数理解析研究所講究録
第 387 巻 1980 年 99-113

擬凸領域の境界上の局所コホモロジーの双対性定理

早大 理工　郡 敏昭

D を $n\ (\geqq 2)$ 次元解析空間 X の中の相対コンパクトな開集合で，その境界 $B = \partial D$ は余次元 1 の部分多様体とする．すなわち B の近傍は X の regular な点ばかりからなっているとする．さらに B は強擬凸な境界であると仮定する．あるいは D が強擬凸な開集合であると言ってもよい．Ω^p, $1 \leq p \leq n$, で X 上の正則微分形式をあらわす．次の諸結果が示された．

$\mathcal{F}$ を X 上の連接層とするとき，

(0.1) $$\dim_{\mathbb{C}} H^q(B, \mathcal{H}^1_B \mathcal{F}) < \infty, \quad \text{for } 0 < q < \operatorname{prof} \mathcal{F} - 1 .$$

(0.2) $$(H^q(B, \mathcal{H}^1_B \mathcal{F}))' \cong \operatorname{Ext}^{n-q-1}(B; \mathcal{H}^1_B \mathcal{F}, \mathcal{H}^1_B \Omega^n) \quad \text{for } q < \operatorname{prof} \mathcal{F} - 1 .$$

ここに アクセント $'$ は位相的双対 をあらわし，また

$\underline{H}^1_B \mathcal{F}$ は B に台をもつ1次の局所コホモロジーの層である。

Serre - Malgrange duality theorem は次のように述べられる. V を次元 n の複素解析多様体, $\mathcal{F}$ をその上の連接層とする。このとき $H^p(V, \mathcal{F})$ に Frechet - Schwartz 空間の位相の商位相を, $Ext_c^{n-p}(V; \mathcal{F}, \Omega^n)$ に Dual of Frechet - Schwartz 位相の商位相を導入し これらに associate した ハウスドルフ空間について

$$(H^p(V, \mathcal{F})_{sep})' \cong Ext_c^{n-p}(V; \mathcal{F}, \Omega^n)_{sep}$$

が成り立つようにできる。同じく $H_c^q(V, \mathcal{F})$ 上に QDFS 空間の位相を, $Ext^{n-q}(V; \mathcal{F}, \Omega^n)$ 上に QFS 空間の位相を導入し

$$(H_c^q(V, \mathcal{F})_{sep})' \cong Ext^{n-q}(V; \mathcal{F}, \Omega^n)$$

を成り立たせることができる.

さて 上の D が多様体となっているとき, アンドレオッチ = グラウエル の結果より

$$\dim_{\mathbb{C}} H^q(D, \mathcal{F}) < \infty, \quad q > 0,$$

$$\dim_{\mathbb{C}} H_c^q(D, \mathcal{F}) < \infty, \quad q < \operatorname{prof} \mathcal{F},$$

を知っているから, これら コホモロジーの空間は当然 ハウスドルフであり, したがって

(0.3) $H^q(D, \mathcal{F})' \cong \mathrm{Ext}_c^{n-q}(D, \mathcal{F}, \Omega^n)$,

(0.4) $H_c^q(D, \mathcal{F})' \cong \mathrm{Ext}^{n-q}(D; \mathcal{F}, \Omega^n)$,
$(q < \mathrm{prof}\, \mathcal{F})$

が成立する。

(0.2) (0.3) (0.4) の3つの双対性は次のような関係にある: 列

$\cdots \to H^{q-1}(B, \mathcal{H}_B\mathcal{F}) \to H_c^q(D, \mathcal{F}) \to H^q(D, \mathcal{F}) \to H^q(B, \mathcal{H}_B\mathcal{F}) \to \cdots$

は完全であり, その双対

$\cdots \leftarrow \mathrm{Ext}^{n-q}(B; \mathcal{H}_B\mathcal{F}, \mathcal{H}_B\Omega^n) \leftarrow \mathrm{Ext}^{n-q}(D; \mathcal{F}, \Omega^n) \leftarrow$
$\mathrm{Ext}_c^{n-q}(D; \mathcal{F}, \Omega^n) \leftarrow \mathrm{Ext}^{n-q-1}(B, \mathcal{H}_B\mathcal{F}, \mathcal{H}_B\Omega^n) \leftarrow$

も完全となる。

この論文では概略を記す 詳しくは文献 [2] を見ていただきたい。

§1, Ext 函手

$(X, \mathcal{A})$ を環付空間, Z を X の局所閉集合.

