数理解析研究所講究録
第389巻 1980年 9-16

Iterated loop space 理論の一応用

阪市大 理　渡辺 孝

Cohen [1] は May [2] を基礎に n-fold loop spaces 上の homology operations の完全な理論をつくった．これを背景にして Milgram [3] の仕事の見直しをすることが本稿の目的である．

[2] には，連結な空間 X に対し，空間 C_nX と弱 homotopy 同値 $\alpha_n : C_nX \longrightarrow \Omega^n\Sigma^n X$ が定義されている．C_nX は自然な filtration $\{F_kC_nX \mid k \geq 0\}$ をもち，その商空間 $e_n^k X = F_kC_nX/F_{k-1}C_nX$ は同変半 smash 積 $\mathcal{C}_n(k) \underset{\Sigma_k}{\ltimes} X^{[k]}$ と同相である．

<u>補題 1</u>　X を $m-1$ 連結 $(m>1)$ とする．このとき

(i) $e_n^k X$ は $km-1$ 連結である．

(ii) 包含写像 $j_k : F_kC_nX \longrightarrow C_nX$ は $(k+1)m-1$ 同値である．

$\mathcal{C}_n(2) \underset{\Sigma_2}{\cong} S^{n-1}$ だから，$e_n^2 X \simeq S^{n-1} \underset{\Sigma_2}{\ltimes} (X \wedge X)$ (以後同一視する)．
写像

$$J : e_{n-1}^2 X \longrightarrow e_n^2 X, \qquad L : e_n^2 X \longrightarrow \Omega(e_{n-1}^2(\Sigma X))$$

を，$v \in S^{n-2}$，$x, y \in X$，$s, t \in [0,1]$ に対し

$$J(v, x, y) = ([v, \tfrac{1}{2}], x, y)$$

$$L([v,s], x, y)(t) = (v, [x, 2t+s-1], [y, 2t-s]) \quad \left(s \leq \tfrac{1}{2} \text{ で } \tfrac{1-s}{2} \leq t \leq \tfrac{1+s}{2},\ \text{又は } s \geq \tfrac{1}{2} \text{ で } \tfrac{s}{2} \leq t \leq \tfrac{2-s}{2} \right)$$

$$L([v,s], x, y)(t) = * \quad (\text{その他})$$

で定義する．一方 $\eta_n : X \longrightarrow \Omega^n\Sigma^n X$ を自然な包含写像とすると，次の可換図式が成り立つ．

$$\begin{tikzcd}
\Omega(\Omega^{n-1}\Sigma^{n-1}X, X) \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{J}"] & X \arrow[r, "\eta_{n-1}"] \arrow[d, "="] & \Omega^{n-1}\Sigma^{n-1}X \arrow[d] \\
\Omega(\Omega^n\Sigma^n X, X) \arrow[r] & X \arrow[r, "\eta_n"] & \Omega^n\Sigma^n X
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\Omega(\Omega^n\Sigma^n X, X) \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{L}"] & X \arrow[r, "\eta_n"] \arrow[d, "\eta_1"] & \Omega^n\Sigma^n X \arrow[d, "="] \\
\Omega^2(\Omega^{n-1}\Sigma^n X, \Sigma X) \arrow[r] & \Omega\Sigma X \arrow[r] & \Omega^n\Sigma^n X
\end{tikzcd}$$

<u>補題 2</u>　$m-1$ 連結 $(m>1)$ な CW 複体 X に対し，次の (i)－(iii) が成り立つ．

(i) 図式

$$\Omega(\Omega^n\Sigma^n X, X) \xrightarrow{f_n} \Omega(\Omega^n\Sigma^n X/X) \xleftarrow{\Omega\bar{\alpha}_n} \Omega(C_n X/X) \xleftarrow{\Omega\bar{j}_2} \Omega(e_n^2 X)$$

において，f_n は $3m-1$ 同値，$\Omega\bar{\alpha}_n$ は homotopy 同値，$\Omega\bar{j}_2$ は $3m$ 同値である．

(ii) 次の可換図式が成り立つ．

$$\begin{tikzcd}
\Omega(\Omega^{n-1}\Sigma^{n-1}X, X) \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{J}"] & \Omega(\Omega^{n-1}\Sigma^{n-1}X/X) \arrow[d] & \Omega(C_{n-1}X/X) \arrow[l] \arrow[d] & \Omega(e_{n-1}^2 X) \arrow[l] \arrow[d, "\Omega J"] \\
{} & {} & {} & {}
\end{tikzcd}$$

$$\Omega(\Omega^n\Sigma^n X, X) \longrightarrow \Omega(\Omega^n\Sigma^n X/X) \longleftarrow \Omega(C_n X/X) \longleftarrow \Omega(e_n^2 X)$$

