数理解析研究所講究録
第383巻 1980年 113-126

L. Carleson – R. A. Hunt の結果の多変数フーリエ級数の収束問題への応用

金沢大 理　小嶋迪孝

$\mathbb{R}^n$ を $n(\geqq 1)$ 次元ユークリッド空間，$\mathbb{Z}^n$ を $\mathbb{R}^n$ での格子点全体，$\mathbb{T}^n=[-\pi,\pi)^n$ とし，$x, y\in\mathbb{R}^n$ に対して (x,y) を内積，$|x|=(x,x)^{1/2}$ とする．各変数について 2π-周期函数 $f\in L(\mathbb{T}^n)$ のフーリエ級数 $f\sim\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\hat{f}_k e^{i(k,x)}$，$\hat{f}_k=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{T}^n}f(x)e^{-i(k,x)}dx$ に対して その矩形部分和，球形部分和を各々

$$S_{m_1,\cdots,m_n}(f;x)=\sum_{|k_1|\leqq m_1}\cdots\sum_{|k_n|\leqq m_n}\hat{f}_k e^{i(k,x)}$$

$$S_R(f;x)=\sum_{|k|\leqq R}\hat{f}_k e^{i(k,x)}$$

とした時，これらの部分和の概収束問題を考える．

$n=1$ の時，L. Carleson [6] によって次の結果が証明された：
任意の $f\in L^2(\mathbb{T})$ に対して

$$|\{x\in\mathbb{T};\ \sup_{m\geqq 0}|S_m(f;x)|>y\}|\leqq\frac{C}{y^2}\|f\|_2^2\quad(y>0)$$

が成立し，$S_m(f;x)\longrightarrow f(x)$ a.e.

そして R. A. Hunt [13] によって次の様に完全にされた：
任意の $f\in L^p(\mathbb{T})$ $(1<p<\infty)$ に対して

$$\| \sup_{m \geq 0} |S_m(f)| \|_p \leqq C_p \|f\|_p, \quad C_p \leqq C \frac{p^4}{(p-1)^3}$$

が成立し，$S_m(f; x) \to f(x)$ a.e.

また更に P. Sjölin [21] によって次が証明された：

$$f \in L \log^+ L \log^+ \log^+ L(\mathbb{T}) \Rightarrow S_m(f; x) \to f(x) \text{ a.e.}$$

これらの結果の証明については [19], [14] に詳しく述べられており，又 [16] にも若干の注釈が与えてある．更に C. Fefferman [11] によってもまた Carleson の結果の別証明として

$$\| \sup_{m \geq 0} |S_m(f)| \|_1 \leqq C \|f\|_2 \quad \text{for all } f \in L^2(\mathbb{T})$$

が証明された．

本稿の目的は主に Hunt の結果を利用して多変数フーリエ級数の概収束問題についてどの様な結果が持たらされているかをまとめて報告する事である．尚一変数及び多変数フーリエ級数の収束問題の報告書としては [14] の論説がある．

§1. 正方形部分和．

次の定理は Hunt の結果の応用の中で顕著なものである．

定理 1 （C. Fefferman [9]）．任意の $f \in L^p(\mathbb{T}^n)$ $(1<p<\infty)$ に対して

$$\| \sup_{m \geq 0} |S_{m,\cdots,m}(f)| \|_p \leqq C_p \|f\|_p, \quad C_p \leqq C \frac{p^{2n+2}}{(p-1)^{n+2}}$$

が成立し，$S_{m,\cdots,m}(f; x) \longrightarrow f(x)$ a.e.

論文[9]ではより一般的な"多角形"部分和について $p=2,\ n=2$ の場合の証明が与えられているがそこでも注意されている様に，$1<p<\infty,\ n\geqq 2$ の場合でも成立する．こゝに簡単のため定理1での形の正方形部分和についての証明を述べておく．

正方形 $[-1,n]^n$ を原点を頂点とし1つの座標面に垂直な底面を持つ有限個の多面錐に分割し，その様な1つの多面錐 P に対して

$$\| \sup_{\lambda>0} | \sum_{k\in\lambda P} \hat{f}_k e^{i(k,\cdot)} | \|_p \leqq C_p \|f\|_p$$