$j: (Z, \mathcal{B} = \mathcal{A}|Z) \longrightarrow (X, \mathcal{A})$ を inclusion とする.

(1.1.) finite presentation $\mathcal{A}$-加群 $\mathcal{F}$ に対し,

$$j_* j^*(\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}, \mathcal{H})) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(j_* j^*\mathcal{F}, j_* j^*\mathcal{H})$$

が, 任意の $\mathcal{A}$-加群 $\mathcal{H}$ につき成立つ.

Z を開集合とする。 閉集合 U に対し, U 内の開集合で

$U \cap Z$ に含まれるようなものの全体を $\Phi_U(U \cap Z)$ と書く。

$G \in Ab(Z)$ に対し $j_! G \in Ab(X)$ を

$$\Gamma(U, j_! G) = \Gamma_{\Phi_U(U \cap Z)}(U \cap Z, G)$$

で定義する。

$\mathcal{F} \in Ab(X)$ に対し

$$R^p j_! (\mathcal{F} | Z) = 0 \quad , p > 0 ,$$

$$H^p(X, j_!(\mathcal{F}|Z)) \cong H^p_{\Phi_X(Z)}(Z, \mathcal{F}|Z)$$

が成り立つ。

X paracompact としよう。D 開 $\Subset X$，

$B = \partial D$ とする。

$$i : B \hookrightarrow X, \quad j : D \hookrightarrow X$$

を inclusions とする。このとき $\mathcal{F} \in Ab(X)$ に対し列

$$0 \to j_!(\mathcal{F}|D) \to j_*(\mathcal{F}|D) \to i_*(j_*(\mathcal{F}|D)|B) \to 0$$

は完全である。

補題 1.2. $\mathcal{F}$ finite presentation A－加群，

$\mathcal{G}$: A－加群で $\mathcal{G}|D$ が j_*－acyclic すなわち $R^p j_*(\mathcal{G}|D) = 0$, $p > 0$, とする。このとき次の列は完全：

$$\cdots\cdots \longrightarrow \mathrm{Ext}^{p}_{\Phi_X(D)}(D;\ \mathcal{F}, \mathcal{G}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{p}(D;\ \mathcal{F}, \mathcal{G})$$

$$\longrightarrow \mathrm{Ext}^{p}(B;\ j_*(\mathcal{F}|D),\ j_*(\mathcal{G}|D)) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{p+1}_{\Phi_X(D)}(D;\ \mathcal{F}, \mathcal{G})$$

$$\longrightarrow \cdots .$$

補題1.3. $\mathcal{F}$ を finite presentation A-加群, $\mathcal{G}$ を A-加群で $(\mathcal{G}|D)$ が j_*-acyclic とする. また $\mathcal{U}$ を B の近傍の開被覆とする. このとき

$$\mathrm{Ext}^{\cdot}(B;\ j_*(\mathcal{F}|D),\ j_*(\mathcal{G}|D))$$

を aboutement とするスペクトル列で, その第2項が

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathcal{U}\cap B,\ ext^{q}_{A}(j_*(\mathcal{F}|D), j_*(\mathcal{G}|D)))$$

で与えられるものが存在する. ここに $ext^{q}_{A}(\mathcal{M}, \mathcal{L})$ は

$$V \longmapsto \mathrm{Ext}^{q}_{A}(V;\ \mathcal{M}, \mathcal{L})$$

で定義される presheaf (system of coefficients) である.

§2. 擬凸領域の境界上 および その内部, 外部における コホモロジー.