(iii) 次の可換図式が成り立つ.

$$\begin{tikzcd}
\Omega(\Omega^n\Sigma^n X, X) \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{L}"] & \Omega(\Omega^n\Sigma^n X/X) \arrow[d] & \Omega(C_n X/X) \arrow[l] \arrow[d] & \Omega(e_n^2 X) \arrow[l] \arrow[d, "\Omega L"] \\
\Omega^2(\Omega^{n-1}\Sigma^n X, \Sigma X) \arrow[r] & \Omega^2(\Omega^{n-1}\Sigma^n X/\Sigma X) & \Omega^2(C_{n-1}\Sigma X/\Sigma X) \arrow[l] & \Omega^2(e_{n-1}^2\Sigma X) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

次の図式を考える.

$$\begin{tikzcd}
 & e_1^2 X = X \wedge X \arrow[d, "J^{n-1}"] & \\
e_{n-1}^2 X \arrow[r, "J"] & e_n^2 X \arrow[r, "K"] & e_n^2 X/e_{n-1}^2 X = S^{n-1}\wedge X \wedge X
\end{tikzcd}$$

補題 3　$\widetilde{H}^*(X; Z_p) = Z_p\{a, b, \cdots\}$ とする. このとき $\widetilde{H}^*(e_n^2 X; Z_p)$ の Z_p-basis は次のような元で与えられる.

	$p=2$	$p>2$
$\langle a,b\rangle$	$a\neq b$	$a\neq b$, 又は $a=b$ で $\lvert a\rvert$ は偶数
$e^i\cup a\otimes a$	$0\leq i\leq n-1$	存在しない
$e^{n-1}\cup\langle a,b\rangle$	$a\neq b$	$a\neq b$, 又は $a=b$ で $n+\lvert a\rvert$ は偶数

ここに $\langle a,b\rangle$, $e^{n-1}\cup\langle a,b\rangle$ はそれぞれ

$$(J^{n-1})^*(\langle a,b\rangle) = a\otimes b + (-1)^{|a||b|}\, b\otimes a \;,$$

$$K^*(\sigma^{n-1}(a\otimes b)) = K^*((-1)^{n+|a||b|}\sigma^{n-1}(b\otimes a)) = e^{n-1}\cup\langle a,b\rangle$$

を満たす. また

$$J^*(e^i\cup a\otimes a) = e^i\cup a\otimes a \quad (0\leq i\leq n-2).$$

補題 4　L の adjoint より誘導される準同型写像

$$\phi(L)^*: H^*(e^2_{n-1}(\Sigma X)) \longrightarrow H^*(\Sigma(e^2_n X))$$

に対し

$$\phi(L)^*(\langle\sigma(a),\sigma(b)\rangle) = 0 \ ,$$

$$\phi(L)^*(e^i \cup \sigma(a)\otimes\sigma(a)) = \sigma(e^{i+1}\cup a\otimes a) \ ,$$

$$\phi(L)^*(e^{n-2}\cup\langle\sigma(a),\sigma(b)\rangle) = \sigma(e^{n-1}\cup\langle a,b\rangle)$$

が成り立つ.

定理5　$X=\Omega^n Y$ を $m-1$ 連結 $(m>1)$ な CW 複体とする. このとき $H^i(X;Z_p)$ $(i<3m-1)$ の Z_p-*module* 構造は, $p>2$ のときは $H^*(Y;Z_p)$ の Z_p-*algebra* 構造に, 又 $p=2$ のときは $H^*(Y;Z_2)$ の $\mathcal{A}_2$-*algebra* 構造によって決定される.

証明の概略を述べよう. 写像 $\xi_n:\Sigma^n X\longrightarrow Y$ を $\xi_n=\phi^n(1_X)$ で定義し, $\zeta_n=\Omega^n\xi_n:\Omega^n\Sigma^n X\longrightarrow X$ とおく. ζ_n の *fibre* を $F_n X$ で表わすと, $\zeta_n\eta_n=1_X$ だから, $\Omega^n\Sigma^n X\simeq F_n X\times X$. 従って *fibration*

$$X \xrightarrow{\eta_n} \Omega^n\Sigma^n X \longrightarrow F_n X$$

が存在する (即ち, $\Omega(F_n X)\simeq\Omega(\Omega^n\Sigma^n X, X)$). これより自然な $3m-1$ 同値

$$g_n: e^2_n X \longrightarrow F_n X$$

が得られる. また ξ_n の *fibre* を $G_n X$ で表わすと, $\Omega^n(G_n X)\simeq F_n X$. このとき $\phi^n(g_n):\Sigma^n(e^2_n X)\longrightarrow G_n X$ は $n+3m-1$ 同値だから,