を証明すればよい．そのためには　$P=\{x\in S\ ;\ |x_1|\leqq 1\}$，こゝで S は原点を通る有限個の超平面 $(x,\alpha)=0$ で囲まれた領域で $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ とする時 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ は整数の上で一次独立，として

$$\| \sup_{\lambda>0} | \sum_{k\in S,\ |k_1|\leqq\lambda} \hat{f}_k e^{i(k,\cdot)} | \|_p \leqq C_p \|f\|_p$$

を示せばよい．与えられた f に対し共役函数の性質を用いてある $g\in L^p(\mathbb{T}^n)$ が存在して

$$g \sim \sum_{k\in S} \hat{f}_k e^{i(k,x)}, \qquad \|g\|_p \leqq C_p \|f\|_p$$

が得られる．そうすると Hunt の結果を用いて

$$\text{上式の左辺} = \Big[\int_{\mathbb{T}^n} \sup_{\lambda>0} \Big| \sum_{|k_1|\leqq\lambda} [g(\cdot,x_2,\cdots,x_n)]^{\wedge}_{k_1} e^{ik_1x_1} \Big|^p dx \Big]^{1/p}$$

$$\leqq C_p \|g\|_p \leqq C_p' \|f\|_p .$$

この定理1はまたP. Sjölin [22] によっても，Hunt による所謂 "basic result" を用いてある特異積分を評価する事によって証明されている．またこれより定理で述べた定数 C_p の評価が知られる．

§2. 球形部分和.

$\|S_R\|^{L^p}$ を $f\in L^p(\mathbb{T}^n)$ から $S_R(f)\in L^p(\mathbb{T}^n)$ への作用素ノルムとする．$1\leqq p\leqq\infty$, $p\neq 2$ の時 [24] [10] によって $\varlimsup_{R\to\infty}\|S_R\|^{L^p}=\infty$ が知られており，更にこの度合に関して [1] によって

$$\|S_R\|^{L^p}\geqq C\,[\log R]^{(n-1)|1/p-1/2|}$$

が示されている．これより概収束について次が得られる．

<u>定理2</u>. $1\leqq p<2$ とする時，任意の $0\leqq\gamma<(n-1)(1/p-1/2)$ に対してある $f\in L^p(\mathbb{T}^n)$ が存在して

$$\sup_{R>0}\,(\log R)^{-\gamma}\,|S_R(f;x)|=\infty \quad \text{a.e.}$$

我々は特に $f\in L^2(\mathbb{T}^n)$ の場合に $S_R(f;x)$ が概収束するかどうかという問題が興味深い．この問題は現在未解決と思われるがこの概収束を保証する様な1つの十分条件が [12] によって与えられている．即ち

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}|\hat{f}_k|^2\,[\log(|k|+2)]^2<\infty \;\Rightarrow\; S_R(f;x)\longrightarrow f(x)\ \text{a.e.}$$

これは Rademacher - Menshov の定理を用いて簡単に得られる．

この条件は次と同値である：$s \in (0,1]$ として

$$\Delta_s(f;x) = \frac{1}{|\Sigma|}\int_\Sigma f(x+st')\,dt' - f(x),$$

こゝに Σ は $\mathbb{R}^n$ における単位球面，$|\Sigma|$ はその表面積，dt' はその面積要素，とおく時

$$\int_0^1 \|\Delta_s(f)\|_2^2 \frac{1}{|s|}\log\frac{1}{|s|}\,ds < \infty .$$

従って特に次が得られる：

$$\sup_{|s|\leqq\delta} \| f(\cdot+s) - f(\cdot) \|_2 = O\left(\left[\log\frac{1}{\delta}\right]^{-1-\varepsilon}\right) \quad (\varepsilon>0)$$

$$\Rightarrow S_R(f;x) \longrightarrow f(x) \quad \text{a.e.}$$

以上の事は Hunt の結果の応用とは関係ないが $R\to\infty$ を lacunary seq. $\{R_\nu\}$ ととって動かす時，定理1や上で述べた作用素ノルムに関する結果を用いると次の事が得られる．

<u>定理3</u>（[18]）.

