数理解析研究所講究録
第384巻 1980年 100-121

新しいタイプの不完全データにもとづく統計的推測

川崎医大　仮谷太一

0 生命科学実験とそのデータの特色

生命科学データの統計解析においては，random samplingおよび標本データの概念に関して，標準的なそれとの間に，大きなギャップがあることを常に心掛けておくことが必要である。理想的な実験母集団または調査母集団の構成は，対象が複雑な履歴をもつ生体であるために，本来不可能な場合が多く，現実に得られる実験母集団または調査母集団は，研究者のその問題に関する知識・経験の深浅，技術の巧拙，実験装置および実験・調査組織などにより，大きく左右されるからである。

例えば，いくつかの処理法の優劣を比較しようとする場合，できる限り均質と思われる対象個体を，各処理にrandomに割りつけて実験を行ない，それぞれから得られるデータを，各処理に対応する実験母集団からの無作為標本データとみなして統計解析にかける。この際，

個体の処理に対する反応を誘発する要因に関して，完全な情報を期待することは不可能であり，また分っている要因についても，それを必要に応じて管理または制御できないことが多く，実験・調査の技術や組織の問題とからんで，各処理に対応する実験母集団は，理想的な実験母集団とはかなり隔たっていることを覚悟しなくてはならない。

さらに標本個体のもつ特性値を直接計量しがたいことや，中途脱落例の生ずることも，生命科学データの特徴ということができるであろう。標本個体のもつ特性値と，それを表示する標本データとを区別し，中間に観測システムを設定して，そのシステムの最適化をもはかりながら，生命科学データの統計解析に取り組むことが肝要である。

1 臨床医学的実験または調査とその数学モデル

ある種の病気に対し，特定の医学的処理を行なってから，ある特性（再発，死亡など）が出現するまでの時間 T^* の分布を研究する問題を考えてみよう。

実験の目的ならびに計画を策定し，実際に研究が開始されるとき，実験対象となる患者は，その了解の下に，順次実験に参加することになる。実験開始直後から，実験終了の直前まで，つぎつぎに患者が実験に参加し，それぞれ何回かの診査を受けるというのが臨床医学的実験の普通の

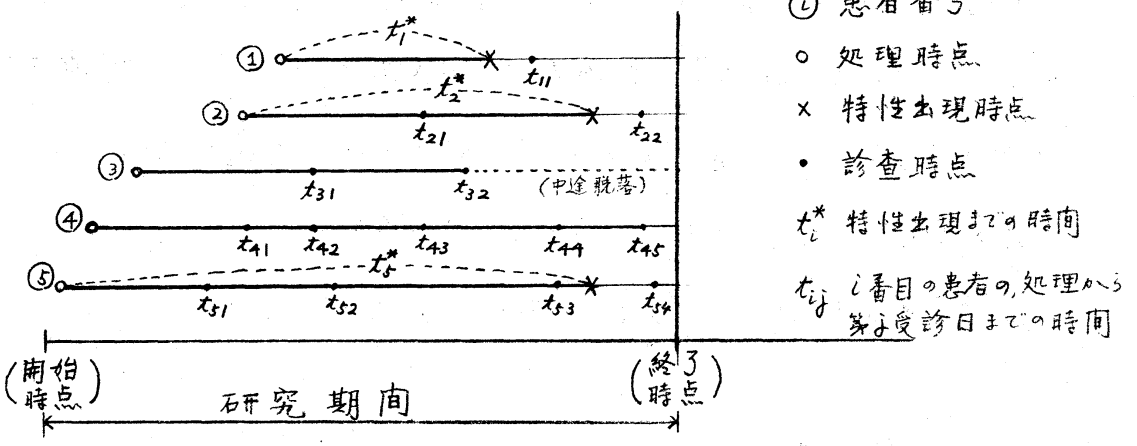
様式である。実験研究の期間中に，交通事故をはじめ，他の原因で死亡するとか，他の地域に転出するとか，あるいはまた，よく分らない理由で，実験から脱落するもののあることは避けられない。これらの脱落症例については，それぞれに特有なパターンの存在を否定することはできないであろうが，ここでは問題を単純化して，T^* の分布に関しては，脱落症例も，追跡できた症例と全く同じ分布に従うものと仮定する。

なお，目指す特性が死亡などの場合には，かなり正確にその特性出現までの時間 T^* を観測することができるので，標準的な統計解析を中心に，中途脱落した症例のもつ情報を追加し，一層信頼のおける結論を導くことに力点がおかれる。より具体的にいえば，exact なデータの統計的推測に付加援用すべき，右に開いたセンサード・データの統計的取扱い方が，工夫の焦点である。こうしたデータの解析については，J. W. Boag [1] をはじめ，かなりな数のパラメトリックな研究報告，および数多くのノンパラメトリックな研究が知られている。しかしここでは，病気の再発，乳歯の萌出・歯触，初潮開始などのように，T^* の値を，実際問題として，明確に観測することができず，個体ごとに定まるある時間区間 I に T^* が含まれることだけを知り得る場合について考察する。上記の時間区間 I を，以後

T^* の interval-censored data と呼ぶことにする.