$(X, \mathcal{O})$ を reduced, $\dim X \geq 2$, なる解析空間. D を相対コンパクト強擬凸開集合, $B = \partial D$ とする.

$$i: B \hookrightarrow X, \quad j \hookrightarrow X \quad \text{inclusion}$$

とする. Andreotti — Grauert の結果を書きなおすと次のように述べられる. $\mathcal{F} \in coh(X)$ に対し

$$(2.1)\quad \begin{cases} R^p j_*(\mathcal{F}|D) = 0 & , p > 0, \\ \underline{H}^p_B \mathcal{F} = 0 & p = 0,\ 1 < p < \operatorname{prof} \mathcal{F}, \\ & \dim \mathcal{F} < p \\ \underline{H}^1_B \mathcal{F} = i_*(j_*(\mathcal{F}|D)|B). \end{cases}$$

ここに $\underline{\Gamma}_B \mathcal{F}$ を $\Gamma(U, \underline{\Gamma}_B \mathcal{F}) = \Gamma_{U \cap B}(U, \mathcal{F}|U)$ で定義される層とすると $\underline{\Gamma}_B$ は函手 $: Ab(X) \to Ab(X)$ だが, その p 次導来函手 $R^p \underline{\Gamma}_B$ を $\underline{H}^p_B$ と書いている.

補題 1.2 より $\mathcal{G}, \mathcal{F} \in coh(X)$ に対し

$$\cdots \to Ext^p_{\Phi_X(D)}(D; \mathcal{F}, \mathcal{G}) \to Ext^p(D; \mathcal{F}, \mathcal{G})$$
$$\to Ext^p(B; \underline{H}^1_B \mathcal{F}, \underline{H}^1_B \mathcal{G}) \to Ext^{p+1}_{\Phi_X(D)}(D, \mathcal{F}, \mathcal{G})$$

が完全列となる.

補題 1.3 より $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in coh(X)$ に対し,

次のスペクトル列がある。

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathcal{U} \cap B, \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}}^q(\underline{H}_B^1 \mathcal{F}, \underline{H}_B^1 \mathcal{G})) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{\cdot}(B; \underline{H}_B^1 \mathcal{F}, \underline{H}_B^1 \mathcal{G})。$$

とくに $\mathcal{F} \in \mathrm{coh}(X)$ に対し

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathcal{U} \cap B, \mathcal{H}^q(\underline{H}_B^1 \mathcal{F})) \Rightarrow H^{\cdot}(B, \underline{H}_B^1 \mathcal{F})$$

なるスペクトル列がある。ここに $\mathcal{H}^q(\mathcal{M})$ は

$$V \rightsquigarrow H^q(V, \mathcal{M})$$

なる presheaf。

exact 列 $0 \to j_!(\mathcal{F}|D) \to j_*(\mathcal{F}|D) \to i_*(j_*(\mathcal{F}|D)|B) \to 0$

$$i_*(j_*(\mathcal{F}|D)|B) \cong \underline{H}_B^1 \mathcal{F}$$

より presheaf の exact 列

$$\to \mathcal{H}^{q-1}(\underline{H}_B^1 \mathcal{F}) \to \mathcal{H}_\Phi^q(\mathcal{F}) \to \mathcal{H}^q(j_* \mathcal{F}) \to \mathcal{H}^q(\underline{H}_B^1 \mathcal{F}) \to$$

が得られる。

以下 $\mathcal{U}$ を B の近傍 N の開被覆で

- $U_\lambda \cap B \neq \phi \quad \forall U_\lambda \in \mathcal{U}$
- $H^q(U_\lambda \cap D, \mathcal{F}) = 0 \quad q \geq 1, \quad \mathcal{F} \in \mathrm{coh}(X)$
- $H_\Phi^q(U_\lambda \cap D, \mathcal{F}) = 0, \quad q < \mathrm{prof}\, \mathcal{F}, \quad q > \dim \mathcal{F}$, $\mathcal{F} \in \mathrm{coh}(X)$

を満足するものとする。

$R^p j_*(\mathcal{F}|D) = 0 \quad p \geq 1, \ \mathcal{F} \in \mathrm{coh}(X)$ だったから

$\mathcal{H}^q(j_* \mathcal{F}) = 0 \quad q \geq 1$ on the nerf of $\mathcal{U}$。

したがって上の exact 列より，$\mathfrak{F}$ が Cohen-Macaulay sheaf のとき

$$\mathcal{H}^q(\underline{H}^1_B\mathfrak{F}) = 0 \qquad q \neq 0,\ q \neq \mathrm{prof}\,\mathfrak{F}-1$$

$$\mathcal{H}^{m-1}(\underline{H}^1_B\mathfrak{F}) \cong \mathcal{H}^m_{\Phi}(\mathfrak{F}) \quad 但\ m = \mathrm{prof}\,\mathfrak{F}.$$