(i) $2\leqq p\leqq\infty$ とする時任意の lacunary seq. $\{R_\nu\}$ に対して

$$f\in L^p(\mathbb{T}^n) \Rightarrow S_{R_\nu}(f;x) \longrightarrow f(x) \quad \text{a.e.}$$

(ii) $1\leqq p<2$ とする時各 lacunary seq. $\{R_\nu\}$ に対して

$$\exists f\in L^p(\mathbb{T}^n)\ ;\ \varlimsup_{\nu\to\infty} |S_{R_\nu}(f;x)| = \infty \quad \text{a.e.}$$

§3. 矩形部分和.

先ず $n=2$ とする．$f\in L(\mathbb{T}^2)$ に対して

$$S_{m_1,m_2}(f;x) = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u_1,u_2)\,D_{m_1}(x_1-u_1)\,D_{m_2}(x_2-u_2)\,du_1du_2,$$

こゝに $D_m(u) = \sin(m+\frac{1}{2})u \,/\, (2\sin\frac{u}{2})$，と書けるが，

$\tilde{D}_m(u) = \sin mu/u$ として Hunt の結果を用いて次が成立する．

定理4（I.L.Bloshanskii [4]）．$f \in L^p(\mathbb{T}^2)$ $(1<p<\infty)$ に対して

$$S_{m_1,m_2}(f:x) = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u_1,u_2)\,\tilde{D}_{m_1}(x_1-u_1)\,\tilde{D}_{m_2}(x_2-u_2)\,du_1du_2 + R_{m_1,m_2}(f:x),$$

$$\|\sup_{m_1,m_2}|R_{m_1,m_2}(f)|\|_p \leqq C_p\|f\|_p,$$

$$R_{m_1,m_2}(f:x) \longrightarrow 0 \quad \text{a.e.}$$

この定理より $S_{m_1,m_2}(f:x)$ の概収束を調べる事は右辺の第一項の積分（これは函数 $f\chi_{\mathbb{T}^2}$ のフーリエ変換に対応する矩形部分和である）を調べる事と同じである事が分る．この事は次の結果の証明にも現われている．

定理5（C. Fefferman [8]）．ある $f \in C(\mathbb{T}^2)$ と $\delta_2 > \delta_1 > 0$ が存在して $\displaystyle\overline{\lim_{\delta_1 \leqq m_2/m_1 \leqq \delta_2}} |S_{m_1,m_2}(f:x)| = \infty$ e.

この証明は，$Q = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{T}^2 \,;\, |x_j| \leqq \pi - 1/10 \ (j=1,2)\}$ とし，

$$f_\lambda(x_1,x_2) = e^{i\lambda(x_1+\pi)(x_2+\pi)}$$

$$g_\lambda(x_1,x_2) = \varphi(x_1+\pi)\varphi(x_2+\pi)f_\lambda(x_1,x_2) \quad (\lambda>0),$$

ここで φ は $t=0$ の近傍で 1，$t=\pm\pi$ の近傍で 0，$0 \leqq \varphi \leqq 1$ なる $C^\infty(\mathbb{T})$ の函数，とおく時，$(x_1,x_2) \in Q$ において一様に $x_1' = x_1+\pi$, $x_2' = x_2+\pi$ として

$$|S_{[\lambda x_2'][\lambda x_1']}(g_\lambda : x_1,x_2)| \geqq C\log\lambda$$

が成立する事を定理4の変形を考えて示す事が主な考えであ

る．この函数 g_λ は後で述べる種々の反例を構成するのに役立っている．

この定理は定理1で述べた様に $\delta_1,\cdots,\delta_n>0$ を任意に与えた時，

$$f\in L^p(\mathbb{T}^n)\ (p>1)\ \Rightarrow\ S_{\delta_1 m,\cdots,\delta_n m}(f:x)\longrightarrow f(x)\ \text{a.e.}$$

が成立する事と比較すると面白い．また更に次の事も知られている：原点を中心とし座標軸に平行な辺を持つ矩形の列 $\{D_j\}$; $D_j\uparrow\mathbb{R}^n$ を任意に与えた時，

$$f\in L^2(\mathbb{T}^n)\ \Rightarrow\ S_{D_j}(f:x)\longrightarrow f(x)\ \text{a.e.}$$

これは $n=2$ の時に Hunt の結果を用いて N.R. Tevzadze [25] によって示されており，$n\geqq 3$ の時も同様にして証明出来る([17])．しかしこれが $f\in L^p(\mathbb{T}^n)\ (1<p<2)$ の時でも云えるかどうかは興味ある問題に思われるが自分には未だわからない．

