみたす $\{x(f^+, \eta^s, j)\}_{j=1,2,\cdots}$ が得られる。$\Omega_{s,2/3}$ に含まれる $\{x(f^+, \eta^s, j)\}$ を $\{x_{sj}\}_{j=1}^{j(s)}$ と定義する。すると、(31)と(32)はみたされる。(20)より

$$(36)\quad \varepsilon(1-\varepsilon)^{s-1} C_1 \sum_{j=1}^{j(s)} K(\eta^s, x_{sj}, y) \le C_3 \varepsilon(1-\varepsilon)^{s-1}$$

もしも，

$$\mathrm{supp}\, K(\eta^s, x, \cdot) \cap \Omega_{s,1-\varepsilon} \neq \phi$$

とすると，(35) より $x \in \Omega_{s,2/3}$. よって，(20) より，

(37) $\quad \varepsilon(1-\varepsilon)^{s-1} \leq \varepsilon(1-\varepsilon)^{s-1} C_1 \sum_{j=1}^{j(s)} K(\eta^s, x_{sj}, y)$

$$(\forall y \in \Omega_{s,1-\varepsilon}).$$

同様に，$\mathrm{supp} K(\eta^s, x, \cdot) \cap \Omega^c_{s,1/2} \neq \phi$ とすると，(35) より，$x \notin \Omega_{s,2/3}$．よって，

(38) $\quad \sum_j K(\eta^s, x_{sj}, y) = 0 \qquad (\forall y \in \Omega^c_{s,1/2})$

となり，(30)，(36)，(37)，(38) から (33) が出る。

以上より，

$$\varphi(x) = \sum_{s \in N} \sum_{j=1}^{j(s)} \varepsilon(1-\varepsilon)^{s-1} C_1 K(\eta^s, x_{sj}, x)$$

となり，

$$\int f(y)\varphi(y)\, d\mu(y) =$$
$$\sum_{s \in N} \varepsilon(1-\varepsilon)^{s-1} \sum_j C_1 \int f(y) K(\eta^s, x_{sj}, y)\, d\mu(y)$$
$$= C_1 \varepsilon(1-\varepsilon)^{-1} \sum_s \sum_j (1-\varepsilon)^s \eta^s F(\eta^s, x_{sj}, f).$$

(32) より

$$\left| \sum_s \sum_j (1-\varepsilon)^s \eta^s F(\eta^s, x_{sj}, f) \right|$$
$$\leq \sum \sum C_4 (1-\varepsilon)^s \eta^s F(\eta^s, x_{sj}, f^{+1/2})^2$$
$$= C_4 \iint_{X \times R^+} (F(r, x, f^{+1/2}))^2\, d\nu(x, r)$$

但し，$\nu = \sum_s \sum_j (1-\varepsilon)^s \eta^s \delta_{(x_{sj}, \eta^s)}$

$\delta_{(x,r)}$ は点 (x, r) の Dirac 測度

$$\nu(B(x,r)\times(0,r)) \le Cr(1-\varepsilon)^{\log r/\log \eta}$$
$$= Cr^{1+\log(1-\varepsilon)/\log\eta}$$

かつ

$$F(r,x,f^{+1/2}) = F(r,x,f^{+1/2}\chi_{B(x_0,1)})$$
$$(\text{ on } \operatorname{supp}\nu)$$

なることに注意すると，補題1より

$$\iint_{X\times R^+} F(r,x,f^{+1/2}\chi_{B(x_0,1)})^2\, d\nu$$
$$\le C\left(\int_X (f^{+1/2}(y)\ \chi(y))^{2/(1+\delta)}\, d\mu\right)^{1+\delta}$$
$$= C\ \|f^+\chi\|_{L^{1/(1+\delta)}}$$
$$= C\left(\int_{B(x_0,1)} f^+(y)^{1/(1+\delta)}\, d\mu\right)^{1+\delta}$$

以上で，補題3の証明を終る。

補題4．$f\in L^p(X)$，$1<p\le\infty$ とすると
$$\|M_1(f)\|_{L^p} \le C_p\ \|f\|_{L^p}$$
但し，C_p は f によらない。