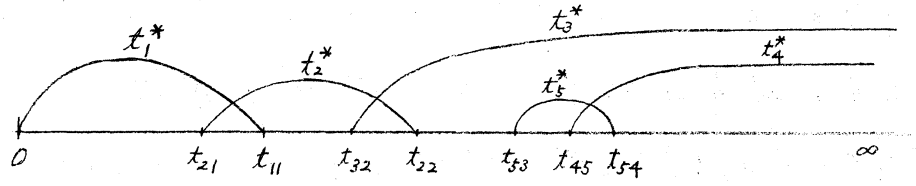
次の〈図1〉に数個の症例について, 実験への参加, 診査時点, 特性出現時点などの概念図を示した。患者番号は, 都合で実験への参加順とは逆になっている.

〈図1〉 臨床医学的実験の模式図



〈図1〉の5症例に対しては, $t_1^* \in (0, t_{11}]$, $t_2^* \in (t_{21}, t_{22}]$, $t_3^* \in (t_{32}, \infty]$, $t_4^* \in (t_{45}, \infty]$, $t_5^* \in (t_{53}, t_{54}]$ が観測されるから, 標本データとして, $(0, t_{11}]$, $(t_{21}, t_{22}]$, $(t_{32}, \infty]$, $(t_{45}, \infty]$, $(t_{53}, t_{54}]$ なる5つの interval-censored data が得られる. これらを念のため図示すると〈図2〉のようになる.

〈図2〉 Interval-censored data



さて，上記の臨床医学的実験または調査にもとづく T^* については，中途脱落の症例も，研究終了のため特性出現まで追跡できなかった症例も，T^* の確率分布に関する限り，特性出現時点観測可能症例と全く同一であるとの仮定の下で，次のような数学モデルを構築することができる．

まず，変数 X の変域を $(\alpha, \beta]$ とし，$x_1, \cdots, x_k$ は $\alpha = x_0 < x_1 < \cdots < x_k < x_{k+1} = \beta$ をみたす ある数列とするとき，関数 $I(X; \boldsymbol{x})$，$\boldsymbol{x} = (x_0, x_1, \cdots, x_k, x_{k+1})$ を次のように定義しておこう．

$X \in (x_{j-1}, x_j]$ のとき，そのときに限り

$$I(X; \boldsymbol{x}) = (x_{j-1}, x_j] \quad \text{ただし } j = 1, 2, \cdots, k+1. \tag{1}$$

確率変数 T^* は直接には観測することはできないが，その関数 $I(T^*; \boldsymbol{t})$ は常に観測可能である．ここに $\boldsymbol{t} = (0, t_1, \cdots, t_k, \infty)$ は T^* の値とは全く無関係に与えられる観測時点列 $t_1, \cdots, t_k$ に，T^* の分布の下限 0，上限 ∞ を付加して得られるベクトルで，$0 < t_1 < \cdots < t_k < \infty$ とする．

$F(t, \theta)$ を $(0, +\infty)$ 上のある分布関数とし，Ω を $(0, a]$，$(a, b]$，$(b, \infty]$ $(0 < a < b < \infty)$ なる形の区間からなる あるクラスとする．このとき T^* は $(0, \infty]$ を変域とする確率変数で その確率分布は，

$$Pr(T^* \in (0, t]; \theta, \beta) = (1 - \beta) F(t, \theta), \quad 0 < t < \infty$$

$$\Pr(T^*=\infty;\theta,\beta)=\beta,\quad 0\le\beta<1 \qquad \Big\}\ (2)$$

で与えられる.

なお, (2)におけるβは, 臨床医学的には, ある医学的処理の結果, 完全に治癒してしまう率(完治率), また, 歯齲蝕のような場合には, 出歯にならない率を表わしている.

このような数学モデルの下での, T^*の分布に関する統計的推測の問題は, 確率分布(2)に従う母集団からの, 大きさnの無作為標本($T_1^*, T_2^*, \cdots, T_n^*$)についての標本データが, interval-censored data ($I(T_1^*;t_1), I(T_2^*;t_2), \cdots I(T_n^*;t_n)$), $t_i=(0, t_{i1}, \cdots, t_{ik_i}, \infty)$, $I(T_i^*;t_i)\in\Omega$として与えられるような場合における, 母数θ,βに関する統計的推測の問題に帰着させることができる.

以後, 標本変数T^*を標本データ$I(T^*;t)\in\Omega$, $t=(0, t_1, \cdots, t_k, \infty)$に変換する観測システムを, censoring observation system と呼ぶことにする. ここに$t_1, \cdots, t_k$はT^*の観測時点列を示し, $0, \infty$はそれぞれT^*の分布の下限, 上限である.