$$\phi^n(g_n)^*: H^i(G_n X)\longrightarrow H^i(\Sigma^n e^2_n X)$$

は $i<n+3m-1$ のとき同型である．ここで fibration

$$G_nX \xrightarrow{\nu} \Sigma^nX \xrightarrow{\xi_n} Y$$

の Serre exact sequence

$$\cdots \longrightarrow H^{i-1}(G_nX) \xrightarrow{\tau} H^i(Y) \xrightarrow{\xi_n^*} H^i(\Sigma^nX) \xrightarrow{\nu^*} H^i(G_nX) \longrightarrow \cdots$$

を考える．ここに $\xi_n^* = (\sigma^*)^n$ は n-fold cohomology suspension．これより $i<3m-1$ の範囲で $H^i(X)$ を求めるには，transgression τ $: H^i(G_nX) \longrightarrow H^{i+1}(Y)$ のふるまいを $i<n+3m-1$ の範囲でみればよい．それは次の通りである．

(1) $\tau(\sigma^n(\langle a,b\rangle)) = 0$．実は $\nu^*(\sigma^n(a\cup b)) = \sigma^n(\langle a,b\rangle)$.

(2) $\tau(\sigma^n(e^i \cup a\otimes a)) = Sq^{|a|+i+1}(\tilde{a})$.

(3) $\tau(\sigma^n(e^{n-1}\cup\langle a,b\rangle)) = \tilde{a}\cup\tilde{b}$.

ここに，$a\in H^*(X)$ に対し，$\tilde{a}\in H^{*+n}(Y)$ は $(\sigma^*)^n(\tilde{a}) = a$ を満たす唯一つの元である（(1)-(3) に現われる a は，$|a|\leq 2m-1$ を満たすことに注意）．

(2) だけ示そう．$|a| = \ell$ とおき，次の可換図式

$$\begin{tikzcd}
\Sigma^n e_n^2 X \arrow[r] \arrow[d, "\Sigma^n e_n^2(a)"] & G_nX \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma^nX \arrow[r] \arrow[d, "\Sigma^n a"] & Y \arrow[d, "\tilde{a}"] \\
\Sigma^n e_n^2 K_\ell \arrow[r] & G_nK_\ell \arrow[r] & \Sigma^nK_\ell \arrow[r] & K_{\ell+n}
\end{tikzcd}$$

($K_\ell = K(Z_2,\ell)$ は Eilenberg-Macdane 空間) を考えれば，下方の fibration において

$$\tau(\sigma^n(e^i\cup\iota_\ell\otimes\iota_\ell)) = Sq^{\ell+i+1}(\iota_{\ell+n})$$

($\iota_\ell \in H^\ell(K_\ell)$ は基本 cohomology 類) を示せばよいことがわかる．
そのためには，可換図式（補題 2 (ii) 参照）

$$\begin{array}{ccccccc}
\Sigma^n e_{n-1}^2 K_\ell & \longrightarrow & \Sigma G_{n-1} K_\ell & \longrightarrow & \Sigma^n K_\ell & \longrightarrow & \Sigma K_{\ell+n-1} \\
\downarrow{\scriptstyle \Sigma^n J} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle =} & & \downarrow \\
\Sigma^n e_n^2 K_\ell & \longrightarrow & G_n K_\ell & \longrightarrow & \Sigma^n K_\ell & \longrightarrow & K_{\ell+n}
\end{array}$$

から，$i = n-1$ の場合，即ち

$$\tau(\sigma^n(e^{n-1} \cup \iota_\ell \otimes \iota_\ell)) = \iota_{\ell+n}^2$$

を示せばよい．次の可換図式（補題 2 (iii) 参照）

$$\begin{array}{ccccccc}
\Sigma^n e_n^2 K_\ell & \longrightarrow & G_n K_\ell & \longrightarrow & \Sigma^n K_\ell & \longrightarrow & K_{\ell+n} \\
\downarrow{\scriptstyle \Sigma^{n-1}\phi(L)} & & & & & & \\
\Sigma^{n-1} e_{n-1}^2 (\Sigma K_\ell) & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle =} \\
\downarrow & & & & & & \\
\Sigma^{n-1} e_{n-1}^2 K_{\ell+1} & \longrightarrow & G_{n-1} K_{\ell+1} & \longrightarrow & \Sigma^{n-1} K_{\ell+1} & \longrightarrow & K_{\ell+n}
\end{array}$$