これは，よく知られた Hardy - Littlewood の maximal theorem である。証明は略す。

定理1の証明．補題3より，

$$f^*(x) \le C\,M_{p_1}(f^+)(x).$$

よって，補題4より，

$$\|f^*\|_{L^p} \le C\,\|M_{p_1}(f^+)\|_{L^p} \le C\,\|M_1(f^{+p_1})\|_{L^{p/p_1}}^{1/p_1}$$
$$\le C_{p,p_1}\ \|f^+\|_{L^p} \qquad (\forall p>p_1) \qquad \text{証終}$$

定理1において，$K(r,x,y)$ に関する条件（4）をゆるめることは可能である。$K_1(r,x,y)$ は $R^+\times X\times X$ 上で定義された非負連続関数で次をみたすとする。

(40) $\quad K_1(r,x,y) \le (1+d(x,y)/r)^{-1-\gamma}$

(41) $\quad K_1(r,x,x) > A^{-1} > 0$

(42) $\quad |K_1(r,x,y) - K_1(r,x,y)|$

$$\le (d(y,z)/r)^{\gamma}(1+d(x,y)/r)^{-1-2\gamma}$$

$$(\text{if}\quad d(y,z) < (r+d(x,y))/(4A))$$

このときも（8）は成立することに注意せよ。つまり

(43) $\quad C_1K(r,x,y) > 1 \qquad (d(x,y) < C_2 r)$

前と同様に，$f\in L^1(X)$ に対し

$$F_1(r,x,f) = \int_X K_1(r,x,y)f(y)\,d\mu(y)/r$$

$$f^{(+)}(x) = \sup_{r>0}|F_1(r,x,f)|$$

と定義する。

定理1を拡張して，次を得る。

> 定理1′. Xのみできまるある $p_3<1$ が存在して次をみたす。任意の $f\in L^1(X)$ と任意の $p>p_3$ とに対し，
>
> $$\|f^*\|_{L^p} \le C_7\|f^{(+)}\|_{L^p}$$
>
> が成立する。但し，C_7 は p と X とのみできまる。

定理1′とCとの系として，次を得る。

系1′. $p_4 < 1$ がXのみによってとることができ，
$\forall f \in L^1(X)$ と $1 \geq \forall p > p_4$ とに対し

$$\|f^{(+)}\|_{L^p} \leq C_8 \|f\|_{H^p} \leq C_9 \|f^*\|_{L^p} \leq C_{10} \|f^{(+)}\|_{L^p}$$

但し，C_8, C_9, C_{10} は p と X のみによる。

定理1′の証明のためには，次の補題が必要である。

補題3′. X のみできまる $p_3 < 1$ と C_5' が存在して次をみたす。$\forall f \in L^1(X)$ と

$$\mathrm{supp}\, \varphi \subset B(x_0, r_0), \quad L(\varphi, \gamma) \leq r_0^{-\gamma}, \quad \|\varphi\|_\infty \leq 1$$

をみたす $\forall \varphi$, $\forall x_0$ $\forall r_0$ とに対し，

$$\left| \int f(y) \varphi(y)\, d\mu(y) \right| / r_0 \leq C_5' M_{p_3}(f^{(+)})(x_0)$$

補題3′の証明は，補題3の証明の精密化による。ここでは省略する。

(40)−(42) の条件をみたす例を2つあげる。

例1. $X = R^n$, $d(x, y) = |x-y|^n$,
$K(r, x, y) = \psi_0((x-y)/r^{1/n})$ とおく。
但し，$\psi_0 \in \mathcal{D}(R^n)$, $\mathrm{supp}\, \psi_0 \subset \{x \in R^n : |x| < 1\}$
$|\psi_0(x) - \psi_0(y)| \leq |x-y|$, $\psi_0(x) \geq 0$, $\psi_0(0) > 0$.
すると，(0) − (7) はみたされる。$p > n/(n+1)$ のとき，この H^p は，2，3ページで定義したものと一致する。

$$K_1(r, x, y) = (1 + |x-y|^2 / r^{2/n})^{-(n+1)/2}$$

は，(40) − (42) をみたす。$K_1(r, x, y)/r$ は，

Poisson 核である。

例2. $X = \Sigma_{2n-1} = \{ z \in C^n : z \cdot \bar{z} = \sum_{j=1}^{n} z_j \bar{z}_j = 1 \}$