が $\mathfrak{U}$ の nerf に対して成り立つ。

上のスペクトル列とあわせて考え次の結論を得る．

命題2.2. $\mathfrak{U}$ を上の被覆，$\mathfrak{F}$ Cohen-Macaulay 層．に対し次が成り立つ：

(1) $H^p(\mathfrak{U}\cap B,\ \mathcal{H}^q(\underline{H}^1_B\mathfrak{F})) = 0 \quad q \neq 0,\ q \neq m-1$

$H^p(\mathfrak{U}\cap B,\ \underline{H}^1_B\mathfrak{F}) = 0 \quad p \geqq m$

$H^p(\mathfrak{U}\cap B,\ \mathcal{H}^{m-1}(\underline{H}^1_B\mathfrak{F})) = 0 \quad p \geqq 1$

但 $m = \mathrm{prof}\,\mathfrak{F}$

(2) $H^p(\mathfrak{U}\cap B,\ \underline{H}^1_B\mathfrak{F}) \cong H^p(B,\ \underline{H}^1_B\mathfrak{F})$

for $p \leqq \mathrm{prof}\,\mathfrak{F} - 2$

(3) $0 \to H^{m-1}(\mathfrak{U}\cap B, \underline{H}^1_B\mathfrak{F}) \to H^{m-1}(B, \underline{H}^1_B\mathfrak{F}) \to$

$\to H^0(\mathfrak{U}\cap B,\ \mathcal{H}^{m-1}(\underline{H}^1_B\mathfrak{F})) \to 0$

は exact．

(Cartan-Eilenberg : Homological Algebra XV, 5.5 etc)

さらに次が成り立つ

(2.3).
$$H^p(\mathfrak{U}\cap B, \underline{H}^1_B\mathcal{F}) \cong H^p(\mathfrak{U}\cap D, \mathcal{F})$$
$$\cong H^p(N\cap D, \mathcal{F})$$
$$\text{for } p \le m-2.$$
$$(\because\ \Gamma(V\cap B, \underline{H}^1_B\mathcal{F}) \cong \Gamma(V\cap D, \mathcal{F}),\ V\in\mathfrak{U}_{\text{nerf}})$$

(2.4)
$$H^0(\mathfrak{U}\cap B, \mathcal{H}^{m-1}(\underline{H}^1_B\mathcal{F})) \cong H^0(\mathfrak{U}\cap D, \mathcal{H}^m_{\Phi}(\mathcal{F}))$$
$$\cong H^m_{\Phi}(N\cap D, \mathcal{F})$$

(2.5)
$$H^p_{\Phi}(N\cap D, \mathcal{F}) = 0 \qquad p \ne m.$$

Traces

補題　$\mathfrak{U}$ を上記の被覆とする.

(1) presheaf の列
$$0 \to \mathcal{H}^0(C) \to \mathcal{H}^0(\underline{H}^1_B\Omega^0) \to \cdots \to \mathcal{H}^0(\underline{H}^1_B\Omega^{n-1})$$
$$\to \mathcal{H}^0(\underline{H}^1_B\Omega^n) \to 0$$
は $\mathfrak{U}$ の nerf 上で exact となる.

(2) presheaf の列
$$0 \to \mathcal{H}^{n-1}(\underline{H}^1_B\Omega^0) \to \mathcal{H}^{n-1}(\underline{H}^1_B\Omega^1) \to \cdots \to \mathcal{H}^{n-1}(\underline{H}^1_B\Omega^n) \to 0$$
は $\mathfrak{U}$ の nerf 上で exact である.

?

この補題より 次の exact 列の可換図が得られる.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & H^{n-1}(\mathcal{U}, \underline{H}^{!}_{B}\Omega^{n-1}) & \to & H^{n-1}(B, \underline{H}^{!}_{B}\Omega^{n-1}) & \to & H^{0}(\mathcal{U}, \mathcal{H}^{n-1}(\underline{H}^{!}_{B}\Omega^{n-1})) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & H^{n-1}(\mathcal{U}, \underline{H}^{!}_{B}\Omega^{n}) & \to & H^{n-1}(B, \underline{H}^{!}_{B}\Omega^{n}) & \to & H^{0}(\mathcal{U}, \mathcal{H}^{n-1}(\underline{H}^{!}_{B}\Omega^{n})) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & H^{2n-1}(B, \mathbb{C}) & = & H^{2n-1}(B, \mathbb{C}) & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}
$$

