数理解析研究所講究録
第 383 巻 1980 年 127-139

多変数フーリェ級数の球形総和法に関する Dirichlet 核の評価について

弘前大理学部 倉坪茂彦

§0 序 多変数 Fourier 級数論において「部分和を如何にとるか」という問題は，「多変数 Fourier 級数を如何にとらえるか」という問題に直結し，かつ解析手段を始めとして研究全般に著しい影響を与えるという意味で，本質的である。代表的な部分和のとり方としては矩形和によるもの，球形和によるものがある。この報告は専ら後者についてである。

一次元のときこれらは同一となり，「$p>1$ のとき L^p-可積分関数の Fourier series は概収束する」という L. Carleson [4] R. A. Hunt [7] の結果がよく知られている。一方二次元以上では矩形和については概収束するが，球形和については一般には概収束しないという C. Fefferman [6] [5] が知られている。このように二次元以上では矩形和と球形和の差は著しい。これらの話題に関しては同講究録の小嶋氏の報告が詳しい。以下 §1 で球形和及びそれに関連する Dirichlet 核につい

て，§2 で Dirichlet 核の一様評価について，§3 で Dirichlet 核の点毎（pointwise）評価，§4 では 三角級数 $\sum |m|^{-\alpha} e^{2\pi i m x}$ の収束性について述べる。

§1. 球形総和法と Dirichlet 核

この報告書を通じて T^N を N 次トーラス i.e. $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^N$，$Z^N$ を N 次元格子点の全体 i.e. $m=(m_1, \cdots, m_N) \in Z^N$ とは各 $m_i \in Z$ なることとする。次の3つの観点から Dirichlet 核の意味を考える。

1° <u>多変数 Fourier 級数</u>　$f \in L(T^N)$ に対して，その Fourier 係数を　$\hat{f}(m) = \int_{T^N} f(x) e^{-2\pi i m x} dx \quad (m \in Z^N)$ とし，その $\lambda (\geq 0)$ 次球形部分和を

$$S_\lambda(f, x) = \sum_{|m|^2 \leq \lambda} \hat{f}(m) e^{2\pi i m x}$$

とすると，Dirichlet 核　$D(\lambda, x) = \sum_{|m|^2 \leq \lambda} e^{2\pi i m x}$ を用いて

$$S_\lambda(f, x) = \int_{T^N} f(y) D(\lambda, x-y) dy$$

と書ける。$D(\lambda)$ の L^1 評価は Lebesgue 定数とも呼ばれ，Fourier 級数の一様収束性と密接な関係がある。これに関しては次の評価がある。(i)　$\| D(\lambda) \|_1 = O(\lambda^{\frac{N-1}{4}})$　H.S. Shapiro [14]　(ii)　$\| D(\lambda) \|_1 = \Omega(\lambda^{\frac{N-1}{4}})$　V. A. Il'in [8]。　$D(\lambda)$ の一様評価及び点毎評価について若干の結果を紹介するのがこの報告の主目的である。

2° Laplace 作用素　領域 $D=T^N$ で作用素 $-\Delta=-\sum_1^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ を境界条件 $f(x_i'; -\frac{1}{2})=f(x_i'; \frac{1}{2})$ ($i=1, 2, \cdots N$, $x\in T^N$)

(ただし, $(x_i'; x_i)=(x_1, x_2, \cdots x_N)$ とする。)

の下で考えると固有値, 固有関数の系として $\{4\pi^2|m|^2\}_{m\in Z^N}$, $\{e^{2\pi i m\cdot x}\}_{m\in Z^N}$ を得るが, この境界値問題に対応するスペクトル分解 $\{E_\lambda\}_{\lambda\geq 0}$ は $(E_\lambda f)(x)=S_{\lambda/4\pi^2}(f, x)$ となり球形部分和はスペクトル分解から自然に解釈されることがわかる。又この問題の spectral function (定義については Alimov, Il'in & Nikishin [1] を参照) は $\theta(x, y, \lambda)=\sum_{4\pi^2|m|^2\leq\lambda} e^{2\pi i m(x-y)}$ で与えられ, $D=R^N$ に対応する spectral function は $\theta_0(x, y, \lambda)=\int_{4\pi^2|\xi|^2\leq\lambda} e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi}d\xi$ で与えられ, spectral function の一般論から $\theta(x, y, \lambda)-\theta_0(x, y, \lambda)=O(\lambda^{\frac{N-1}{2}})$ unif. in T^N がよく知られているが §2 の評価は $N\geq 4$ ならば改良できることを示している。