定理5と，Hunt の結果を用いて示される $n=2$ の時の P. Sjölin [22] による結果，とにより次の事が示される．

<u>定理6</u> ([17])

(i). $(n-1)$ 個の任意に固定された lacunary seqs. $\{m_k^{(j)}\}_{k=1}^{\infty}$ $(j=1,\cdots,n-1)$ に対して，$k_1,\cdots,k_{n-1},\ m\to\infty$ とすると

$$f\in L^p(\mathbb{T}^n)\ (p>1)\ \Rightarrow\ S_{m_{k_1}^{(1)},\cdots,m_{k_{n-1}}^{(n-1)},m}(f:x)\longrightarrow f(x)\ \text{a.e.}$$

(ii). 任意の $m'=(m_3,\cdots,m_n)\to\infty$ に対してある $f\in C(\mathbb{T}^n)$ が存在して $\overline{\lim}_{m_1,m_2,m'\to\infty}|S_{m_1,m_2,m'}(f;x)|=\infty$ e.

次に単に $m_1,\cdots,m_n\to\infty$ とした時 $S_{m_1,\cdots,m_n}(f:x)$ が概収束することを保証する様な十分条件を考える．最初 $f\in L^2(T^n)$ の場合を扱う．

定理 7 ([17], [7])．もし
$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}|\hat{f}_k|^2\log(|k_1|+2)\cdots\log(|k_n|+2)<\infty$$
が成立するならば，$S_{m_1,\cdots,m_n}(f:x)\longrightarrow f(x)$ a.e.

$n=1$ の時は Kolmogoroff－Seliverstoff－Plessner の定理として古くから知られている．そして $n=2$ の時は S. Kaczmarz [15] の定理として知られており，$n\geq 3$ の時はこれと同様の方法で証明出来る．

$n=2$ の場合この定理は Hunt の結果や定理 5 の証明に用いられた函数 g_λ を利用して次の様に改良されている．

(I) P. Sjölin [22] の結果：もし $\sum_{k_1=-\infty}^{\infty}\sum_{k_2=-\infty}^{\infty}|\hat{f}_k|^2[\log\min(|k_1|+2,|k_2|+2)]^2<\infty$ が成立するならば，$S_{m_1,\cdots,m_n}(f:x)\longrightarrow f(x)$ a.e.

(II) E.M. Nikishin [20] の結果：(I)の因子はこれ以上改良する事は出来ない．

また $s=(s_1,\cdots,s_n)\in[-1,1]^n$ に対して次の様におく．

$$\Delta_{s_j}(f:x)=f(x_1,\cdots,x_j+s_j,\cdots,x_n)-f(x_1,\cdots,x_j,\cdots,x_n)\quad(j=1,\cdots,n)$$
$$\Delta_s(f:x)=\Delta_{s_1}\cdots\Delta_{s_n}(f:x).$$

(III) P. Sjölin [23]－M. Bakhbukh [2] の結果：(I)の条件は $\int_{|s|\leq 1}\|\Delta_s(f)\|_2^2\frac{1}{|s|^2}\log\frac{1}{|s|}<\infty$ と同値である．従って特に

$$\sup_{|s_i|\leq\delta}\|\Delta_s(f)\|_2 = O([\log\tfrac{1}{\delta}]^{-1-\varepsilon}) \quad (\varepsilon>0)$$
$$\Rightarrow S_{m_1,m_2}(f;x)\to f(x) \quad \text{a.e.}$$

が得られる．更に再び定理５の証明に用いられた函数f_λを利用することによってこの条件で$\varepsilon=0$とする事は出来ないことが示される．もっと厳密に云えば，

(Ⅳ) M. Bakhbukh and E. M. Nikishin [3] の結果：ある$f\in C(\mathbb{T}^2)$が存在して，$\sup_{|s|\leq\delta}\|f(\cdot+s)-f(\cdot)\|_\infty = O([\log\frac{1}{\delta}]^{-1})$ でそして$S_{m_1,m_2}(f;x)$はある正測度を持つ集合上で発散する．