Trace を, $T^0 : H^{n-1}(\mathcal{U}, \underline{H}^{!}_{B}\Omega^{n}) \longrightarrow H^{2n-1}(B, \mathbb{C}) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{C}$

で定義し, 命題 2.2 (1) と上の可換図の右端に注意して,

$$T^p : H^{n-1-p}(\mathcal{U}, \mathcal{H}^p(\underline{H}^{!}_{B}\Omega^{n})) \longrightarrow \mathbb{C}$$

を零写像として延長しておく. これは退化したスペクトル列の morphisme

$$T^{\bullet} : H^{n-1-\bullet}(\mathcal{U}, \mathcal{H}^{\bullet}(\underline{H}^{!}_{B}\Omega^{n})) \longrightarrow \mathbb{C}$$

と考えられ その aboutement の trace

$$T : H^{\bullet}(B, \underline{H}^{!}_{B}\Omega^{n}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

を induce する.

(2.4) $H^{n-1}(\mathcal{U}, \underline{H}^{!}_{B}\Omega^{n}) \simeq H^{n-1}(N \cap D, \Omega^{n})$ に注意すれば T^0 は

$$[\varphi] \longmapsto \int_{(\rho = -\varepsilon)} \varphi \in H^{2n-1}(B_{\varepsilon}, \mathbb{C}) \simeq H^{2n-1}(B, \mathbb{C})$$

で与えられる。ただし $\varphi \in \Gamma(N \cap D, \mathcal{E}^{n,n-1})$, $\bar\partial\varphi = 0$ は、$[\varphi] \in H^{n-1}(N \cap D, \Omega^n)$ の代表である。

§3 有限性と双対性

$\mathfrak{U}$ を §2 で述べた covering of a nbd of B.

$$\Gamma(U_{i_0 \cdots i_p} \cap B, \underline{H}^1_B \mathcal{F}) \cong \Gamma(U_{i_0 \cdots i_p} \cap D, \mathcal{F}),$$
$$\mathcal{F} \in coh(X),$$

により右辺の FS 空間の構造を左辺に入れる。こうして

$C^p(\mathfrak{U} \cap B, \underline{H}^1_B \mathcal{F})$, $\mathcal{F} \in coh(X)$,

$\hat{C}^p(\mathfrak{U} \cap B, \underline{H}^1_B \mathcal{F})$ (交代コチェイン)

$\hat{Z}^p(\mathfrak{U} \cap B, \underline{H}^1_B \mathcal{F})$ (交代サイクル)

にも FS-空間の構造が入る。

補題 $\exists \varepsilon > 0$, $\forall \mathcal{F} \in coh(X)$, $\forall p > 0$,

$$H^p(A_\varepsilon, \mathcal{F}) \to H^p(D \cap N, \mathcal{F}) \quad \text{surjective}$$

但 $A_\varepsilon = \{x \in N;\ \rho(x) < \varepsilon\}$

これは Andreotti-Grauert と同様に示せる。

定理. $\mathcal{F} \in coh(X)$。このとき

$$\dim H^p(B, \underline{H}^1_B \mathcal{F}) < \infty$$
$$0 < p < \operatorname{codh} \mathcal{F} - 1 。$$

証明

§2 に述べた covering $\mathfrak{U}$ をとり

$$\dim H^p(\mathcal{U}\cap B, \mathcal{H}^1_B \mathcal{F}) < \infty \quad , \forall p > 0,$$

を示す。　$p < \operatorname{codh} \mathcal{F} - 1$　に対しては

$$H^p(\mathcal{U}\cap B, \mathcal{H}^1_B \mathcal{F}) \cong H^p(B, \mathcal{H}^1_B \mathcal{F})$$

がわかっているからである。

上の補題の A_ε をとる。A_ε の有限スタイン被覆 $\mathcal{V} = (V_j)_{1\le j\le e}$ をとり、$D\cap N$ の被覆 $\{V_j\cap D\}_{1\le j\le e}$ の refinement $\mathcal{U} = (U_i)$ をとり、それにともなう細分写像を $U_i \Subset V_{\tau(i)}$ とする。すると

$$\tau^* : \hat{C}^p(\mathcal{V}, \mathcal{F}) \longrightarrow \hat{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