3° 特殊三角級数　S. Wainger [16] は次の特殊三角級数を取り扱っている。(i) $\sum \frac{e^{i|m|(\log|m|)^d}}{|m|^\alpha(\log|m|)^\beta}e^{2\pi i m x}$, (ii) $\sum \frac{e^{2\pi i|m|^\beta}}{|m|^\alpha}e^{2\pi i m x}$ (iii) $\sum \frac{e^{2\pi i m x}}{|m|^\alpha}$。(i) は Lipschitz class と Fourier 級数の絶対収束性に関連し, (ii) は multiplier に関連し, (iii) は fractional integration に関連する重要な級数である。これらはいずれも $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(\sum_{|m|^2=k} e^{2\pi i m x})$ の形に書ける。(iii) については Dirichlet 核の評価と Abel 変換を用いてある程度収束性を論ずることが

できることを§4で述べる。なお(i),(ii)については一次元のときそうであったように(例えばZygmund [17]$_{\mathrm{I}}$ p197〜202) Van der Corput タイプの定理の開発をまたなければならない。

§2 $D(\lambda, x)$の一様評価

$$R(\lambda, x) = D(\lambda, x) - \int_{|\xi|^2 \leq \lambda} e^{2\pi i x\xi} d\xi = D(\lambda, x) - \pi^{\frac{N}{2}} \lambda^{\frac{N}{2}} j_{\frac{N}{2}}(2\pi |x| \sqrt{\lambda})$$

(ただし,$j_\alpha(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-\alpha} J_\alpha(z)$, J_αはα次のBessel関数, $j_\alpha(0) = \Gamma(\alpha+1)^{-1}$)

とおくと次の一様評価が得られる。

定理 $$|R(\lambda, x)| \leq \begin{cases} C\, \lambda^{\frac{N}{2}-1} & (N > 4) \\ C\, \lambda \log^2 \lambda & (N = 4) \end{cases} \quad \text{unif. in } T^N.$$

これはK. I. Babenkoの1978年[3]の結果である。昨秋仙台で行なわれた「実解析セミナー1979」でこの結果を紹介した折り「証明は未だfollowできていない」と述べたが,その後,B. Novákの1968年[12]の次の命題;

$$P(\lambda, x) = D(\lambda, x) - \pi^{\frac{N}{2}} \lambda^{\frac{N}{2}} \Gamma\left(\tfrac{N}{2}+1\right)^{-1} \delta(x) = O(\lambda^{\frac{N}{2}-1}) \quad \text{for all } x$$

(ただし,$\delta(x) = 1 \quad (x \in Z^N)$ and $= 0 \quad (x \notin Z^N)$)

の証明を少し修正すれば定理の証明が得られることが分ったのでその概略を紹介する。以下簡単の為$N > 4$の場合を述べる。<u>オ一段</u> $\Theta(s, x) = \sum_{m \in Z^N} e^{2\pi i m x - |m|^2 s} \quad (s \in \mathbb{C})$

$$D'(\lambda, x) = \begin{cases} D(\lambda, x) & (\lambda : \text{not integer}) \\ D(\lambda, x) - \frac{1}{2} \sum_{|m|^2 = \lambda} e^{2\pi i m x} & (\lambda : \text{integer}) \end{cases}$$

とおくと、

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\frac{e^{us}}{s}ds=\begin{cases}1+\mu\dfrac{e^{ub}}{(T-b)u} & (u>0)\\ \dfrac{1}{2}+\mu\dfrac{b}{T} & (u=0)\\ \mu\dfrac{e^{ub}}{T|u|} & (u<0)\end{cases}$$