2 いくつかの実例

個体のあるquantalな特性に関する医学的・疫学的調査では, ある特定の出発時点からその特性が出現するまでの時間T^*は, 直接には観測できず, 個体ごとに定まるあ

る時間区間 I に，T^* が含まれることだけを知り得る場合が少なくない。そのような場合のいくつかをあげてみよう。

例1　初潮開始年令を，小学校高学年の女子または中学校の女生徒を対象に，ある日時に一斉調査を実施する場合．このとき それぞれについて，初潮がすでに経験済みであるか否かだけを調査するとすれば，得られるデータは，その時点における各自の年令に関し，経験ずみならば左に開いたセンサード・データ，まだならば右に開いたセンサード・データが得られる。

複数回 同じ対象に対して調査を繰り返すときは，一般に interval-censored data が得られる．これまでの研究によると，出生の年，地域がほぼ同じである女子の初潮開始年令の分布は，正規分布で近似できることが知られている．[4]

例2　幼児の特定乳歯の萌出年令について，数回集団診査を実施し，萌出の有無を調査する場合．上下左右 20本の乳歯について，それぞれの萌出時点を観測記録することはきわめて困難と言わなければならない。さらに萌出しかかっている乳歯をどの時点で萌出とするかも技術的にかなり面倒な問題を含んでいる．実際問題としては，ある地域を定め，同月出生児を対象に，生後約1か年くらいから，4か月おきまたは6か月おきに実施されることが多いようである．なるべく医師は1人とし 萌出の診査基準を厳格に守りながら実施しなくては，信頼のおけるデータは得られない。こうして

得られる標本データは，interval-censored data で，集団診査の回数が重なるほど脱落者が多くなり，また途中から新規に加入するもの，数回の診査のうち何回かを受診しないものなど，いろいろである。しかしいずれにせよ，全部について interval-censored data は入手することができる。乳歯の萌出年令分布については，従来の研究から，正規分布 または 対数正規分布で近似できることが知られている[6]。

例3 胸部ガンの1種について，外科的手術を行なってから，再発するまでの時間を，その後の観察記録にもとづいて調査する場合。手術後どのように診察が行なわれるかは，その時期についても回数についても，患者個々の事情によりまちまちである。また，他の原因で死亡するとか，他地域に転出するとか，あるいはまた他の病院に変わるとか，いろいろの原因により中途脱落症例が生じる。これらの原因別に患者を層別して考えれば，再発までの時間に関して，異なったパターンをもつかも知れない。さらに頻繁に診察に訪れる患者と，そうでない患者とでは，再発までの時間に関して有意な差があるかも知れない。しかしこれらの詳細については，簡単に解明することはできないので，われわれはそこに問題点のあることを指摘するに止め，第1近似として，全症例が同じ分布に従うものと仮定して統計解析を行なわざるを得ないであろう。再発までの時間 T^* の分布については，

(2)のような確率分布で，$F(t,\theta)$ に対数正規分布を仮定する場合が多いようである．

例4　幼児の特定乳歯が萌出してから，齲蝕発病までの時間を，何回かにわたる継続調査で，毎回萌出か否か，齲蝕発病か否かを調査して，研究する場合．　この場合は，幼児の出生から齲蝕発病までの時間ではなく，特定乳歯が萌出してから，齲蝕発病までの時間が問題であり，出発点となる萌出時点も直接観測できず，interval-censored data としてしか与えられないという点で，前の数例よりもさらに面倒である．問題の時間について，2次元的な接近も考えられるが，齲蝕発病区間から，萌出区間を引き算することにより，区間の幅は広くなるけれども，それぞれに interval-censored data を算定することができ，同じように統計解析にかけることができる．　この萌出から齲蝕発病までの時間の分布については，(2)のような確率分布で，$F(t,\theta)$ を対数正規分布として近似することができるように考えられる．　なお，下顎の前歯などは出歯になりにくく，個人により永久歯にぬけ変わるまで出歯にならないものもあるので，(2)における ρ は 1 として取扱わなければならない。

3　データの整理と最尤解

大きさ n の無作為標本 $(T_1^*, T_2^*, \cdots, T_n^*)$ からある censoring observation system の下で得られた interval-censored

data $(I(T_1^*;t_1), \cdots, I(T_n^*;t_n))$† の両端点を込みにして小から大へと順に並べ，必要ならば T^* の分布の下限 α，上限 β を追加し，あらためて $\alpha \equiv t_0 < t_1 < \cdots < t_m < t_{m+1} \equiv \beta$ とする．　各組 (i, j) $(0 \leqq j < i \leqq m+1)$ に対し

c_{ij} = 左右の端点がそれぞれ x_j, x_i に等しい $I(T_\ell^*;t_\ell)$ の個数

を定義する．さらに次の条件：

$$(D_k) \quad \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=0}^{i-1} c_{ij} + \sum_{j=k+1}^{m-1} \sum_{i=j+1}^{m} c_{ij} \neq 0 \qquad (1 \leqq k \leqq m-1)$$

$$(D_0) \quad \sum_{i=2}^{m} \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} \neq 0$$