一般に$n\geq 1$の場合，定理７の条件は次と同値となる；

$$\int_0^1\cdots\int_0^1 \|\Delta_s(f)\|_2^2 \frac{1}{s_1\cdots s_n}ds_1\cdots ds_n < \infty .$$

従って

$$\sup_{|s_j|\leq\delta}\|\Delta_{s_j}(f)\|_2 = O([\log\tfrac{1}{\delta}]^{-\frac{n}{2}-\varepsilon}) \quad (\varepsilon>0,\ j=1,\cdots,n)$$
$$\Rightarrow S_{m_1,\cdots,m_n}(f;x)\to f(x) \quad \text{a.e.}$$

が得られる．

次に一般に$f\in L^p(\mathbb{T}^n)$の場合$S_{m_1,\cdots,m_n}(f;x)$が概収束するための十分条件については自分は何も知らないが例えば次の問題が考えられる：$f\in L^p(\mathbb{T}^n)$ $(1\leq p\leq 2)$とするとき

$$\sup_{|s_j|\leq\delta}\|\Delta_{s_j}(f)\|_p = O([\log\tfrac{1}{\delta}]^{-\frac{n}{p}-\varepsilon}) \quad (\varepsilon>0,\ j=1,\cdots,n)$$
$$\Rightarrow S_{m_1,\cdots,m_n}(f;x)\to f(x) \quad \text{a.e.} \quad ?$$

$p=2$の場合は上で述べた様に成立する．$p=1$の場合は，$n=1$の時には Riemann-Lebesgue の定理より問題成立が知られるが，

$n\geqq 2$ の時にも問題は成立する．これは与えられた条件の下で任意の k $(1\leqq k\leqq n)$ に対して

$$\int_{\mathbb{T}^k}\|\Delta_{s_1}\cdots\Delta_{s_k}(f)\|_1\frac{1}{|s_1\cdots s_k|}ds_1\cdots ds_k<\infty$$

が成立する事から，Riemann-Lebesgue の定理を用いて

$$\int_{\mathbb{T}^k}\Delta_{s_1}\cdots\Delta_{s_k}(f:x)\,D_{m_1}(s_1)\cdots D_{m_k}(s_k)\,ds_1\cdots ds_k\longrightarrow 0\quad \text{a.e.}$$

が得られ，これより帰納的に証明出来る．

$1<p<2$ の場合は，$n=1$ の時には $p=1$，$p=2$ の場合の結果を用いて

$$\int_{\mathbb{T}}\|f(\cdot+s)-f(\cdot)\|_p^p\frac{1}{|s|}ds<\infty\ \Rightarrow\ S_m(f:x)\longrightarrow f(x)\quad \text{a.e.}$$

が成立する事が古くから J. Marcinkiewicz の定理として知られておりこれより問題成立が分る訳であるが，$n\geqq 2$ の時には，この方法で任意の k $(1\leqq k\leqq n)$ に対して

$$\int_{\mathbb{T}^k}\|\Delta_{s_1}\cdots\Delta_{s_k}(f)\|_p^p\frac{1}{|s_1\cdots s_k|}ds_1\cdots ds_k<\infty$$

がもし成立すれば $S_{m_1,\cdots,m_n}(f:x)\longrightarrow f(x)$ a.e. が云える事を示せればよいのであるがこれは未だ自分には分らない．

$n=2$ の時次の結果が知られている：

<u>定理 8</u>（I. L. Bloshanskii [5]）．$f\in L^p(\mathbb{T}^2)\,(p>1)$ とする時，もし各 $x\in\mathbb{T}^2$ に対して

$$\frac{1}{t_1t_2}\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}|f(x+s)-f(x)|\,ds=O\left(\left[\log\frac{1}{t_1^2+t_2^2}\right]^{-2}\right)$$

が成立するならば，$S_{m_1,m_2}(f:x)\longrightarrow f(x)$ a.e. $x\in\mathbb{T}^2$.