（ただし、μ は $|\mu|\leq 1$ なる複素数とする。）

に注意して次の Lemma を得る。

<u>Lemma</u> 1　　$T\gg\lambda^{N}$, $\langle\lambda\rangle\geq\lambda^{-\frac{N}{2}}$ or $\langle\lambda\rangle=0$ のとき、

$$D'(\lambda.x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{\lambda}-iT}^{\frac{1}{\lambda}+iT}\frac{e^{\lambda s}\Theta(s.x)}{s}ds+O(1)$$

（ただし、$\langle\lambda\rangle=\min_{k\in Z}|\lambda-k|$, $O(1)$ は $\lambda.T.x$ に関して一様）

（注）以後表われる large order はすべて x について一様である。又 <u>オ五段</u> 終了まで $\langle\lambda\rangle\geq\lambda^{-\frac{N}{2}}$ or $\langle\lambda\rangle=0$ の仮定は持続するものとする。

<u>オ二段</u>　次ぎに一般 Gauss 和 $S_{h.k.m}$ を定義する。

$$S_{h.k.m}\equiv\sum_{a_1\cdots a_N=1}^{k}\exp\left(-2\pi i\frac{h}{k}|a|^2+\frac{2\pi i\,m a}{k}\right)\quad(a=(a_1,\cdots a_N))$$

$$=\prod_{j=1}^{N}\left\{\sum_{a=1}^{k}\exp\left(-2\pi i\frac{h}{k}a^2+\frac{2\pi i m_j a}{k}\right)\right\}$$

一般に　$|S_{h.k.m}|\leq c\,k^{\frac{N}{2}}$

（注）これより以降 $h.k$ が同時に式に現われたときは $(h.k)=1$ を常に仮定する。

テータ変換を使うと　$\displaystyle\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{2\pi i m\cdot x-m^2 s}=\sum_{a=1}^{k}\sum_{j=-\infty}^{\infty}e^{2\pi i(jk+a)x-(jk+a)^2 s}$

$$=\sum_{a=1}^{k}e^{-2\pi i\frac{h}{k}a^2}\left\{\sum_{j=-\infty}^{\infty}e^{-(s-2\pi i\frac{h}{k})|a+kj|^2+2\pi i x(a+kj)}\right\}=\sum_{a=1}^{k}e^{-2\pi i\frac{h}{k}a^2}\left\{\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{k(s-2\pi i\frac{h}{k})^{\frac{1}{2}}}\sum_{j=-\infty}^{\infty}e^{\frac{2\pi i a j}{k}-\frac{\pi^2(j-kx)^2}{k^2(s-2\pi i\frac{h}{k})}}\right\}$$

$$=\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{k(s-2\pi i\frac{h}{k})^{\frac{1}{2}}}\sum_{j=-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\pi^2(j-kx)^2}{k^2(s-2\pi i\frac{h}{k})}}\left\{\sum_{a=1}^{k}e^{-2\pi i\frac{h}{k}a^2+\frac{2\pi i a j}{k}}\right\}$$

<u>Lemma 2</u>　$s\in\mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\,s>0$ のとき．任意の h, k に対して

$$\Theta(s,x)=\frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{k^N\left(s-2\pi i\frac{h}{k}\right)^{\frac{N}{2}}}\sum_{m\in Z^N}S_{h,k,m}\exp\left(-\frac{\pi^2|m-kx|^2}{k^2\left(s-\frac{2\pi ih}{k}\right)}\right)$$

次ぎに，$R_k(x)\equiv\min_{m\in Z^N}|m-kx|^2$，又 $R_k(x)=|m-kx|^2$ のとき $S_{h,k}(x)\equiv S_{h,k,m}$ と定義すると，$|t-2\pi h/k|\leqslant 2\pi/k\sqrt{\lambda}$ のとき．

<u>Lemma 3</u>

$$\Theta(s,x)=\frac{\pi^{\frac{N}{2}}S_{h,k}(x)}{k^N\left(s-\frac{2\pi ih}{k}\right)^{\frac{N}{2}}}\exp\left\{-\frac{\pi^2R_k(x)}{k^2\left(s-\frac{2\pi ih}{k}\right)}\right\}+c\mu\frac{\lambda^{\frac{N}{2}}\exp\left\{-\frac{c\lambda}{k^2\left(1+\lambda^2(t-2\pi h/k)^2\right)}\right\}}{k^{\frac{N}{2}}\left(1+\lambda^2\left(t-\frac{2\pi h}{k}\right)^2\right)^{\frac{N}{4}}}$$