$d(z, w) = |1 - z \cdot \bar{w}|^n$ とおくと、X は Lebesgue 測度により homogeneous type の空間になる。 $\varphi_0(t) \in C^\infty(0, \infty)$ は

$\varphi_0(t) = 1$ on $(0, 1/2)$, $\varphi_0(t) = 0$ on $(1, \infty)$

かつ $\varphi_0(t) \geq 0$ とする。すると、

$$K(r, z, w) = \varphi_0(d(z, w)/r)$$

は (0) − (7) をみたす。

$$K_1(r, z, w) = |1 - tz \cdot w|^{-2n} (1 - t^2)^n r$$

但し、 $t = 1 - r^{1/n}$ $(0 < r \leq 1)$

は (40) − (42) をみたす。 $K_1(r, z, w)/r$ は Poisson - Szegö 核である。

References.

[1] A.P. Calderon, An atomic decomposition of distributions in parabolic H^p spaces, Advances in Math. 25(1977), 216-225.

[2] A.P. Calderon and A. Torchinsky, Parabolic maximal functions associated with a distribution, Advances in Math. 16(1975), 1-64.

[3] L. Carleson, Two remarks on H^1 and BMO, Advances in Math. 22(1976) 269-275.

[4] L. Carleson and J. Garnett, Interpolating sequences and seperation properties, J. Analyse Math. 28(1975), 273-299.

[5] R. Coifman, A real variable characterization of H^p, Studia Math. 51(1974), 269-274.

[6] R. Coifman and R. Rochberg, Another characterization of BMO, preprint.

[7] R. Coifman, R. Rochberg and G. Weiss, Factorization theorems for Hardy spaces in several variables, Ann. of Math. 103(1976), 611-635.

[8] R. Coifman and G. Weiss, Extensions of Hardy spaces and their use in analysis, Bull. Amer. Math. Soc. 83(1977), 569-645.

[9] P. Duren, Extension of a theorem of Carleson, Bull. Amer. Math. Soc. 75(1969), 143-146.

[10] C. Fefferman, N.M. Riviere and Y. Sagher, Interpolation between H^p spaces, the real method, Trans. Amer. Math. Soc. 191(1974), 75-82.

[11] C. Fefferman and E.M. Stein, H^p spaces of several variables, Acta Math. 129(1972), 137-193.

[12] J.B. Garnett and R.H. Latter, The atomic decomposition for Hardy spaces in several complex variables, Duke Math. J. 45(1978), 815-846.

[13] P.W. Jones, Constructions with functions of bounded mean oscillation, Ph.D. thesis, University of California, 1978.

[14] R.H. Latter, A characterization of $H^p(R^n)$ in terms of atoms, Studia Math. 62(1977), 92-101.

[15] R.H. Latter and A. Uchiyama, The atomic decomposition for parabolic H^p spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 253(1979), 391-398.

[16] R. Macias and C. Segovia, A decomposition into atoms of distributions on spaces of homogeneous type, Advances in Math. 33(1979), 271-309.

[17] ________________________, Lipschitz functions on spaces of homogeneous type, Advances in Math. 33(1979), 257-270.

[18] E.M. Stein, Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.

[19] E.M. Stein, Boundary behavior of holomorphic functions of several complex variables, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1972.

[20] E.M. Stein and G. Weiss, Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1971.

[21] A. Uchiyama,,A remark on Carleson's characterization of BMO, to appear in Proc. Amer. Math. Soc.

[22] ___________, A maximal function characterization of H^p on the space of homogeneous type, preprint.

[23] ___________, The factorization of H^p on the space of homogeneous type, to appear in Pacif J. Math.

[24] N. Th. Varopoulos, BMO functions and the $\bar{\partial}$ -equation, Pacific J. Math. 71(1977), 221-273.