ただし，上式で定義できない $\sum\sum c_{ij}$ は 0 とする

を定義すれば，$F(t,\theta)$ が正規分布，対数正規分布などのとき，これらの条件を用いて，(θ, ρ) の最尤解が存在することを証明することができ，Newton-Raphson 法による最尤推定が可能であるが，ここにはその詳細は省略する．

なお $\rho = 0$ の場合，最尤解の存在定理は既に 仮谷・中村 (1978) [7] に，最尤解の推定手順およびその実際については，仮谷 (1975) [4] [5]，仮谷・赤坂 (1977) [6] に述べ

†) exact な観測値は，観測システムの下で観測可能な最小単位を幅にもつ区間データとして取扱う。

られている.

4 Interval-censored data のもつ情報量

Interval-censored data にもとづく，母数の最尤推定量のもつ精度を吟味し，またどのような censoring observation system が望ましいかを考察するために，以下，簡単のため，$\rho=0$ で，T^* が $N(\mu, \sigma^2)$ に従う場合について，$I(T^*; \boldsymbol{t})$ にもとづく最尤推定量の μ および σ に関する情報量を求めてみよう。

通常の censoring observation system の下では，μ，σ の最尤推定量 $\hat{\mu}$，$\hat{\sigma}$ が存在しない確率は，無視できるほどに小さいが，厳密に云えば 0 ではない。従って $\hat{\mu}$，$\hat{\sigma}$ は確率変数ではない。そこで以下の議論は，最尤推定値が存在するという条件の下での，条件つき最尤推定量 $\hat{\hat{\mu}}$，$\hat{\hat{\sigma}}$ に関するものである.

観測時点列を $t_1, \cdots, t_k$ $(t_1 < t_2 < \cdots < t_k)$ とし，$\boldsymbol{t} = (t_0, t_1, \cdots, t_k, t_{k+1})$ とする。ただし T^* は正規分布に従うことを仮定しているので，$t_0 = -\infty$，$t_{k+1} = \infty$ である。このとき T^* の関数 $I(T^*; \boldsymbol{t})$ の確率分布は次のようになる.

$I(T^*; \boldsymbol{t})$	$(-\infty, t_1]$	$(t_{\alpha-1}, t_\alpha]$	$(t_k, \infty]$
確率	$\Phi(t_1')$	$\Phi(t_\alpha')-\Phi(t_{\alpha-1}')$	$1-\Phi(t_k')$

(3)

ここに $t_j' = (t_j - \mu)/\sigma$. すなわち t_j' は t_j の標準化度数で, 以後プライムは常にこの約束に従って用いる. また $\Phi(\cdot)$ は標準正規分布の分布関数である.

なお,

$$\delta_j(t^*) = \begin{cases} 1 & t^* \in (t_{j-1}, t_j] \text{ のとき} \\ 0 & \text{その他のとき} \end{cases} \tag{4}$$

を定義しておけば, censoring observation system $I(T^*; t)$ の下における確率度数 T^* の尤度関数は次式によって与えられる.

$$L(\mu, \sigma; t) = \prod_{j=1}^{k+1} \{\Phi(t_j') - \Phi(t_{j-1}')\}^{\delta_j(t^*)} \tag{5}$$

対数をとれば

$$\log L(\mu, \sigma; t) = \sum_{j=1}^{k+1} \delta_j(t^*) \log\{\Phi(t_j') - \Phi(t_{j-1}')\}. \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial \mu^2} = -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^{k+1} \delta_j(t^*) \left[\frac{t_j'\varphi(t_j') - t_{j-1}'\varphi(t_{j-1}')}{\Phi(t_j') - \Phi(t_{j-1}')} + \left\{ \frac{\varphi(t_j') - \varphi(t_{j-1}')}{\Phi(t_j') - \Phi(t_{j-1}')} \right\}^2 \right] \tag{7}$$

ここに $\varphi(\cdot)$ は標準正規分布の密度関数である.