（ただし，$s=\frac{1}{\lambda}+it$，c は定数，μ は x に依存する，$|\mu|\leq 1$ なる複素数）

<u>第三段</u>　$\sqrt{\lambda}$ に属する Farey 数列とは分母が正で $\sqrt{\lambda}$ をこえないようなすべての既約分数を増大する順に並べたものであるが，相隣接する3つの分数を $\frac{h'}{k'}<\frac{h}{k}<\frac{h''}{k''}$ とするとき，$2\pi h/k$ を含む小区間 $\nabla_{h,k}$ を $\left[2\pi\frac{h'+h}{k'+k},2\pi\frac{h''+h}{k''+k}\right]$ と定める。このとき，$t\in\nabla_{h,k}$ ならば $|t-2\pi h/k|\leqslant 2\pi/k\sqrt{\lambda}$ である。

今区間 $[-2\pi\lambda^N,2\pi\lambda^N]$ を $\{\nabla_{h,k}\}_{k\leqslant\sqrt{\lambda}}$ で分割し，Lemma 1 に注意すれば　$D'(\lambda,x)=\sum_{k\leqslant\sqrt{\lambda}}\sum_{|h|\leqslant kT_1}\frac{1}{2\pi}\int_{\nabla_{h,k}}\frac{e^{\lambda s}\Theta(s,x)}{s}ds+O(1)$

（ただし，$T_1=\lambda^N$）を得，さらに Lemma 3 を代入して，

<u>Lemma 4</u>

$$D'(\lambda,x)=\pi^{\frac{N}{2}}\sum_{k\leqslant\sqrt{\lambda}}\sum_{|h|\leqslant kT_1}\frac{S_{h,k}(x)}{k^N}\frac{1}{2\pi}\int_{\nabla_{h,k}}\frac{\exp\left\{\lambda s-\frac{\pi^2R_k(x)}{k^2(s-2\pi ih/k)}\right\}}{(s-2\pi ih/k)^{N/2}s}dt+O(\lambda^{\frac{N}{2}}\log\lambda)$$

さらに，$F(\lambda,a,b)\equiv\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{\lambda}-i\infty}^{\frac{1}{\lambda}+i\infty}\frac{e^{\lambda s-\frac{b}{s+ia}}}{(s-ia)^{N/2}s}ds$ とおけば，

Lemma 5

$$D'(\lambda,x)=\pi^{\frac N2}\sum_{k\le\sqrt\lambda}\sum_{|h|\le kT_1}\frac{S_{h,k}(x)}{k^N}F(\lambda,2\pi h/k,\pi^2R_k(x)/k^2)+O(\lambda^{\frac N4}\log\lambda)$$

第四段　次に，n を $N/4-1\le n$ なる最小の整数とし，

$$\frac{1}{s+ai}=\frac{1}{ai}\sum_{j=0}^{n-1}\left(-\frac{s}{ai}\right)^j+\frac{\left(-\frac{s}{ai}\right)^n}{s+ai}\quad 及び$$

$$\left|\frac{1}{(ai)^n}\int_{\frac1\lambda-i\infty}^{\frac1\lambda+i\infty}\frac{e^{\lambda(s+ai)-\frac bs}}{s^{\frac N2-n}(s+ai)}ds\right|\le\frac{\lambda^{\frac N2-n-1}}{|a|^n}\log(1+|\lambda a|)$$

を考慮し，Hankel の公式

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{d-i\infty}^{d+i\infty}\frac{e^{\lambda s-b/s}}{s^{\nu+1}}ds=\begin{cases}\lambda^\nu J_\nu(2\sqrt{b\lambda}) & (b>0)\\[2mm] \dfrac{\lambda^\nu}{\Gamma(\frac{\nu}{2}+1)} & (b=0)\end{cases}$$