はコンパクト写像となる。上記補題より

$$(\tau^*, \delta) : \hat{Z}^p(\mathcal{V}, \mathcal{F}) \oplus \hat{C}^{p-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow \hat{Z}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

が onto。あとは Schwartz の lemma による例の方法で

$$\dim H^p(\mathcal{U}\cap D, \mathcal{F}) < \infty \quad , p > 0$$

故　$\dim H^p(\mathcal{U}\cap B, \mathcal{H}^1_B \mathcal{F}) < \infty, \ p > 0.$

次に双対性定理を述べよう。

$$\gamma^q : H^q(N\cap D, \Omega^p) \longrightarrow H_c^{q+1}(N\cap D, \Omega^p)$$

を次のように定義する。

$\varphi \in \Gamma(N\cap D, \mathcal{E}^{p,q})$, $\bar\partial\varphi = 0$ とする。

函数 $u \in C^\infty$ を，$c_0 < d' < d < 0$ に対し

$$u(x) = \begin{cases} 1 & d < \rho(x) < 0 \\ 0 & \rho(x) < d' \end{cases}$$

と定義する．但 $\{c_0 < \rho < 0\} = N \cap D$ だった．

$$\bar\partial(u\varphi) = f \in \mathcal{D}_c(N \cap D, \mathcal{E}^{p,q+1})$$

が $[f] \in H_c^{q+1}(N \cap D, \Omega^p)$ を定めるが，これを $\gamma^q[\varphi] = [f]$ とする．well defined である．

次の命題が鍵となる．

命題

$$\gamma^q : H^q(N \cap D, \Omega^p) \longrightarrow H_c^{q+1}(N \cap D, \Omega^p)$$

は $1 \leqq q \leqq n-2$ で bijectif．

証明のための準備が長いので略す．[2]

我々は有限性定理の証明より

$$\dim H^q(N \cap D, \mathcal{F}) = \dim H^q(\mathcal{U} \cap D, \mathcal{F}) < \infty$$

$q > 0$，を得るので，

« Serre duality » が成立つ：$q > 0$ に対し

$$(H^q(N \cap D, \Omega^p))' \cong H_c^{n-q}(N \cap D, \Omega^{n-p})。$$

上記命題とあわせ，

$$(H^q(N\cap D, \Omega^p))' \cong H^{n-q-1}(N\cap D, \Omega^{n-p})$$

$$q>0$$

これより

定理　$0<q<n-1$ に対し

$$(H^q(B, \mathcal{H}^1_B\Omega^p))' \cong H^{n-q-1}(B, \mathcal{H}^1_B\Omega^{n-p})。$$

系　$2\leq q\leq n-2$ に対し

$$(H^q_B(X, \Omega^p))' \cong H^{n-q}_B(X, \Omega^{n-p})$$

$\Gamma(B, \mathcal{H}^1_B\Omega^p) \cong H^1_B(X, \Omega^p)$ の双対については特別の考察を要すが，最終的に次が示される．

定理　$\mathcal{F}\in coh(X)$，　$q\leq \mathrm{prof}\,\mathcal{F}-2$ に対し

$$H^q(B, \mathcal{H}^1_B\mathcal{F})' \cong \mathrm{Ext}^{n-q-1}(B; \mathcal{H}^1_B\mathcal{F}, \mathcal{H}^1_B\Omega^n).$$

Open problem:　$H^{n-1}(B, \mathcal{H}^1_B\mathcal{F})$ は一般に無限次元だが separated DFS となることが示せるのではないか（DFS はすでにわかっている）。すると

$$H^{n-1}(B, \underline{H}^1_B \mathcal{F})' \cong \mathrm{Hom}(B\,;\, \underline{H}^1_B \mathcal{F},\, \underline{H}^1_B \Omega^n)$$

が成り立つか？

文献

[1] 郡 敏昭: Cohomologie de De Rham au bord d'un domaine fortement pseudoconvexe
Tokyo J. Math. Vol 3 No 1 pp37 – 74

[2] ——: Théorème de dualité pour la cohomologie locale au bord des ouverts fortement pseudoconvexes, Hokkaido Math. J. 投稿予定

[3] Andreotti – Grauert: Théorème de finitude pour la cohomologie des espaces complexes, Bull. Soc. Math. France 90 (1962)