式(7)より μ に関する情報量は

$$i(\mu; t) = -E\left(\frac{\partial^2 \log L}{\partial \mu^2}\right) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^{k+1} \left[t_j'\varphi(t_j') - t_{j-1}'\varphi(t_{j-1}') + \frac{\{\varphi(t_j') - \varphi(t_{j-1}')\}^2}{\Phi(t_j') - \Phi(t_{j-1}')} \right]$$

一方 $t_0' = -\infty$, $t_{k+1}' = \infty$, $t_0'\varphi(t_0') = t_{k+1}'\varphi(t_{k+1}') = 0$ であるから,

$$i(\mu; t) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^{k+1} \frac{\{\varphi(t_j') - \varphi(t_{j-1}')\}^2}{\Phi(t_j') - \Phi(t_{j-1}')} \tag{8}$$

次に $N(\mu, \sigma^2)$ からの大きさ n の無作為標本 $(T_1^*, \cdots, T_n^*)$ が，それぞれの観測時点列の下で，$I(T_1^*; t_1), \cdots, I(T_n^*; t_n)$, $t_i = (t_{i0}, t_{i1}, \cdots, t_{ik}, t_{i k_i+1})$, $t_{i0} = -\infty$, $t_{i k_i+1} = \infty$ なる interval-censored data として観測されるとき，この標本のもつ μ に関する情報量は，(8)式を用いて次のように表わすことができる．

$$I(\mu; t_1, \cdots, t_n) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k_i+1} \frac{\{\varphi(t'_{ij}) - \varphi(t'_{ij-1})\}^2}{\Phi(t'_{ij}) - \Phi(t'_{ij-1})} \qquad (9)$$

一方，$N(\mu, \sigma^2)$ からの大きさ n の標本について，exact な値が観測されるとき，この標本がもつ μ に関する情報量は n/σ^2 である．

従って interval-censored data として観測される標本 $(T_1^*, \cdots, T_n^*)$ がもつ μ に関する情報量の効率は

$$EI(\mu; t_1, \cdots t_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k_i+1} \frac{\{\varphi(t'_{ij}) - \varphi(t'_{ij-1})\}^2}{\Phi(t'_{ij}) - \Phi(t'_{ij-1})} \qquad (10)$$

にほぼ等しい。ほぼというのは観測時点列に伴う最尤推定値の存在しない確率が 0 ではないからであるが，普通にはその値は小さく，効率は (10) に等しいとみなすことができる。

次に $$\frac{\partial^2 \log L}{\partial \sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^{k+1} \delta_j(t^*) \left[\frac{t'_j(2-t'^2_j)\varphi(t'_j) - t'_{j-1}(2-t'^2_{j-1})\varphi(t'_{j-1})}{\Phi(t'_j) - \Phi(t'_{j-1})} \right.$$
$$\left. - \left\{ \frac{t'_j\varphi(t'_j) - t'_{j-1}\varphi(t'_{j-1})}{\Phi(t'_j) - \Phi(t'_{j-1})} \right\}^2 \right].$$

$t_0'\varphi(t_0')=t_{k+1}'\varphi(t_{k+1}')=0$, $t_0'^3\varphi(t_0')=t_{k+1}'^3\varphi(t_{k+1}')=0$ であるから

上の式より, $I(T^*;t)$ のもつ σ に関する情報量は

$$i(\sigma;t)=-E\left(\frac{\partial^2 \log L}{\partial \sigma^2}\right)=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{k+1}\frac{\{t_j'\varphi(t_j')-t_{j-1}'\varphi(t_{j-1}')\}^2}{\Phi(t_j')-\Phi(t_{j-1}')} \qquad (11)$$

従ってまた, interval-censored data $(I(T_1^*;t_1),\cdots\cdots,I(T_n^*;t_n))$, $t_i=(t_{i0},t_{i1},\cdots,t_{ik_i},t_{ik_i+1})$, $t_{i0}=-\infty$, $t_{ik_i+1}=\infty$ のもつ σ に関する情報量は

$$I(\sigma;t_1,\cdots,t_n)=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_i+1}\frac{\{t_{ij}'\varphi(t_{ij}')-t_{ij-1}'\varphi(t_{ij-1}')\}^2}{\Phi(t_{ij}')-\Phi(t_{ij-1}')} \qquad (12)$$

一方 $N(\mu,\sigma^2)$ からの大きさ n の標本について, exact な値が観測されるとき, この標本がもつ σ に関する情報量は $2n/\sigma^2$ である.

このことから, interval-censored data として観測される標本 $(T_1^*,\cdots,T_n^*)$ がもつ σ に関する情報量の効率は

$$EI(\sigma;t_1,\cdots,t_n)=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_i+1}\frac{\{t_{ij}'\varphi(t_{ij}')-t_{ij-1}'\varphi(t_{ij-1}')\}^2}{\Phi(t_{ij}')-\Phi(t_{ij-1}')} \qquad (13)$$

に等しいとみなすことができる.