を使って次を得る。

Lemma 6　$D'(\lambda,x)-\pi^{\frac N2}\lambda^{\frac N2}J_{\frac N2}(2\pi\sqrt{R_1(x)\lambda})$

$$=\pi^{\frac N2}\sum_{0\le j<\frac N4-1}\frac{(-1)^j}{(2\pi i)^{j+1}}\sum_{1<k\le\sqrt\lambda}\frac{\lambda^{\frac N2-j-1}}{k^{N-j-1}}J_{\frac N2-j-1}\left(2\pi\sqrt{\frac{R_k(x)\lambda}{k^2}}\right)\sum_{|h|\le kT_1}\frac{S_{h,k}(x)e^{2\pi i\frac hk\lambda}}{h^{j+1}}$$

$$+\ O(\lambda^{\frac N4}\log\lambda)$$

第五段　$\displaystyle\sum_{|h|\le kT_1}\frac{S_{h,k}(x)e^{2\pi i\frac hk\lambda}}{h}=\sum_{0\le h<k}\sum_{0<|\frac hk+m|\le T_1}\frac{S_{h+km,k}(x)e^{2\pi i(\frac hk\lambda+m\lambda)}}{h+km}$

$$=\frac1k\sum_{0\le h<k}S_{h,k}(x)e^{2\pi i\frac hk\lambda}\sum_{0<|\frac hk+m|\le T_1}\frac{e^{2\pi im\lambda}}{\frac hk+m}$$

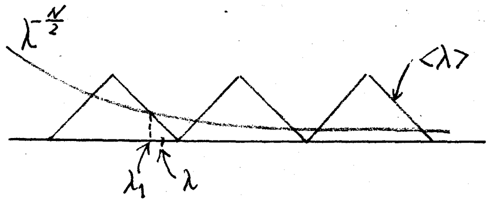
さらに，

$$\sum_{0<\left|\frac{h}{k}+m\right|\leq T_1} \frac{e^{2\pi i m\lambda}}{\frac{h}{k}+m} = \sum_{0<|m|\leq T_1} \frac{e^{2\pi i m\lambda}}{m} + O\left(\max\left(\frac{k}{h}, \frac{k}{k-h}\right)\right)$$

に注意すれば，次を得る。

<u>Lemma 7</u> $\left|D'(\lambda, x) - \pi^{\frac{N}{2}}\lambda^{\frac{N}{2}} j_{\frac{N}{2}}(2\pi\sqrt{R_1(x)\lambda})\right| \leq C\lambda^{\frac{N}{2}-1}$

<u>第六段</u> 前段までは $\langle\lambda\rangle \geq \lambda^{-\frac{N}{2}}$ or $\langle\lambda\rangle = 0$ を仮定してきたが，この制限は次のようにはずすことができる。λ を $0 < \langle\lambda\rangle < \lambda^{-\frac{N}{2}}$ とする。λ_1 を $\langle\lambda_1\rangle = \lambda_1^{-\frac{N}{2}}$ and $|\lambda - \lambda_1| \leq \lambda_1^{-\frac{N}{2}}$



なる実数とすれば，

$$D'(\lambda, x) = D'(\lambda_1, x) = D(\lambda, x)$$

$$\left|\lambda_1^{\frac{N}{2}-1} - \lambda^{\frac{N}{2}-1}\right| \leq C$$

さらに，$\left|\lambda_1^{\frac{N}{2}} j_{\frac{N}{2}}(2\pi\sqrt{R_1(x)\lambda_1}) - \lambda^{\frac{N}{2}} j_{\frac{N}{2}}(2\pi\sqrt{R_1(x)\lambda})\right| \leq C$ より

<u>Lemma 8</u> 任意の $\lambda \geq 1$ に対して

$$\left|D'(\lambda, x) - \pi^{\frac{N}{2}}\lambda^{\frac{N}{2}} j_{\frac{N}{2}}(2\pi\sqrt{R_1(x)\lambda})\right| \leq C\lambda^{\frac{N}{2}-1}$$

ここで，$\lambda = k$ (integer) のとき $D(k, x) = \lim_{\lambda \to k+0} D'(\lambda, x)$ に注意すれば求める定理を得る。

