数理解析研究所講究録
第 387 巻 1980 年 93-98

多変数における Riemann-Hilbert の問題について

上智大 理工学部 喜多通武

$\bar{X}$ を射影代数多様体，D を $\bar{X}$ 内の divisor とし，$X=\bar{X}-D$ を affine 代数多様体とする．X 内基点 $*$ を取り，複素ベクトル空間 V への表現 $\rho: \pi_1(X,*) \longrightarrow GL(V)$ を考える．これより定まる X 上の local system を V_ρ とすると，良く知られている様に，V_ρ の定める X 上の locally free sheaf $\mathcal{V}$ 上に完全積分可能な接続 $\nabla: \mathcal{V} \longrightarrow \Omega^1_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{V}$ が定義されて，これの局所的な解のつくる層を V_ρ と一致させることが出来る．この時 Grothendieck-Deligne の比較定理は local system V_ρ 係数の cohomology $H^{\cdot}(X;V_\rho)$ を $\mathcal{V}$-valued rational forms のつくる次の複体で計算できることを主張する：

$$0 \longrightarrow \Gamma(X,\Omega^0_X(\mathcal{V})) \xrightarrow{\nabla} \Gamma(X,\Omega^1_X(\mathcal{V})) \xrightarrow{\nabla} \cdots \xrightarrow{\nabla} \Gamma(X,\Omega^n_X(\mathcal{V})) \to 0$$

青本 [1], [2] は，$\mathcal{V}$ が free となる時，この計算を適当な状況の下で行ない，興味ある次の様な結果を得ている：

$X = \mathbb{P}^n - D$ とし，$\mathcal{V}$上の接続∇の接続形式をωとする．従って $dY = Y\omega$ という微分方程式の解の層としてV_ρを捕える．

条件(1)　ωはDに沿ってDeligneの意味の対数極をもつ

条件(2)　Δを単位円板とし，正則写像 $j: \Delta \longrightarrow \mathbb{P}^n$ で $j(0) \in D$ かつ $j^{-1}(D)$は0のみとする．この時，ωのΔへの引きもどし $j^*(\omega)$ の点0での留数 $\operatorname{res}_{z=0} j^*(\omega)$ は $\{0, 1, 2, \cdots\}$を固有値に持たない，この条件下，

$X = \mathbb{P}^2 -$ 任意のdivisor　又は　$X = \mathbb{P}^n - \{\text{hyperplanes}\}$

の時　　$H^q(X; V_\rho) = 0$　　for　$q \leq n-1$　．

local system V_ρ と接続∇は興味ある研究対象をなしているが，より具体的な研究をなすには，どの様な条件下でglobalな接続型式ωが見つかるか，又ωはDに沿ってどの様な特異点を持つかを一般的に論じておく価値はあると思われる．従って，次の問題を設定する：

Riemann-Hilbertの問題：　複素多様体$\overline{X}$（連結とする）と$\overline{X}$内のdivisor D 及び $X = \overline{X} - D$ 上のlocal system V_ρ が与えられている時，$\overline{X}$上の有理型型式ωでX上正則なものを構成し V_ρが完全積分可能な微分方程式 $dY = \omega Y$ の解の層となり，かつこの方程式はDに沿って確定特異点を持つ様にすること．またωのDに沿っての特異点をgenerically logarithmic poleを持つ様にできるか?

これに対する解答はXの次元に関係する様に思われる.

__2次元の場合.__

$\overline{X}$を2次元の連結な複素多様体とし,$X = \overline{X} - D$は上の通りとする.Deligne-Maninの結果とSerreの連接層に関する接続の問題のいくつかの結果を用いるとlocal system V_ρを$\overline{X}$全体のlocally free sheaf $\tilde{\mathcal{V}}$へ接続でき,connection ∇は$\tilde{\mathcal{V}}$上確定特異点をDに沿って持つ有理型connectionとなる.従って,$\tilde{\mathcal{V}}$がfree sheafとなるなら,∇は$\overline{X}$上有理型なconnection form ωを持ち,Dに沿ってgenerically logarithmic poleを持つ.

とくに$\overline{X}$が2次元Stein多様体の時,岡の原理を用いて$\tilde{\mathcal{V}}$がtopologicalベクトル束として自明であるかを調べればよい.F. Petersonの結果を用いると,2次元Stein多様体$\overline{X}$が$H^2(\overline{X}; \mathbb{Z}) = 0$を満たす時,$X$上の任意のlocal system V_ρに対してconnection form ωをDに沿ってgenerically log. poleを持つ様に出来る.

また$\overline{X}$が2次元affine space $\mathbb{C}^2$のとき,Quillenにより$\tilde{\mathcal{V}}$を代数的ベクトル束と見て自明に出来る.従って,この時はωを$\mathbb{C}^2$上のrational formでDに沿ってgenerically log. poleを持つものに取れる.

問題：ωを無限遠直線 H_∞ に沿って generically log. pole を持つ様に出来るか？ また，どの様な ω に関する条件下，青本と類似の結果が成立するか？

3次元以上の時，$X = \bar{X} - D$ として，X 上の局所系 V_ρ を $\bar{X}$ 全体の連接層には接続できるが，決して $\bar{X}$ 上の locally free sheaf として延長できない例を与えることが出来る。つまり3次元以上の時，connection form ω を Röhrl や Deligne 流のベクトル束の接続として問題を捉えて構成しようとするとうまく行かない――少くとも筆者には思われる。

例は次の様に構成される：H. Lindel は次の局所環の計算を行った。即ち $\mathbb{C}^6(x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2)$ 内で次の式で定義される解析空間 X は原点を孤立特異点とし，3次元の正規な解析空間となるが，原点での X の局所環は Macaulay 環とならない。

$$X: \quad \begin{array}{l} x_i y_j - x_j y_i = 0 \quad (i, j = 0, 1, 2,\ i \neq j) \\ \sum x_i^3 = 0, \ \sum x_i^2 y_i = 0, \ \sum x_i y_i^2 = 0, \ \sum y_i^3 = 0 \end{array}$$

多変数函数論の local parametrization theorem を用いて，finite 正則写像 $f: X \longrightarrow \mathbb{C}^3$ を構成できる。この f の

critical locus を D とする．$f: X - f^{-1}(D) \longrightarrow \mathbb{C}^3 - D$ は不分岐な被覆写像ゆえ，$X - f^{-1}(D)$ 上の constant sheaf $\mathbb{C}_{X-f^{-1}(D)}$ の direct image $f_*(\mathbb{C}_{X-f^{-1}(D)})$ として $\mathbb{C}^3 - D$ 上の local system V_p を得る．解析空間 X が正規ゆえ，そこで Riemann の除去可能定理が成立することおよび absolute gap-sheaf に関する事実を用いて，上の V_p は $\mathbb{C}^3$ の locally free sheaf へ延長できないことが分かる。証明や文献の詳細は筆者の論文 [3], [4] を参照して下さい。

文献

[1] K. Aomoto : Les équations aux differences linéaires et les intégrales des fonctions multiformes, J. Fac. Scie. Univ. of Tokyo, Sect. IA, vol. 22, No. 3 pp. 271-297

[2] K. Aomoto : Un théorème du type de Matsushima-Murakami concernant l'intégrale des fonctions multiformes, J. Math. Pures Appl ; 52 (1973), 1-11

[3] M. Kita ; The Riemann-Hilbert problem and its application to analytic functions of several complex variables ; Tokyo J. of

Math. vol. 2, (1979) No. 1 , pp. 1~27

[4] M. Kita : The Riemann-Hilbert problem in several complex variables (II) ibid, vol. 2 (1979) No. 2