5 Interval-censored data の効率

exact な値が観測される無作為標本の場合には, 実験または調査すべき標本の大きさ n の見積りについて, 理論的な研究がなされているが, interval-censored data の場合

には，観測点列のパターンに依存するので簡単ではない。

そこで次には，$\rho=0$ かつ母集団分布が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ の場合について，interval-censored data の μ および σ に関する情報量の，exact な標本データに対する効率を算定し，実験または調査計画の立案に資することにしよう。なお，以下に示すような基本的な実験・調査計画においては，式(10)，式(13)の値は，$n=50, 100, \cdots, 500$ に対し，ほとんど変らないことを注意しておこう。

標本個体それぞれに対する観測点列のベクトル $\boldsymbol{t}_1, \cdots, \boldsymbol{t}_n$ について次のような規約をもうける。

$\boldsymbol{t}_i=(t_{i0}, t_{i1}, \cdots, t_{ik_i}, t_{ik_i+1})$ $(i=1, \cdots, n)$ において

a) $k_i=k$ （観測回数はすべてについて k 回），

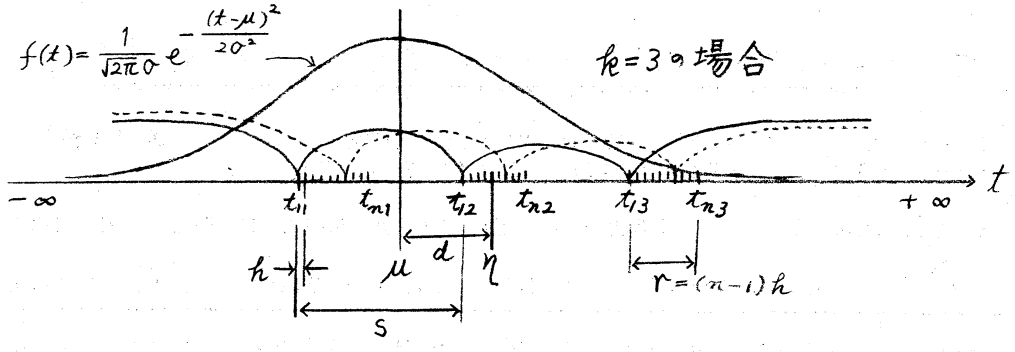
b) $t_{ij}-t_{ij-1}=s$ (>0), $(j=2, \cdots, k)$ （観測間隔一定），

c) $t_{ij}-t_{i-1,j}=h$ (>0), $(i=2, \cdots, n)$ （調査個体の実験への参加は等間隔）.

さらに，k 回にわたる n 人の全観測点 t_{ij} の中央値を ζ とし，$\zeta-\mu=d$ （観測点列の母平均 μ からのずれ）とする。

$r=(n-1)h$ とおけば，r は標本個体の年令幅，または実験への参加時点の広がり を表わしている <図3>.

〈図 3〉 Censoring Observation System



上記の観測システムを $\Sigma_k(n, r, S, d, k)$ で示すことにしよう。 $k=1$, すなわち ただ1回限りの観測システムは, 調査間隔 S には無縁であるから $\Sigma_1(n, r, d, 1)$ で表わすことができる。

計算結果を〈表1〉〈表2〉〈表3〉に示したが, 〈表1〉は, Σ_1 $(n=50)$ の下での, $r=0.0001\sigma$, 0.5σ, …, 6.0σ ; $d=0.0\sigma$, 0.5σ, …, 3.5σ のすべての組合せに対する $EI(\mu)$, $EI(\sigma)$ の値である。 また〈表2〉には, Σ_3 $(n=50)$ の下における, $S=\sigma$ のときの, 上記 r, d のすべての組合せに対する $EI(\mu)$, $EI(\sigma)$ の値を, 〈表3〉には, 同じく $S=3\sigma$ のときの $EI(\mu)$, $EI(\sigma)$ の値を示した。

〈表1〉〈表2〉〈表3〉を一見すれば, μ に関する情報量の大きい r, d の組合せと, σ に関する情報量の大きい r, d の組合せは 食い違っていること, また $k=3$ の

〈表1〉 $\Sigma_1(50, r, d, 1)$ の下での I-C データの効率

EFFICIENCY OF INTERVAL-CENSORED DATA 単位(%)
---AMOUNT OF INFORMATION RELATIVE TO μ---

(AGE RANGE) AMOUNT OF SHIFT OF MEDIAN(TIJD) RELATIVE TO μ

r \ d	0.00	0.50	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00	4.00
0.001	63.66	58.10	43.86	26.91	13.11	4.98	1.46	0.06
0.500	63.16	57.71	43.75	27.06	13.37	5.18	1.56	0.06
1.000	61.70	56.57	43.39	27.48	14.12	5.78	1.87	0.09
1.500	59.39	54.76	42.80	28.09	15.27	6.76	2.40	0.15
2.000	56.37	52.39	41.97	28.80	16.73	8.08	3.18	0.25
2.500	52.86	49.60	40.90	29.47	18.34	9.67	4.22	0.42
3.000	49.07	46.53	39.59	30.00	19.97	11.44	5.51	0.69
4.000	41.46	40.17	36.33	30.25	22.76	15.14	8.70	1.66
5.000	34.74	34.23	32.51	29.23	24.33	18.34	12.23	3.41
6.000	29.38	29.22	28.61	27.15	24.43	20.37	15.39	5.95