§3 $D(\lambda, x)$ の点毎評価

B. Novák は "Gitterpunkte mit Gewichte" を表題とする一連の研究で Dirichlet 核の各種の評価を得ている。それらのうち点毎評価に関連する部分を定理の形にまとめると次のようになる。

定理 (i) $N>4$ とき, $P(\lambda, x)=O(\lambda^{\frac{N}{2}-1})$ (all x)

(ii) $N>4$ とき, $P(\lambda, x)=o(\lambda^{\frac{N}{2}-1})$ ($x\notin Q^N$)

(iii) $N>4$ とき, $P(\lambda, x)=\Omega(\lambda^{\frac{N}{2}-1})$ ($x\in Q^N$)

(iv) $N>4$ とき, $P(\lambda, x)=O(\lambda^{\frac{N}{4}}\log\lambda)$ (a.e. x)

(v) $N\geq 2$ とき, $P(\lambda, x)=\Omega(\lambda^{\frac{N-1}{4}})$ (all x)

((i), (ii) (iii) は [12], (iv) は [13] (v) は [11])

(注$_1$) (iv)に関しては, 直交級数論の Rademacher-Menchoff の定理により, 「$N\geq 2$ のとき, $O(\lambda^{\frac{N}{4}}\log^{\alpha}\lambda)$ ($\alpha>3/2$)(a.e. x)」が従うことは昨秋の実解析セミナーで報告した。[10]

(注$_2$) $N=2, 3, 4$ のとき, (i), (iii)タイプの評価を得るというのは興味深い問題である。とくに $N=2$, $x=0$ のときは格子点問題と呼ばれ(岩波・数学辞典 p411) $O(\lambda^{\frac{1}{4}+\varepsilon})$ ($\varepsilon>0$) が予想されているが未解決である。

(注$_3$) 「$\frac{N-1}{4}\leq\alpha_0\leq\frac{N}{4}$ なる α で $O(\lambda^{\alpha_0+\varepsilon})$ for a.e. x, かつ $\Omega(\lambda^{\alpha_0-\varepsilon})$ for a.e. x なるものが存在するか」は興味ある問題と思うが, これは次§と関係が深い。

§4 三角級数 $\sum|m|^{-\alpha}e^{2\pi imx}$ の収束性

この級数は $f_\alpha(x)=C_\alpha|x|^{\alpha-N}+g_\alpha(x)$ (ただし, $g_\alpha\in C^\infty(T^N)$ $C_\alpha=\pi^{-\alpha+N/2}\Gamma(\alpha/2)\Gamma(\frac{N-\alpha}{2})^{-1}$) の Fourier 級数である。とくに

$N=1$ のときはその性質が詳細に研究され（Zygmund $[17]_{\mathrm{I}}$ p186〜p194），Capacity の問題（ $[17]_{\mathrm{II}}$ p194〜p197）あるいは Fractional integration の問題（ $[17]_{\mathrm{II}}$ p133〜p142）などでは重要な役割を果している。$N\geq 2$ のときこの級数について次のような研究がある。

(1) M. J. Kohn [9]　$N\geq 1$, $N-1<\alpha<N$ とき，

$$\exists K>0\ ;\ \Big|\sum_{0<|m|\leq t}|m|^{-\alpha}e^{2\pi i m x}\Big|\leq K/|x|^{N-\alpha}\quad \text{unif. in } x\in T^N$$

(2) E. M. Stein & G. Weiss [15] (p268)

$N\geq 2$ のとき，$$\varlimsup_{t\to\infty}\Big|\sum_{0<|m|\leq t}|m|^{-\frac{N-1}{2}}e^{2\pi i m x}\Big|=\infty \quad \text{a.e. } x$$

(3) Sh. A. Alimov, V. A. Il'in and E. M. Nikshin [2]

$N\geq 2$ のとき，$$\Big\|\sum_{0<|m|\leq t}|m|^{-\frac{N-1}{2}}e^{2\pi i m x}\Big\|_1=O(1)$$

(4) S. Kuratsubo [10]

