数理解析研究所講究録
第 387 巻 1980 年 125-131

組合せ空間形について

東大・教養　加藤十吉

完備な定曲率 Riemann 多様体の分類問題は空間形の問題として数多くの研究がなされている。([3] 参照)

n 次元定曲率空間 M に対して，局所的にはそのモデル空間 $\mathcal{G}^n$ (= ユークリッド空間 E^n, 球面 S^n, 双曲的空間 H^n) への同型 (isometry) が存在する。これらの局所同型 (局所座標) を座標変換で重ね合わせ，解析接続の方法でつなぎ合わせてゆけば，M の普遍被覆空間 $\hat{M}$ から $\mathcal{G}^n$ への局所同型写像 $\mathcal{D}: \hat{M} \to \mathcal{G}^n$ がえられる。これが，M の展開写像と呼ばれるものである。さらに，M が完備であれば，$\hat{M}$ も完備となり，このことから，$\mathcal{D}$ は被覆写像となる。$\mathcal{G}^n$ は (S^1 のときを除いて) 単連結だから，$\mathcal{D}$ は同型となる。

又，M の基本群 $\pi_1(M)$ は $\hat{M}$ の同型群として作用し，それに対応して，ホロノミー (準同型) $h: \pi_1(M) \to \mathrm{Isom}(\mathcal{G}^n)$ ，こゝで，$\mathrm{Isom}(\mathcal{G}^n) = \mathcal{G}^n$ の自己同型の全体，がえられる。$h(\pi_1(M)) = \mathcal{H}$ を M のホロノミー群という。このとき，

$\mathcal{D}$ はホロノミー h に関して同変；$\mathcal{D}(\alpha\cdot x) = h(\alpha)\circ\mathcal{D}(x)$ 　$(\alpha\in\pi_1(M),\ x\in\hat{M})$ であることがわかる。したがって，M が完備であれば，

$h : \pi_1(M) \cong \mathcal{H}$ 　となる。こうして，n 次元完備空間形は $\mathcal{G}^n$ に不動点なしに作用する不連続同型群 G $(\subset \mathrm{Isom}(\mathcal{G}^n))$ の共役類と一対一に対応することになる。これは，空間形決定の為の幾何的基礎定理といえる。

こゝで問題とするのは，$\mathrm{Isom}(\mathcal{G}^n)$ のかってな離散部分群（これは $\mathcal{G}^n$ の不連続同型群と同意）G に対し上と同種の結果を求めることである。

当然，G は不動点をもつことも許されるのであるから，一般には，$\mathcal{G}^n/G$ は上のような空間形にはならない。いわば，特異点をもつ空間形ということになる。

ところで，G の閉基本領域として，必ずしもコンパクトではないが，$\mathcal{G}^n$ における凸多面体をとることができることが知られている。$\mathcal{G}^n/G$ はその凸多面体の $n-1$ 次元面を適当に２つづつ同型によってはり合わせてえられる。こうした点に組合せ位相幾何学の方法の有効性を期待するのは自然であろう。こうして組合せ空間形を特異点をもつ空間形として定式化することになる。

n 次元 $\mathcal{G}$ 複体 $\mathbb{K}$ とは，モデル空間 $\mathcal{G}^n$ の中のコンパクト凸胞体のなす n 次元複体で，隣接関係が同型で与えられているものを

指す。ふつうの凸胞体的複体はユークリッド複体とみなすことができる。

$\mathcal{G}$ 複体 $\mathbb{K}$ でおおわれる空間 X が連結であれば，区分的測地線の長さを使用して，X 上の距離 $d = d(\mathbb{K})$ が定まる。このとき，$\mathbb{X} = (X, d)$ を n 次元 $\mathcal{G}$ 多面体，$\mathbb{K}$ を $\mathbb{X}$ の分割という。$\mathcal{G}$ 多面体 $\mathbb{X}$，$\mathbb{Y}$ の間の写像 $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ が PI であるとは，X の各点 x に，その近傍 U_x が存在して，

U_x の各点 y に対し，$d(f(x), f(y)) = d(x, y)$

が成立するときにいう。このことは，実は，"$\mathbb{X}$，$\mathbb{Y}$ の分割 $\mathbb{K}$，$\mathbb{L}$ が存在して，

f が $\mathbb{K}$ の各 cell $\mathbb{A}$ を $\mathbb{L}$ のある cell $\mathbb{B}$ の中にうつし，

$f|_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ が isometric である。"

ということに同値になる。

n 次元 $\mathcal{G}$ 多面体 $\mathbb{X}$ が π_k－正則であるとは，$\mathbb{X}$ の分割 $\mathbb{K}$ に対し，$\mathbb{K}$ の各 m-cell ($m = 0, 1, \cdots, n$) の "link" が $n-m-1$ 次元球面 S^{n-m-1} と k－homotopy 同値であるときをいう。