EFFICIENCY OF INTERVAL-CENSORED DATA 単位(%)
---AMOUNT OF INFORMATION RELATIVE TO σ---

(AGE RANGE) AMOUNT OF SHIFT OF MEDIAN(TIJD) RELATIVE TO μ

r \ d	0.00	0.50	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00	4.00
0.001	0.00	7.26	21.93	30.27	26.22	15.56	6.56	0.45
0.500	0.68	7.61	21.63	29.69	25.93	15.65	6.76	0.50
1.000	2.61	8.59	20.78	28.05	25.06	15.88	7.35	0.65
1.500	5.47	10.06	19.57	25.60	23.67	16.13	8.24	0.92
2.000	8.81	11.81	18.23	22.73	21.84	16.21	9.27	1.35
2.500	12.14	13.61	17.00	19.83	19.72	16.00	10.29	1.96
3.000	15.03	15.25	16.05	17.23	17.49	15.41	11.11	2.77
4.000	18.49	17.43	15.25	13.76	13.49	13.27	11.64	4.80
5.000	18.80	17.81	15.33	12.69	11.13	10.81	10.64	6.79
6.000	17.29	16.78	15.24	12.92	10.63	9.29	9.01	7.83

<表 2> $\Sigma_3(50, r, 10, d, 3)$ の下での, I-C データの効率

SURVEY INTERVAL= 1.000

EFFICIENCY OF INTERVAL-CENSORED DATA 単位(%)
---AMOUNT OF INFORMATION RELATIVE TO μ---

(AGE RANGE) AMOUNT OF SHIFT OF MEDIAN(TIJD) RELATIVE TO μ

r \ d	0.00	0.50	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00	3.50
0.001	88.24	85.77	77.86	64.06	45.89	27.46	13.23	5.00
0.500	88.03	85.54	77.60	63.86	45.88	27.65	13.50	5.21
1.000	87.39	84.83	76.83	63.29	45.84	28.21	14.29	5.82
1.500	86.30	83.65	75.59	62.39	45.80	29.06	15.53	6.82
2.000	84.72	82.00	73.95	61.26	45.74	30.14	17.12	8.17
2.500	82.64	79.89	71.98	59.98	45.70	31.34	18.94	9.83
3.000	80.05	77.36	69.77	58.62	45.65	32.57	20.89	11.71
4.000	73.52	71.22	64.91	55.88	45.52	34.87	24.73	15.85
5.000	65.78	64.19	59.73	53.12	45.20	36.68	28.09	19.94
6.000	57.87	57.01	54.42	50.15	44.46	37.82	30.71	23.55

EFFICIENCY OF INTERVAL-CENSORED DATA 単位(%)
---AMOUNT OF INFORMATION RELATIVE TO σ---

(AGE RANGE) AMOUNT OF SHIFT OF MEDIAN(TIJD) RELATIVE TO μ

r \ d	0.00	0.50	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00	3.50
0.001	54.06	49.52	40.81	36.45	37.58	36.61	28.17	16.01
0.500	53.63	49.33	41.02	36.72	37.48	36.25	28.00	16.15
1.000	52.42	48.77	41.61	37.46	37.20	35.25	27.51	16.53
1.500	50.66	47.94	42.40	38.47	36.79	33.83	26.76	17.03
2.000	48.64	46.95	43.17	39.47	36.32	32.25	25.83	17.53
2.500	46.69	45.90	43.67	40.22	35.85	30.79	24.85	17.91
3.000	45.04	44.89	43.74	40.52	35.39	29.62	23.97	18.13
4.000	43.00	43.08	42.41	39.56	34.42	28.39	22.90	18.21
5.000	41.90	41.37	39.80	37.09	33.10	28.09	22.93	18.42
6.000	40.25	39.33	37.07	34.33	31.34	27.75	23.52	19.19

〈表 3〉 $\Sigma_3(50, r, 30, d, 3)$ の下での I-C データの効率

SURVEY INTERVAL= 3.000

EFFICIENCY OF INTERVAL-CENSORED DATA 単位(%)
---AMOUNT OF INFORMATION RELATIVE TO μ---

(AGE RANGE) AMOUNT OF SHIFT OF MEDIAN(TIJD) RELATIVE TO μ

r \ d	0.00	0.50	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00	3.50
0.001	65.33	61.61	54.06	50.22	54.03	61.45	64.50	58.26
0.500	64.99	61.43	54.23	50.58	54.20	61.25	64.07	57.89
1.000	64.00	60.92	54.72	51.60	54.68	60.67	62.85	56.82
1.500	62.53	60.17	55.46	53.09	55.39	59.79	60.96	55.14
2.000	60.81	59.30	56.32	54.82	56.19	58.69	58.59	53.00
2.500	59.10	58.45	57.17	56.49	56.94	57.48	55.98	50.57
3.000	57.66	57.74	57.88	57.88	57.47	56.23	53.37	48.05
4.000	56.21	57.00	58.55	59.09	57.46	53.73	48.83	43.45
5.000	56.66	57.18	58.12	58.01	55.71	51.26	45.71	40.22
6.000	57.87	57.66	56.93	55.39	52.68	48.66	43.67	38.46