において，左縦から誘導される cohomology 群の準同型写像は，補題 4 により，$\sigma^{n-1}(e^{n-2} \cup \iota_{\ell+1} \otimes \iota_{\ell+1})$ を $\sigma^n(e^{n-1} \cup \iota_\ell \otimes \iota_\ell)$ にうつす
fibration

$$\Sigma e_1^2 K_{\ell+n-1} \longrightarrow G_1 K_{\ell+n-1} \longrightarrow \Sigma K_{\ell+n-1} \longrightarrow K_{\ell+n}$$

において

$$\tau(\sigma(\iota_{\ell+n-1} \otimes \iota_{\ell+n-1})) = \iota_{\ell+n}^2$$

が成り立つから，τ の自然性より求める結果が得られる．

<u>例</u>　上の定理において

$$Y = CP_8^{12},\ P=2,\ n=11\ (従って\ m=5)$$

の場合を考える.

$$\widetilde{H}^*(CP_8^{12}) = Z_2\{y_{16}, y_{18}, y_{20}, y_{22}, y_{24}\}$$

において

$$Sq^{2i}(y_{2r}) = \binom{r}{i} y_{2(r+i)}, \qquad y_{2r} \cup y_{2s} = 0$$

だから, (2), (3) により, $i<14$ のとき $\tau : H^i(G_{11}(\Omega^{11}CP_8^{12})) \longrightarrow H^{i+1}(CP_8^{12})$ は零写像. 従って群としての同型

(4) $\widetilde{H}^i(\Omega^{11}CP_8^{12}) \cong \widetilde{H}^{i+11}(CP_8^{12}) \oplus \widetilde{H}^i(e_{11}^2(\Omega^{11}CP_8^{12}))$

が成り立つ. $(\sigma^*)^{11} : H^*(CP_8^{12}) \longrightarrow H^{*-11}(\Omega^{11}CP_8^{12})$ に対し, $(\sigma^*)^{11}(y_{2r}) = z_{2r-11}$ とおくと, 補題 3 により, $* < 14$ のとき

$$\widetilde{H}^*(e_{11}^2(\Omega^{11}CP_8^{12})) = Z_2\{e^0 \cup z_5 \otimes z_5,\ e^1 \cup z_5 \otimes z_5,$$
$$e^2 \cup z_5 \otimes z_5,\ \langle z_5, z_7\rangle,\ e^3 \cup z_5 \otimes z_5\}.$$

従って

$$\widetilde{H}^*(\Omega^{11}CP_8^{12}) = Z_2\{z_5, z_7, z_9, \overline{e^0 \cup z_5 \otimes z_5}, z_{11}, \overline{e^1 \cup z_5 \otimes z_5},$$
$$\overline{e^2 \cup z_5 \otimes z_5}, \overline{\langle z_5, z_7\rangle}, z_{13}, \overline{e^3 \cup z_5 \otimes z_5}\}.$$

しかし上の分解 (4) は $\mathcal{A}_2$-module としてのそれではない. 実際 $Sq^1(\overline{\langle z_5, z_7\rangle}) = z_{13}$ が成り立つことが次のように示される. 関係式

$$Sq^1 Sq^8 + (Sq^2 Sq^1 Sq^2)Sq^4 + Sq^8 Sq^1 = 0$$

に同伴した secondary operation Φ_8 に対し, $\Phi_8(y_{16}) = [y_{24}]$ が知られている. 従って, $\Phi_8(z_5) = [z_{13}]$. 一方 Φ_8 は 5 次元 cohomology 類

の上で普遍的に自明である．即ち，z_{13} は Φ_8 の indeterminacy に含まれる．ここで

$$\begin{aligned} \mathrm{indet}\,\Phi_8 &= Sq^1 H^{12}(\Omega^{11}CP_8^{12}) + Sq^2 Sq^1 Sq^2 H^8(\Omega^{11}CP_8^{12}) + Sq^8 H^5(\Omega^{11}CP_8^{12}) \\ &= Sq^1 H^{12}(\Omega^{11}CP_8^{12}). \end{aligned}$$

また（西田の公式により）$Sq^1(e^2 \cup z_5 \otimes z_5) = e^3 \cup z_5 \otimes z_5$，$Sq^1(\langle z_5, z_7\rangle) = 0$．これらを結び合わせると求める式が得られる．

References

[1] F. R. Cohen: The homology of $\mathcal{C}_{n+1}$-spaces, $n \geq 0$, Springer Lecture Notes in Math., vol. 533, 1976, 207-351.

[2] J. P. May: The geometry of iterated loop spaces, Springer Lecture Notes in Math., vol. 271, 1972.

[3] R. J. Milgram: Unstable homotopy from the stable point of view, Springer Lecture Notes in Math., vol. 368, 1974.