$N\geq 2$ のとき，$$\lambda^{-1}\int_0^{\lambda}\Big|\sum_{0<|m|\leq t}|m|^{-\alpha}e^{2\pi i m x}\Big|dt=O(1)$$

$$\text{a.e. } x \quad \text{for } \alpha>\frac{N-1}{2}$$

これらに関連して次の (5), (6) が成立する。

(5) (1)の不等式は $N\geq 4$ のときは $N-2<\alpha<N$ に対して成立し，とくに $N>4$ のときは，$0<\alpha<N-2$ で成立しない。

(6) (i) $N\geq 4$, $\alpha>N-2$ なら $x=0$ を除いて各点で収束

(ii) $N>4$, $\alpha<N-2$ なら $x\in Q^N$ で発散

(iii) $N\geq 2$, $\alpha>N/2$ なら a.e. x で収束

(iv) $N\geq 2$　$\alpha<\frac{N-1}{2}$ なら各点で発散

このうち(5)の前半は[10](ただし，P5のI_4の評価は少し修正を要する)，後半は(6)の(ii)より従う。又(6)は§3の定理とAbel変換より従う。最後に注意を述べてこの報告を終える。

(注) $N \geq 2$ とき，$\alpha_0 \equiv \inf\{\alpha \mid \sum |m|^{-\alpha} e^{2\pi i m x}$ が概収束$\}$ とすると，(iii), (iv)より $\frac{N-1}{2} \leq \alpha_0 \leq \frac{N}{2}$ が従うが，このα_0を求めるという問題は§3の(注1)と関連して興味がある。§3の(注2)で述べた格子点問題の予想，および(3)(4)より $\alpha_0 = \frac{N-1}{2}$ が予想される。

References

[1] Sh. A. Alimov, V. A. Il'in & E. M. Nikishin Convergence problems of multiple trigonometric series and spectral decomposition I Russian Math. Surveys 31, (1976) no.6 p29-86

[2] 同上 II Russian Math. Surveys 32 (1977) no.1 P115-139.

[3] K. I. Babenko On the asymptotics of the Dirichlet kernel of spherical means of multiple Fourier series Dokl. Akad. Nauk. SSSR vol19 (1978) p.1457-1461.

[4] L. Carleson On convergence and growth of partial sums of Fourier series Acta. Math. vol.116 (1966) p135-157.

[5] C. Fefferman The multiplier problem for the ball
Ann. Math. vol.94 (1971) p330–336.
[6] 同上 On the convergence of multiple Fourier series
Bull. Amer. Math. Soc. vol 77 (1971) p744–745.
[7] R.A. Hunt On the convergence of Fourier series
Orthogonal expansions and their continuous analogues.
Southern Illinois Univ. Pr. 1968 p235–255.
[8] V.A. Il'in Problems of localization and convergence for
Fourier series in fundamental systems of functions of the
Laplace operator Russian Math. Surveys vol23 (1968) p61–120.
[9] M.J. Kohn Spherical convergence and integrability of
multiple trigonometric series on hypersurface
Studia Math. vol.43 (1972) p345–354.
[10] S. Kuratsubo 実解析セミナー 1979.
[11] B. Novák Über Gitterpunkte mit Gewichte Mehrdimensionalen Ellipsoiden : Mittelwertsätze
Czechoslovak. Math. J. vol.17 (92) 1967 p609–623.
[12] 同上 Verallgemeinerung eines Peterssonschen Satzes
und Gitterpunkte mit Gewichten Acta. Arith. XIII 1968 p423–454
[13] 同上 On a certain sum in number theory II
Trans. Amer. Math. Soc. vol. 195 (1974) p354–364

[14] H.S. Shapiro Lebesgue constants for spherical partial sums
Jour. Approx. thory. vol.13 (1975) p40–44.
[15] E.M. Stein & G. Weiss Introduction to Fourier analysis
on Euclidean spaces Princeton Univ. Pr. (1971)
[16] S. Wainger Special trigonometric series in k-dimensions
Memoirs Amer. Math. Soc. no.59 (1965)
[17] A. Zygmund Trigonometric series vol I, vol II
Cambridge Univ. Pr. (1959)
($[17]_{\mathrm{I}}$ は vol I, $[17]_{\mathrm{II}}$ は vol. II を指す。)