EFFICIENCY OF INTERVAL-CENSORED DATA 単位(%)
---AMOUNT OF INFORMATION RELATIVE TO σ---

(AGE RANGE) AMOUNT OF SHIFT OF MEDIAN(TIJD) RELATIVE TO μ

r \ d	0.00	0.50	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00	3.50
0.001	13.13	25.85	51.93	65.26	51.56	24.01	6.57	9.10
0.500	14.32	26.48	51.34	63.99	50.93	24.50	7.50	9.58
1.000	17.69	28.26	49.65	60.40	49.10	25.86	10.15	10.99
1.500	22.72	30.87	47.12	55.10	46.30	27.75	14.10	13.18
2.000	28.65	33.87	44.13	48.96	42.90	29.76	18.73	15.93
2.500	34.54	36.79	41.13	42.88	39.31	31.45	23.34	18.98
3.000	39.52	39.23	38.54	37.61	35.93	32.52	27.28	21.99
4.000	44.50	41.60	35.55	31.34	31.09	32.48	31.52	26.70
5.000	42.67	40.41	35.28	30.86	29.55	30.51	30.87	28.29
6.000	37.54	37.14	35.72	33.23	30.49	28.67	27.89	26.85

観測システム Σ_3 になると，S が大きく影響して複雑になり，とても直観的に妥当な観測システムを策定することは困難であることがわかるであろう。μ の推定に重点をおくか，σ の推定に重点をおくか，あるいは両者の推定値にほぼ同等の精度を望むかによって観測計画は大幅に違ってくるので，表を入念に検討して計画を策定することが必要である。

1974年4月下旬，A中学校新入生約500名の女生徒を対象とした初潮調査 Σ_1 (500人，365日，40日，1)での μ，σ に関する情報量の効率はそれぞれ 6.2%，2.1% であった。この調査は μ の推定に重点をおいた調査であったので，ほぼ満足のいく精度であったということができる。$500 \times 0.062 = 310$ であるから，「初潮は経験すみか否か」だけを1回に限って調査したこの調査の，μ に関する情報量としては，約310人についての正確な初潮年令(単位日)データに匹敵していることがわかる。もし σ に重点がおかれていたとすれば，$500 \times 0.021 = 10.5$ 人の正確なデータに匹敵する情報量しか含んでいないので，もう少し時期をずらすことが必要であることが〈表1〉から読みとれる。

参考文献

[1] Boag, J. W. (1949); Maximum Likelihood Estimates of the Proportion of Patients Cured by Cancer Therapy, Journal of the Royal Statistical Society, Vol. B11, p.15-53.

[2] Harris, T. E., P. Meier, and J. W. Tukey (1950); The Timing of the Distribution of Events Between Observations, Human Biology, Vol. 22, p. 249-270.

[3] Hughes, E. J. (1962); Maximum Likelihood Estimation of Distribution Parameter from Incomplete Data, Universty Microfilms Inc., Ann Arbor.

[4] Kariya, T. (1975); Menarche Age Distribution Estimated by the Method of Maximum Likelihood on Incomplete Quantal Response Data, Kawasaki Medical J., Vol. 1, p.75-83. (in Japanese)

[5] Kariya, T. (1975); Incomplete Quantal Response Data Analysis-Maximum Likelihood Estimation of Parameters Based on Mixture of Interval Data and Ordinary Ones, Kawasaki Med. J., Vol. 1, p.85-93.

[6] Kariya, T. and M. Akasaka (1977); The Eruption Age Distribution of Deciduous Teeth-Maximum Likelihood Estimation of Parameters Based on Incomplete Quantal Response Data, Japanese J. Applied Statistics, Vol. 5, p.3-18. (in Japanese)

[7] Kariya, T. and T. Nakamura (1978): The Maximum likelihood Estimates Based on the Incomplete Quantal Response Data, Journ. Japan Statist. Soc., Vol. 8, 1, p.21-28.

[8] Kulldorff, G. (1958a); Maximum Likelihood Estimation of the Mean of a Normal Random Variable when the Sample is Grouped, Skand. Aktuarietidskr., Vol. 41, p.1-17.

[9] Kulldorff, G. (1958b); Maximum Likelihood Estimation of the Standard Deviation of a Normal Random Variable when the Sample is Grouped, Skand. Aktuarietidskr., Vol. 41, p.18-36.

[10] Peto, R. (1973); Experimental Survival Curve for Interval-Censored Data, Appl. Statist., Vol. 22, p. 86-91.