この結果は $n=1$ の時，$p=1$ とし条件の order を $O([\log\frac{1}{t}]^{-1})$ とし更に $\mathbb{T}$ を一般の正測度を持つ可測集合 $E\subset\mathbb{T}$ でおきかえても成立する事が J. Marcinkiewicz の定理として知られている．

またこの結果で $n=1$ の時と同様に $\mathbb{T}^2$ の代わりに一般の正測度を持つ可測集合 $E\subset\mathbb{T}^2$ でおきかえても成立する事も証明出来るがしかしこの場合 $p=1$ とする事は出来ない．また上で述べた (IV) の結果より order を $O([\log\frac{1}{t_1^2+t_2^2}]^{-1})$ とする事は出来ないことも分る．

この結果の証明には，定理4や上で述べた (III) の結果，更に Whitney の分解定理や拡張定理が用いられている．

引用文献

[1] K.I.BABENKO, On summability and convergence of eigenfunction expansions of a differential operator, Math. USSR Sbornik, 20(1973), 157-211.

[2] M.BAKHBUKH, On sufficient conditions for the convergence of double Fourier series over rectangles, Math. Notes, 15(1974), 501-503.

[3] M.BAKHBUKH AND E.M.NIKISHIN, The convergence of double Fourier series of continuous functions, Siberian Math. Journ., 14(1973), 823-839.

[4] I.L.BLOSHANSKII, Equi-convergence of expansions in a multiple trigonometric Fourier series and a Fourier integral, Math. Notes, 18(1975), 675-684.

[5] I.L.BLOSHANSKII, On the convergence of double Fourier series of functions from L^p, $p>1$, Math. Notes, 21 (1977), 438-444.

[6] L.CARLESON, On convergence and growth of partial sums of Fourier series, Acta Math., 116(1966), 135-157.

[7] J.D.CHEN AND N.R.SHIEH, On a sufficient condition for the convergence of multiple Fourier series, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica, 5(1977), 391-395.

[8] C.FEFFERMAN, On the divergence of multiple Fourier series, Bull. Amer. Math. Soc., 77(1971), 191-195.

[9] C.FEFFERMAN, On the convergence of multiple Fourier series, Bull. Amer. Math. Soc., 77(1971), 744-745.

[10] C.FEFFERMAN, The multiplier problem for the ball, Ann. Math., 94(1971), 330-336.

[11] C.FEFFERMAN, Pointwise convergence of Fourier series, Ann. Math., 98(1973), 551-571.

[12] B.I.GOLUBOV, On convergence of Riesz spherical means of multiple Fourier series, Math. USSR Sbornik, 25(1975), 177-197.

[13] R.A.HUNT, On the convergence of Fourier series, Proceeding of the conference on orthogonal expansions and their continuous analogues, Southern Illinois Univ. Press, 1968, 235-255.

[14] 猪狩 惺, 多重フーリエ級数の収束問題 — L. Carleson の結果も含めて —,

数学, 才25巻2号 (1973), 110-119.

[15] S.KACZMARZ, Zur Theorie der Fourierschen Doppelreihen, Studia Math., 2(1930), 91-96.

[16] 小嶋迪孝, Carleson-Hunt-Sjölin の結果について, 数理解析研究所講究録 no. 110 (フーリエ解析), 1971, 25-35.

[17] M.KOJIMA, On the almost everywhere convergence of rectangular partial sums of multiple Fourier series, Sci. Rep. Kanazawa Univ., 22(1977), 163-177.

[18] M.KOJIMA, On the almost everywhere convergence of spherical partial sums of multiple Fourier series, Sci. Rep. Kanazawa Univ., 24(1979), 9-12.

[19] C.J.MOZZOCHI, On the pointwise convergence of Fourier series, Lecture Notes in Math., Springer, no. 199, 1971.

[20] E.M.NIKISHIN, Weyl multipliers for multiple Fourier series, Math. USSR Sbornik, 18(1972), 351-360.

[21] P.SJÖLIN, An inequality of Paley and convergence a.e. of Walsh-Fourier series, Ark. Matem., 7(1968), 551-570.

[22] P.SJÖLIN, Convergence almost everywhere of certain singular integrals and multiple Fourier series, Ark. Matem., 9(1971), 65-90.

[23] P.SJÖLIN, On the convergence almost everywhere of double Fourier series, Ark. Matem., 14(1976), 1-8.

[24] E.M.STEIN AND G.WEISS, Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces, Princeton, 1971.

[25] N.R.TEVZADZE, On the convergence of double Fourier series

of square summable functions, Soobšč. Akad. Nauk. Gruzin. SSR., 58(1970), 277-279.