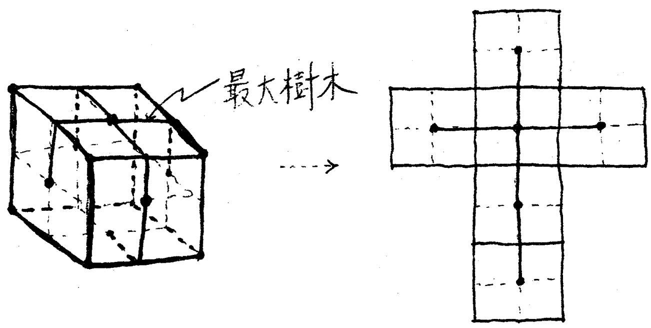
π_1－正則である n 次元 $\mathcal{G}$ 多面体のことを n 次元 $\mathcal{G}$ 相体（variety）という。

例えば，鏡映を含まない離散部分群 $G \subset Isom(\mathcal{G}^n)$ に対し，$\mathcal{G}^n/G$ は n 次元 $\mathcal{G}$ 相体となる。

n 次元 $\mathcal{G}$ 相体 $\mathbb{X}$，$\mathbb{Y}$ の間の PI 写像 $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ が展開

写像であるとは，それが"folding singularity"をもたぬときをいう。G相体の間の開(PI)写像は展開写像の例である。逆に，展開写像も開写像となることがわかるので，展開写像とはG相体の間の開(PI)写像と考えればよい。

例えば，(n次元)G相体$\mathbb{X}$について，その分割$\mathbb{K}$をとり，$\mathbb{K}$の抽象複体Kの双対分割K^*の最大樹木にそって，そのn-胞体達をはり合わせてえられるG多面体$\overline{\mathbb{X}}$（これは，境界をもつG相体とみなせる）に対しては，展開写像 $\overline{\mathbb{X}} \longrightarrow G^n$ がえられる。これは，例えば，立方体の紙模型をつくるときによく知られた展開図をつくる操作の一般化である。



展開図

ところが，$\mathbb{X}$自身の展開写像はこのまゝではえられない。例えば，2次元ユークリッド相体である立方体の表面についてはこれは不可能である。それは，各頂点での角度が$\frac{\pi}{2}\times 3$で2πにみたないことによっている。

こうして展開可能性と角度に関連がみられる。

角度というものは局所的な計量であるが，分割不変性をも

っていることによって，組合せ位相幾何学になじむものである。以後，n次元相体$\mathbb{X}$について角度というときには，$\mathbb{X}$の分割$\mathbb{K}$をとり，各n-2胞体で考えられるものであり，それはn-2胞体を含むn-胞体に臨むdihedral angleの総和を2πで割って正規化したものであるとする。

次の展開定理がえられる。

定理1. $\mathbb{X}$をπ_2-正則なn次元$\mathcal{G}$多面体とする。
$\mathbb{X}$の普遍被覆$\hat{\mathbb{X}}$からモデル空間$\mathcal{G}^n$への同変展開写像

$$(D, h) : (\hat{\mathbb{X}}, \pi_1(\mathbb{X})) \longrightarrow (\mathcal{G}^n, \mathrm{Isom}(\mathcal{G}^n))$$

が存在する為の必要十分条件は，$\mathbb{X}$の角度がすべて自然数となることである。

系. n次元$\mathcal{G}$多面体$\mathbb{X}$が（特異点のない）$\mathcal{G}$空間形である為の必要十分条件は$\mathbb{X}$がπ_2-正則で，その角度がすべて1となることである。

とくに，系はPlaton正多面体の組合せ的一般化としての正則複体の分類に有効に使用される。

定理1は上で観察した$\bar{\mathbb{X}}$の展開写像に注目し，$\bar{\mathbb{X}}$が$\hat{\mathbb{X}}$の基

本領域であって，$\hat{\mathbb{X}}$は$\overline{\mathbb{X}}$のコピーで分割され，展開写像$\overline{\mathbb{X}}\to\mathcal{G}^n$を次々につなげられるというところで角度の条件を使用すれば，十分性がえられる。必要性は困難なく示せる。

次の定理は，Poincaréの基本多角形に対する定理の内包的一般化であるが，同時に我々の問題の解答でもある。

定理２．　n次元$\mathcal{G}$相体$\mathbb{X}$が，ある鏡映を含まない離散部分群$G\subset\mathrm{Isom}(\mathcal{G}^n)$による$\mathcal{G}^n$の商空間$\mathcal{G}^n/G$と同型になる為の必要十分条件は$\mathbb{X}$が完備であり，その角度の逆数がすべて自然数となることである。

一般に，境界をもつn次元$\mathcal{G}$相体$(\mathbb{X},\partial\mathbb{X})$を定義することにより，定理２は鏡映を含む場合には，$\partial\mathbb{X}$での$\mathbb{X}$における角度の逆数がすべて　偶数であるとして成立する。

定理２の証明は，展開写像の考え方と分岐被覆写像との関係を使用する。後者はMaskit [2] がヒントとなっている。

かくして，離散部分群$G\subset\mathrm{Isom}(\mathcal{G}^n)$の共役類は完備な，上に記された角度の条件をもつ$n$次元$\mathcal{G}$相体$(\mathbb{X},\partial\mathbb{X})$の同型類と一対一に対応する。

参考文献

[1] M. Kato, *Combinatorial space forms*, (preprint).

[2] B. Maskit, *On Poincaré's theorem for fundamental polygons*, Advances in Math., 7(1971), 219-230.

[3] J. A. Wolf, Spaces of constant curvature, McGraw-Hill (1967).